FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound at
A.M.N.H.
1916

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. XVI.

pro Anno MDCCLXXI.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXXII.

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XVI.

MATHEMATICA.

I.

De Solidis quorum ſuperficiem in planum explicare licet.

Auctore L. Eulero pag. 3.

Notum eſt ex ipſa Geometria elementari cylindros et conos ea gaudere proprietate, quod eorum ſuperficies in planum explicari queat, quae proprietas ad omnia deinde corpora cylindrica et conica extenditur, quorum baſibus figura quaecunque tribuitur; contra vero de ſphaera conſtat, eius ſuperficiem nullo modo in planum explicari ſiue ſuperficie plana obduci poſſe; quaeſtio igitur hinc naſcitur maxime notatu digna, quo charactere ea ſolida inſtructa eſſe oportet, quorum ſuperficiem in planum explicare licet, atque eius quaeſtionis tres omnino ſolutiones ab Illuſtr.

 Eulero

Eulero in praeſenti Diſſertatione allatae ſunt. Primae ſolutionis, quae quaſi ex meris principiis Analyticis deriuata eſt, fundamentum in eo verſatur, quod elementum quodcunque ſuperficiei ſolidi, aequetur elemento ſuperficiei planae. Hoc modo quaeſtio iſta Geometrica reducitur ad reſolutionem ſequentis problematis Analytici: *binarum variabilium* t *et* u, *ſex inuenire functiones* l, m, n, λ, μ, ν *ita comparatas vt formulae* $l\,dt + \lambda\,du$; $m\,dt + \mu\,du$; $n\,dt + \nu\,du$ *ſint integrabiles*; *praeterea vero ſit* $ll + mm + nn = 1$; $\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1$; $l\lambda + m\mu + \nu n = 0$. Hoc autem problema primo intuitu adeo arduum videtur, vt niſi ipſa haec quaeſtio Geometrica media ſuppeditaſſet pro eo ſoluendo, vix aliquam ſolutionem inueniri potuiſſe videtur. Secundae ſolutionis ex principiis Geometricis deductae, fundamentum in eo imprimis ſitum eſt, quod corpora quorum ſuperficies in planum explicari poſſint, ita comparata eſſe debeant, vt ex vnoquoque huius ſuperficiei puncto, ſaltem vna educi poſſit linea recta, quae tota in ſuperficie ſit ſita, tum vero vt binae quaecunque huiusmodi inter ſe proximae in eodem plano ſint conſtitutae, ideoque niſi ſint parallelae in aliquo puncto concurrant. Hoc modo igitur planum fit, per concurſum harum rectarum oriri lineam curuam duplicis curuaturae, cuius omnes tangentes productae in ipſam ſuperficiem corporis quaeſiti incidunt. Quum igitur infinita detur varietas linearum curuarum duplicis curuaturae, iam nullum quidem eſt dubium, quin praeter corpora cylindrica

et

et conica infinita detur varietas corporum, quorum ſuperficies ſuperficie plana obduci poſſit. Poſtquam autem Illuſtr. Auctor ipſam huius quaeſtionis ſolutionem expediuit, operae pretium quoque duxit fuſius oſtendere, quomodo haec ſolutio perducat ad reſolutionem iſtius Problematis Analytici, de quo modo loquuti fuimus. Formulae autem quae tum pro valoribus litterarum l; m; n; λ; μ; ν, cum etiam pro valoribus integralium $\int(l\,dt + \lambda\,du)$; $\int(m\,dt + \mu\,du)$; $\int(n\,dt + \nu\,du)$ proponuntur tanta concionitate et elegantia ſe commendant, vt non poſſint non Geometris eſſe gratiſſimae. Tertia demum ſolutio Problematis commemorati deducitur ex Theoria lucis et vmbrae, facili ſcilicet attentione adhibita liquet, omnes figuras vmbrarum ita eſſe comparatas, vt in planum explicari queant, quum enim radii luminis propagentur ſecundum lineas rectas, quae dum corpus opacum ſtringunt vmbram formant, omnes vero hi radii ſimul tam corpus lucidum, quam opacum tangant adeoque bini proximi in eodem plano ſiti ſint, iam omnino patet eas conditiones impletas eſſe, quae ad hoc requiruntur, vt ſuperficies ſolidi in planum ſit explicabilis. Admodum autem ſimplex eſt ſolutio, quae ex hac conſideratione deducitur, ſcilicet ſi tres coordinatae ad ſuperficiem dicantur x, y, z inuenit Illuſtr. Auctor naturam huius ſuperficiei his duabus exhiberi aequationibus $y = P + Qx$ et $z = R + Sx$, poſitis P, Q, R, S functionibus quibuscunque nouae variabilis ϕ, modo iſta impleatur conditio, vt ſit

$\frac{dS}{dR} = \frac{dQ}{dP}$. Facile autem oſtendi poteſt ſecundam Illuſtr. Auctoris ſolutionem cum hac tertia perfecte conuenire, adeo vt inter omnes tres allatas ſolutiones egregius ſit conſenſus.

II.

Methodus noua et facilis calculum variationum tractandi.

Auctore L. Eulero pag. 35.

Quamquam hoc argumentum de calculo variationum ab Illuſtr. *Eulero* multoties antea ſit pertractatum, imprimis in opuſculo Tertio Calculi Integralis Volumini annexo, tamen quae in hac Diſſertatione occurrunt vt plane noua conſiderari merentur, ſiquidem heic in eo occupatus eſt, vt oſtendat calculum variationum, quem antea nouum calculi genus conſtituere ratus erat, leui facta immutatione referri poſſe ad ſecundam partem calculi integralis, qua de integrationibus formularum differentialium disquiritur, in quibus functiones duarum variabilium occurrunt. Quum enim calculus variationum in eo verſetur, vt ſi propoſita fuerit quaecunque relatio binarum variabilium x et y et ea aliquantillum varietur, inueſtigandum ſit, quam mutationem ſubeant non ſolum x et y ſed etiam eorum differentialia quaecunque ex huiusmodi variatione;

tione; omnino liquet has variationes facile aſſignari poſſe ſi y conſideretur vt functio binarum variabilium x et t, quo ipſo variatio quaeſita ipſius y alias ſigno δy exprimi ſolita, jam exprimetur hac formula $d t (\frac{d y}{d t})$. Si nimirum y concipiatur vt applicata alicuius lineae curuae cuius abſciſſa ſit x, in calculo variationum requiritur, vt relatio aſſignetur, quae omnes alias curuas huic proximas complectitur; manifeſtum autem eſt omnes has curuas exprimi poſſe aequatione $y = V$, vbi V functio eſt quaecunque ipſorum x et t, modo ita fuerit comparata, vt poſito $t = o$ prodeat $V = X$, ideoque $y = X$ aequatio quae pro curua principali locum habere debet. In ipſis vero variationibus inueſtigandis ita verſatur Illuſtr. *Eulerus*, vt conſideret functiones ſecundum ordinem expreſſionum, tractando ſcilicet primum formulas quae x et y tantum continent, deinde formulas quae praeter x et y eorum differentialia primi, ſecundi vel altiorum graduum complectuntur, tum vero progreditur ad expreſſiones quae formulas quoque integrales inuoluunt, invenit autem variationem formulae integralis $\int Z\, d x$, poſito

$$d Z = M\, d x + N\, d y + P\, d p + Q\, d q \text{ etc.}$$

vbi

$$p = \frac{d y}{d x};\ q = \frac{d p}{d x} \text{ etc.}$$

hac exprimi formula:

$$d t \int d x (N (\frac{d y}{d t}) + P (\frac{d d y}{d x d t}) + Q (\frac{d^3 y}{d x^2 d t}) + R (\frac{d^4 y}{d x^3 d t}) + \text{etc.}).$$

 Per-

Perſpicuum autem eſt huiusmodi expreſſiones $(\frac{dy}{dt})$ $(\frac{ddy}{dx\,dt})$ determinatos valores adipiſci non poſſe, niſi y conſideretur vt determinata functio ipſorum x et t, in doctrina autem variationum eiusmodi relatio inter x et y vt plane incognita ſpectari ſolet, imprimis quando huius doctrinae applicatio fit, ad quaeſtiones de maximis et minimis, vbi requiritur vt huiusmodi variatio in nihilum abeat. Oſtendendum igitur fuit, quomodo formula ſupra allata in aliam transformari poſſit, ita comparatam, vt ſub ſigno ſummatorio non occurrat niſi $(\frac{dy}{dt})$, ex quo colligitur, pro caſu variationis euaneſcentis, membrum iſtud ſigno ſummatorio affectum in nihilum abire. Methodus haec, quae ad quascunque expreſſiones duarum variabilium patet, etiam facile adplicari poteſt, ad formulas quae tres variabiles x, y, z inuoluit, in hoc autem negotio neceſſum eſt vnam earum vti z tamquam functionem binarum reliquarum x et y conſiderare. Heic igitur regulae praeſcribuntur pro inuenienda variatione expreſſionum quae vel ſolas variabiles x, y, z inuoluunt, vel praeterea differentialia quaecunque ipſius z, vel denique formulam integralem duplicatam $\int\int Z\,dx\,dy$ vbi Z eſt functio quaecunque variabilium x, y, z et differentialium quorumcunque ipſius z, integratio autem ita inſtituenda eſt, vt pro prima integratione ſola x vt variabilis tractetur, pro ſecunda autem ſola y. Simili vero modo patet huius Methodi applicationem facile fieri poſſe, ad formulas quatuor vel plures variabiles invol-

voluentes. Huiusmodi autem formularum complicatiorum euolutio, quum parum fructuoſa ſit, et praeterea vix rite adumbrari poſſit, niſi omnia phaenomena formularum quae binas tantum variabiles inuoluunt accurate fuerint explicata; hunc in finem Illuſtr. Auctor ſingulas partes, quae expreſſionem pro variatione formulae $\int Z\,dx$ ingrediuntur ad examen reuocare vtile duxit. Huic autem explicationi demum ſubiunxit dilucidationes quasdam circa curuas maximi minimiue proprietate praeditas, idque eo potiori cum iure, quod vſus calculi variationum imprimis in huiusmodi quaeſtionibus reſolvendis, ſit inſignis. Quaeſtiones autem de maximis et minimis in varias diſtribui poſſunt claſſes, prout ſcilicet aequatio pro maximo vel minimo, vel finita eſt, vel differentialia primi, ſecundi aut altiorum graduum inuoluat. Animaduertit autem Illuſtr. Auctor, quod quemadmodum pro prima claſſe aequatio omnino eſt determinata, et curua huiusmodi quaeſtionibus ſatisfaciens, non detur niſi vnica, ita pro reliquis claſſibus certas praeſcribi conditiones, vt determinata aſſignari poſſit curua quaeſtioni ſatisfaciens, easque tanto plures, quanto ſublimioris gradus differentialia inuoluit formula maximi et minimi. Sic pro ſecunda claſſe, vbi differentialia primi gradus inuoluuntur, haec praeſcribitur conditio, vt curuae inter quas maxima exquiri debet, per data duo tranſeat puncta, pro tertia autem claſſe quae differentialia ſecundi gradus inuoluit, inſuper praeſcribitur, vt datae ſint tangentes curuarum in datis his punctis.

 III.

III.

De ſummatione ſerierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione et vſu.

Auctore Dan. Bernoulli pag. 71.

Quamuis Scientiae Mathematicae et principiorum euidentia et concluſionum certitudine, reliquis omnibus palmam praeripiant, fatendum tamen eſt, multa in iisdem occurrere, quae primo intuitu non ſolum paradoxa, ſed adeo abſurda videntur; huiusmodi eſt ſummatio ſerierum recurrentium, quippe quae ſaepius indicat ſummam ſeriei alicuius propoſitae, magis vel minus a veritate diſcrepantem, quum tamen ipſa operatio Analytica indicaret ſummationem allatam pro genuina eſſe habendam. Sic pro ſerie ſimpliciſſima $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. cuius ſumma ſtatuitur $= \frac{1}{2}$ facile quidem liquet vbicunque haec ſeries abrumperetur ſummam allatam ſemper fore erroneam, ratio autem cur pro vera haberi queat in eo ſita eſt, quod quum ſeries nunquam finiri ſupponatur, aequalis ratio ſit quae vrgeat vt eius ſumma ſit 1 et 0, vnde ſumma ſtatuenda eſt quantitas quae aequaliter diſtat ab 1 et 0, hoc eſt $= \frac{1}{2}$, quod etiam operationes Analyticae indicant ex. gratia ſi euoluatur fractio $\frac{1}{1+x}$ et poſt euolutionem ponatur $x = 1$. Neque tamen haec ſumma *proprie* loquen-

loquendo ſiue vera ſeu falſa dici poteſt, quod non ſolum pro exemplo allato, vbi ſeries ad ſummam neque conuergit, nec ab ea diuergit, ſed etiam pro ſeriebus diuergentibus locum habet. Sic ſumma ſeriei $1 - 2 + 3 - 4$ etc. inuenitur eſſe $= \frac{1}{4}$, eiusque aſſerti veritas non ſolum per operationes Analyticas demonſtrari poteſt, ſed etiam inde confirmatur, quod ex hac ſumma aliarum quantitatum valores deducantur veritati plane congruae. Quum enim per euolutionem formulae $\frac{1}{(1+x)^2}$ oriatur $\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3xx - 4x^3 + 5x^4$ etc., inde facile deducitur $x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ etc. $=$ Log. $(1+x)$, atque ſi ponatur $x = 1$ inde habetur Log. $2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc., de cuius veritate quum dubitare non liceat, neque diffitendum eſt, quin ſumma ſeriei $1 - 2 + 3 - 4 + 5$ etc. ſit $= \frac{1}{4}$. Pro ſeriebus recurrentibus vbi datur certa periodus terminorum, quae continuo recurrit, facile ſumma aſſignari poteſt, ſi enim in periodo continuo recurrente primus terminus ſit a, ſumma primi et ſecundi b, ſumma ter priorum c etc. et numerus terminorum in hac periodo n, erit ſumma ſeriei $= \frac{a+b+c \text{ etc.}}{n}$, modo ſumma cuiusuis periodi integrae ſit o; ratio autem in eo ſita eſt, quod ſi ſeries circa primum periodi terminum abrumpatur ſumma ſit a, ſi circa ſecundum b, circa tertium c etc. igitur quum hi valores pro ſumma aequo iure gaudeant, ſumma ſtatuenda erit $\frac{a+b+c \text{ etc.}}{n}$. Ad huiusmodi ſeries pertinent, qui formantur ex ſinubus vel coſinubus arcuum ſe-

cundum arithmeticam progreſſionem procedentium, et quum in genere ſit:

$$\text{coſ.}\, x + \text{coſ.}\, 2\, x + \text{coſ.}\, 3\, x + \text{coſ.}\, 4\, x + \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}$$

ceu a plurimis Auctoribus demonſtratum reperitur, ſi pro x ponatur $2\, q$, $\tfrac{4}{3} q$; q; $\tfrac{4}{5} q$ etc. deſignante q angulum rectum, habebuntur ſeries recurrentes diverſae, pro quibus ſumma continuo eſt $= -\tfrac{1}{2}$. Singularis autem heic occurrit caſus, qui a regula generali differt, ſi ſcilicet ponatur $x = 4\, n\, q$, deſignante n numerum integrum, tum enim haec ſeries abit in

$$1 + 1 + 1 + 1 \text{ etc.}$$

cuius ſumma certe nullo ſenſu ſtatui poteſt $= -\tfrac{1}{2}$. Pro ſinuum progreſſione ſequens habetur formula:

$$\text{Sin.}\, x + \text{Sin.}\, 2\, x + \text{Sin.}\, 3\, x + \text{Sin.}\, 4\, x + \text{etc.} = \frac{\text{Sin.}\, x}{2(1 - \text{coſ.}\, x)},$$

cuius aequationis veritas, quamuis ab Illuſtr. huius diſſertationis Auctore iam egregiae ſtabilita ſit, tamen eandem facillimo hoc ratiocinio illuſtrare non pigebit: ponatur

$$\text{Sin.}\, x + \text{Sin.}\, 2\, x + \text{Sin.}\, 3\, x + \text{Sin.}\, 4\, x + \text{etc.} = S,$$

mutiplicetur tota aequatio per coſ. x et fiet

$$\text{Sin.}\, x + 2\, \text{Sin.}\, 2\, x + 2\, \text{Sin.}\, 3\, x + 2\, \text{Sin.}\, 4\, x + \text{etc.} = 2\, S\, \text{coſ.}\, x$$

ideoque

$$\text{Sin.}\, x = 2\, S\, (1 - \text{coſ.}\, x).$$

Licet ea quae in hac Diſſertatione ab Illuſtr. *Bernoullio* allata ſunt, multis in caſibus iis dubiis quae circa

circa ſummationes ſeriecrum oriuntur, diluendis ſufficere queant; tamen alii atque alii dantur caſus, quibus explicationes ab Ipſo allatae minus ſatisfacere videntur, quamobrem non diffitemur nobis magis placere eam explicationem, quam Illuſtr. *Eulerus* in Inſtitutionibus Calculi Differentialis Cap. III. §. 110. adfert, quippe qua omnibus dubiis plane ſatisfieri poſſe exiſtimamus.

IV.

Euolutio formulae integralis $\int x^{f-1}\, dx\, (lx)^{\frac{m}{n}}$ integratione a valore $x=0$ ad $x=1$ extenſa.

Auctore L. Eulero pag. 91.

Quum qni in hac Diſſertatione occurrunt calculi Analytici ita comparati ſint, vt eorum ſummarium quoddam vix tradi queat, Mathematum peritos ad ipſam diſſertationem ablegamus, id tantum monuiſſe contenti, quod Illuſtr. *Eulerus* heic fuſius proſequutus ſit, quae olim in Tomo V. Comment. Petropol. de integrationibus formularum differentialium ſub certis conditionibus peragendis iam expoſuit.

V.

V.

Problematis cuiusdam Geometrici prorſus ſingularis euolutio.

Auctore L. Eulero pag. 140.

Problema Geometricum, cuius euolutionem heic tradit Illuſtr *Eulerus* in eo conſiſtit, vt quaeratur linea curua, cuius dum ducitur tangens quaecunque datae lineae rectae occurrens, et angulus inter tangentem et rectam datam interceptus biſecetur, recta iſta biſecans curuae perpetuo ſit normalis. Perſpicuum quidem eſt omnes circulos qui datam rectam habent tangentem, huic problemati ſatisfacere, dubium tamen adhuc relinquitur vtrum praeter circulum aliae dentur lineae curuae, quae conditiones Problematis adimpleant. Hanc igitur quaeſtionem eo maiori attentione dignam iudicauit Illuſtr. Auctor, quod inuenta iam ſolutione Analytica, tamen dubium ſuperſit, vtrum vnica curua an plures ei ſatisfaciant. Quod vero ad ipſam ſolutionem Analyticam attinet, ea inter difficiliores haberi meretur, quod primo intuitu nexus inter bina iſta puncta curuae, prius vbi tangitur et alterum ei correlatum vbi normaliter traiicitur, ſe non manifeſtet. Ad nexum autem hunc indagandum tangens curuae ducta quoque concipiatur ad punctum poſterius, quo ipſo euidens eſt angulum quem haec tangens facit

cum

cum recta data, dimidium fore illius quem tangens prior cum eadem recta facit, vnde demum deducitur, ſi angulus dimidius dicatur ω, tangens ipſi reſpondens t et Tangens prior T, fore T ſimilem functionem 2ω ac t eſt ipſius ω. Hac autem proprietate praeſuppoſita, facillimum iam eſt, aequationem Analyticam pro curua inuenire, cum ſcilicet duplex quaeritur valor portionis rectae datae interceptae inter binas tangentes, quam aequationem Analyticam praeter T et t angulus ω ingreditur. Loco autem aequationis inter T, t et ω, alia quaeri poteſt inter reſectas rectae datae et angulum ω, vel etiam inter normales ad curuam in binis punctis correlatis et hunc angulum, vel etiam inter binos arcus curuae et hunc angulum, vel inter curuae radios oſculi ad bina puncta correlata et eundem angulum etc. Quum autem his aequationibus tres incognitae inſint, videretur easdem problemati reſoluendo non ſufficere, notandum tamen eſt, reapſe binas heic occurrere aequationes, quarum altera exinde deſumitur, quod ſit ex, cauſſa T talis functio ipſius 2ω ac t eſt ipſius ω. Et ſi haec conditio in calculum introducatur inueniri poteſt aequatio, quae praeter angulum ω, vnicam tantum variabilem inuoluit. Ad hoc comprobandum conſideremus aequationem Illuſtr. Auctoris §. 8. qua relatio definitur inter reſectas rectae datae x, X et angulum ω, quae ita eſt expreſſa

$$X \operatorname{coſ.} \omega = \frac{dx}{d\omega} . \operatorname{Sin.} \omega + x \operatorname{coſ.} \omega,$$

et poſito $x \operatorname{Sin.} \omega = y$, nec non $X \operatorname{Sin.} 2\omega = Y$,

 in

in hanc abit

$$Y = \frac{2\,dy}{d\omega}.\ \text{ſin.}\ \omega\,,$$

vbi Y ſimilis debet eſſe functio ipſius $2\,\omega$, ac eſt y ipſius ω. Ponamus igitur eſſe $y = \Phi:\omega$ eritque

$$Y = \Phi:(2\omega) = \Phi:\omega + \omega\frac{d.\Phi:\omega}{d\omega} + \frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{dd.\Phi:\omega}{d\omega^2} + \frac{\omega^3}{1.2.3}\,\frac{d^3.\Phi:\omega}{d\omega^3} + \text{etc.}$$

vnde pro $\Phi:\omega$ iterum ſubſtituto y habebitur

$$y + \frac{\omega\,dy}{d\omega} + \frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{dd.y}{d\omega^2} + \frac{\omega^3}{1.2.3}\,\frac{d^3y}{d\omega^3} + \text{etc.} = \frac{2\,dy}{d\omega}\ \text{Sin.}\ \omega$$

aequatio quae binas tantum variabiles y et ω inuoluit. Quaeſtio igitur eo reducitur, vtrum praeter circulum aliae lineae curuae dentur, quae hanc aequationem adimpleant? Si valor ipſius y exprimatur per ſeriem, in qua poteſtates ipſius ω exponentes integros et poſitiuos tantum habent, facile quidem oſtendi poteſt, pro huiusmodi ſuppoſitione, circulum ſolum ſatisfacere, quum vero nulla adeſſe videatur ratio, cur pro y eiusmodi expreſſionem ſupponere non liceret, vbi exponentes poteſtatum ipſius ω occurrerent ſiue negatiui, ſiue fracti, omnino probabile eſt praeter circulum dari infinitas lineas curuas quae Problemati allato ſatisfaciunt.

VI.

VI.

Conſiderationes Cyclometricae.

Auctore L. Eulero pag. 160.

Varia in hac diſſertatione proponuntur ab Illuſtr. eius Auctore circa conſtructionem Lunularum quadrabilium, notum autem eſt hanc quaeſtionem eo redire, vt quaerantur bini anguli, qui inter ſe duplicatam tenent rationem ſinuum, adeo vt ſi vnus eorum dicatur m alter n, eſſe debeat $m : n :: \text{Sin}\ m^2 : \text{Sin}.\ n^2$. Communiter quidem in reſolutione problematis de lunulis quadrabilibus ſupponi ſolet numeros m et n eſſe commenſurabiles, demonſtratum tamen adhuc non inuenimus, nullo alio caſu ſolutionem Geometricam exſpectari poſſe. Ex ipſa quaeſtionis natura intelligitur quidem rationem ſinuum eſſe debere algebraicam quum alioquin ratio angulorum algebraice definiri non poſſit, inde tamen non ſequi videtur, hanc rationem numeris tantum integris circumſcribi. Quam vero Methodus adhuc deſideretur quo hoc problema etiam per angulos non commenſurabiles expediri poteſt, Illuſtr. Auctor heic praeprimis ſibi conſiderandos propoſuit caſus, quibus problematis ſolutio per circulum et normam expediri poteſt, qui caſus numero habentur quinque. Si enim ſtatuatur $m = \frac{1}{2}\mu\omega$ et $n = \frac{1}{2}\nu\omega$, ſequentes caſus Geometricam admittunt conſtructionem per circulum

culum et normam I°. ſi $m = 45°$ et $n = 90°$, qui eſt caſus notiſſimae Lunulae Hippocratis, II. ſi $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$, III. ſi $m = \omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$, IV. ſi $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$, denique V. ſi $m = \frac{3}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$. Poſſunt vero omnes hi caſus facillime detegi, ſi ſtatuatur $m = \mu z$ et $n = \nu z$, quo facto erit

$$\mu : \nu :: \text{Sin}\, \mu z^2 : \text{Sin.}\, \nu z^2 \text{ ſeu } \text{Sin.}\, \mu z : \text{Sin.}\, \nu z :: \sqrt{\mu} : \sqrt{\nu},$$

quum enim ſit

$$\text{Sin.}\, \mu z = \text{Sin.}\, z\,(2^{\mu-1}\, \text{coſ.}\, z^{\mu-1} - (\mu-2)\, 2^{\mu-3}\, \text{coſ.}\, z^{\mu-3} + \frac{(\mu-3)(\mu-4)}{1.\ 2}\, 2^{\mu-5}\, \text{coſ.}\, z^{\mu-5} - \text{etc.})$$

$$\text{Sin.}\, \nu z = \text{Sin.}\, z\,(2^{\nu-1}\, \text{coſ.}\, z^{\nu-1} - (\nu-2)\, 2^{\nu-3}\, \text{coſ.}\, z^{\nu-3} + \frac{(\nu-3)(\nu-4)}{1.\ 2}\, 2^{\nu-5}\, \text{coſ.}\, z^{\nu-5} - \text{etc.})$$

inde fiet

$$\sqrt{\nu}(2^{\mu-1}\, \text{coſ.}\, z^{\mu-1} - (\mu-2)\, 2^{\mu-3}\, \text{coſ.}\, z^{\mu-3} + \frac{(\mu-3)(\mu-4)}{1.\ 2}\, 2^{\mu-5}\, \text{coſ.}\, z^{\mu-5} - \text{etc.}) =$$
$$\sqrt{\mu}(2^{\nu-1}\, \text{coſ.}\, z^{\nu-1} - (\gamma-2)\, 2^{\nu-3}\, \text{coſ.}\, z^{\nu-3} + \frac{(\nu-3)(\nu-4)}{1.\ 2}\, 2^{\nu-5}\, \text{coſ.}\, z^{\nu-5} - \text{etc.}).$$

Ponamus iam μ eſſe numerum minorem, et ſubſtituamus pro μ numeros integros 1, 2, 3 etc., quo facto patebit pro $\mu = 1$, ν tres adipiſci poſſe valores, vt aequatio fiat quadratica vel ad quadraticam facile deprimenda, erit ſcilicet ν vel $= 2$, quo caſu $\text{coſ.}\, z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vel $\nu = 3$, vnde oritur aequatio

$$\sqrt{3} = 4\, \text{coſ.}\, z^2 - 1, \text{ ſeu } \text{coſ.}\, z^2 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, \text{ vel } \nu = 5,$$

ex quo fit

$$\sqrt{5} = 16\, \text{coſ.}\, z^4 - 3.\, 4\, \text{coſ.}\, z^2 + 1,$$

aequatio biquadratica ſed quae ad quadraticam facile depri-

deprimitur. Si μ ponatur $= 2$, vnicus habetur valor ipſius ν ſcilicet $= 3$, vnde prodit aequatio quadratica

$$2\sqrt{3}.\operatorname{coſ}.z = 4\sqrt{2}.\operatorname{coſ}.z^2 - \sqrt{2}.$$

Denique pro $\mu = 3$, prodit $\nu = 5$ vt aequatio fiat biquadratica, ad quadraticam deprimenda:

$$4\sqrt{5}.\operatorname{coſ}.z^2 - \sqrt{5} = 16\sqrt{3}\operatorname{coſ}.z^4 - 3.4\sqrt{3}.\operatorname{coſ}.z^2 + \sqrt{3}.$$

Si alia ſupponatur ratio inter μ et ν conſtructio lunularum ad altiores locos Geometricos aſſurgit, quae tamen ſemper haberi debet pro Geometrica ſi μ et ν inter ſe ſint commenſurabiles.

VII.

De criteriis integrabilitatis formularum differentialium Diſſertatio Secunda.

Auctore A. I. Lexell pag. 171.

Quum in priori de hoc argumento Diſſertatione, Tomo XV. Nov. Comment. inſerta nulla allata ſint exempla, quibus vſus et applicatio doctrinae de criteriis integrabilitatis illuſtrari poſſet, Cl. Auctor in praeſenti diſſertatione huiusmodi defectum ſupplere conſtituit, in anteceſſum autem varia praemittere ipſi e re viſum eſt, quae ad ea aut ſtabilienda aut vlterius explicanda, quae in priori Diſſerta-

ſertatione tradita ſunt, neceſſaria eſſe poterunt. Et primum quidem multo exactiorem heic proponere conſtituit demonſtrationem inſignis iſtius Theorematis *Euleriani*, quod ipſum quaſi fundamentum totius huius doctrinae cenſeri poteſt, quam quae in priori Diſſertatione occurrit, et de qua obſeruat, eam haud leuibus dubiis eſſe obnoxiam, quum contra haec iam allata ſummum prae ſe ferat rigorem. Deinde formulas recenſet, quae integrabiles eſſe debent, vt formulae $dx\int V dx$ vel $dx\int dx\int V dx$ integrabiles fiant. Porro cum in priori diſſertatione conditiones quidem expoſuiſſet, quibus integrabilitas formulae differentialis duplicatae $\int\int V dx dy$ continetur, iam quoque tradidit conditiones quae locum habere debent, vt huiusmodi formula duplicata bis vel ter etc. ſit integrabilis, hoc eſt vt $\int\int dx dy \int\int V dx dy$ vel $\int\int dx dy \int\int dx dy \int\int V dx dy$ vera ſint integralia, quae regulae maximam habere poſſunt vtilitatem, quando disquirendum, an huiusmodi formula differentialis duplicata integrale finitum admittat. Et hinc quidem iam facile concluditur, quomodo eiusdem generis conditiones detegi poſſint, pro formulis differentialibus triplicatis, vel adeo complicatioribus. Quod autem imprimis ſpectat ea exempla, quae ad doctrinam de criteriis integrabilitatis illuſtrandam heic allata ſunt, in iis proponendis ita verſatus eſt Cl. Auctor, vt primum eiusmodi adducat formulas differentiales duarum variabilium x, y, quae per ſe integrabiles ſunt, deinde progrediatur ad formulas differentiales quae licet per ſe integrabiles non ſint,

certo

certo tamen multiplicatore adhibito ad integrabilitatem perduci poſſint, pro huiusmodi enim caſibus vſus doctrinae de criteriis integrabilitatis inſignis eſſe ſolet, ad hos multiplicatores detegendos. Et hinc quidem occaſionem nactus eſt, generaliter demonſtrandi formulam differentialem homogeneam $R\,dx + S\,dy$ fieri integrabilem, ſi diuidatur per $Rx + Sy$. Deinde formulae proponuntur differentiales, quae tres variabiles x, y, z inuoluunt, quae iterum duplicis generis ſunt, aut per ſe integrabiles, aut quae in certum multiplicatorem ductae ad integrabilitatem perducuntur. Ex poſteriori genere variae heic conſiderantur formulae differentiales homogeneae, pro quibus multiplicatores idonei eas ad integrabilitatem perducentes inueſtigantur, tum vero demum generaliter demonſtratur formulam differentialem homogeneam quamcunque primi gradus

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + V\,dv \text{ etc.}$$

fieri integrabilem ſi diuidatur per

$$Xx + Yy + Zz + Vv,$$

quod tamen tantum ſub ea conditione valet, quod haec formula ſit poſſibilis, nam quemadmodum quaecunque formula differentialis binas variabiles inuolvens $R\,dx + S\,dy$, ſemper ſit realis, ita contra pro formulis differentialibus tres vel plures variabiles inuoluentibus tenendum eſt, eas non ſemper eſſe poſſibiles ſed certam praeſcribi conditionem ex qua de earum realitate judicium ferre licet. Quoties autem

tem huiusmodi formulae differentiales homogeneae fuerint poſſibiles, toties integrabiles euadent, ſi diuidantur per formulam ſupra allatam. Exempla autem formularum differentialium duplicatarum, quae heic quoque adferre in animum induxerat Cl. Auctor, ſententia mutata in aliam occaſionem reſeruare ſatius duxit.

VIII.

Demonſtratio Theorematis Analytici a Cel. *la Grange* inuenti.

Auctore A. I. Lexell pag. 230.

Dum Cel. *la Grange* in Tomo XXIV. Actorum Academiae Scientiarum Berolinenſis in modum inquireret, quo cuiuscunque aequationis algebraicae radices per ſeries exprimi poſſint, ad elegantiſſimum deuenit Theorema, quo forma vniuscuiusque radicis exprimitur, inuenit enim quod ſi ſit $t - x + \Phi x = 0$, vbi t et x ſunt binae variabiles et Φx functio quaecunque ipſius x, eſſe debere:

$$\psi x = \psi t + \Phi t . \psi' t + \frac{d . \Phi t^2 \psi' t}{1 . 2\, dt} + \frac{dd . \Phi t^3 . \psi' t}{1 . 2 . 3\, dt^2} + \frac{d^3 . \Phi t^4 \psi' t}{1 . 2 . 3 . 4\, dt^3} + \text{etc.}$$

Quum vero ratiocinium quo Cel. *la Grange* ad hoc Theorema perductus ſit, non niſi pro inductione admodum particulari haberi queat, ipſumque Theorema

ma ſit generaliſſimum, adeo vt non ſolum locum habeat quando Φx eſt functio algebraica ipſius x, ſed etiam pro quibuscunque functionibus tranſcendentibus; hinc Cl. huius diſſertationis Auctor operae pretium duxit in generalem et latiſſime patentem eius demonſtrationem inquirere. Hac autem demonſtratione tradita, Theorematis vſum adhuc generaliorem eſſe oſtendit, adeo vt eius ope non ſolum functio quaecunque ipſius x, ſed adeo functio binarum variabilium x et t exhiberi queat. Deinde vero Theorema adhuc multo latius extenditur, ſi fuerit $t - x + P = o$, vbi P deſignat quantitatem quomodocunque ex x et t conflatam, pro hoc enim caſu non ſolum quaeuis functio ipſius x, ſed etiam functio quaecunque binarum variabilium x et t, per ſolam t ſatis concinne exhiberi poteſt, quod etiam viciſſim valere de functionibus ipſius t, vel ipſarum x et t, per x exprimendis per ſe euidens eſt. Vt demum de vſu huius Theorematis aliqua conſtarent Cl. Auctor eius adplicationem commonſtrauit, ad exprimendas aequationum algebraicarum radices per ſeries, vbi tamen id obſeruat, has ſeries ſaepius non fieri conuergentes ideoque radices aequationis non exhibere, neque criterium conſtare ex quo demonſtrari poſſit pro vniuscuiusque aequationis algebraicae radicibus, tot exhiberi poſſe ſeries conuergentes, quot radices illa habuerit reales. Porro quum Φx quascunque functiones tranſcendentes inuoluere poſſit, huius Theorematis applicatio ad huiusmodi caſus

 quo-

quoque ſe extendit, ex quo genere notiſſimum eſt Problema *Keplerianum* pro quo ſcilicet habetur $t = x + n \text{ Sin. } x$, hincque variae deduci poſſunt expreſſiones pro determinando angulo x ope anguli t, non ſolum enim ipſe hic angulus x ſed etiam eius ſinus vel coſinus, vel Tangens ſatis concinne per t exprimi poteſt, vbi tamen et obſeruari meretur expreſſiones hinc deductas, raro adeo fieri conuergentes, vt cum vſu in Aſtronomia adhiberi poſſent.

PHY-

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

De Vibrationibus chordarum, ex duabus partibus tam longitudine quam craſſitie ab inuicem diuerſis compoſitarum.

Auctore Daniele Bernoulli pag. 257.

Theoria de motu chordarum vibratorio quanquam dudum eſt a ſummis Geometris omni ſtudio pertractata, ita tamen reconditis et abſtruſis disquiſitionibus implicatur, vt iis euoluendis et extricandis mathematicorum adeo principes ingenii ſui acumen etiamnum adplicare operae omnino pretium arbitrentur. Neque vero ſolum ipſa ſua natura ſingulari attentione digna eſt iſta quaeſtio, ſed eam quoque ob cauſſam ſummi momenti reputanda, quod a cognitione naturae minimorum iſtorum motuum tremulorum primaria totius Acuſtices fundamenta deriuantur, id quod Illuſtres Geometrae, *Dan. Bernoulli* et *Leon. Eulerus* in variis huius argumenti diſſertationibus de ſono inſtrumentorum muſicorum, tibiarum varii generis, tympanorum, vt et campanarum,

narum, ſummo ingenio docuerunt. In praeſenti tractatione quo magis lectores ſuos ad perſpiciendas meditationes ſuas adcommodet quaſi et praeparet Ill. Auctor, praecipua theoremata theoriae communis de chordis vibrantibus tota ſua longitudine vniformibus paſſim demonſtratae praemittit; atque hoc modo viam ſternit ad indagandam naturam motus vibratorii chordarum ex duabus partibus conſtructarum et longitudine et craſſitie inaequalibus.

Principio autem caſum aliquem ſimpliciorem Ill. Auctor contemplatur, chordam ſcilicet vniformiter grauem, ſed connexam cum filo omni grauitate deſtituto; quale quidem etſi actu in rerum natura nullibi datur, iſtius tamen caſus imaginarii euolutio haud parum confert ad explicationem argumenti primarii, vbi ſcilicet in fili illius grauitate carentis locum alius chordae portio, ſuo quoque pondere donata et cum priori connexa ſubſtituitur. Ad ſonos a vibrationibus chordae eiusmodi compoſitae oriundos quod attinet, ii quidem, ſi binae partes nodo alioue ſimili modo connecterentur, nimis rauci forent, quam vt ſonis muſicis annumerari poſſent; alio autem exemplo optime dilucidat Ill. Auctor argumentum ſuum a fidibus, quibus muſici vtuntur, petito, filo metallico ad augendam grauitatem ſoni inuolutis; quarum, quid obſtat? quin fingi poſſint tales ſpecies, vbi chordae certa tantum pars filo metallico eſt implicata, parte reliqua manente nuda.

Hanc

Hanc itaque quaeſtionem maxime memorabilem Ill. Auctor ita pertractat, vt omnes et ſingulas vibrationum ſpecies pro eiusmodi chordis determinet ſimulque in valores inquirat ſonorum iſtis motuum vibratoriorum ſpeciebus debitorum.

Sub finem diſſertationis ſuae Ill. Auctor alius quoque modi mentionem facit, quo in chorda aliqua vibrante lex continuitatis interrumpi poteſt, ſi ſcilicet ea quidem tota ſua longitudine ſit vniformis, ſed in puncto quodam arbitrario annexum habeat ponduſculum; cuius quidem caſus euolutio motusque vibratorii pro tali chorda determinatio Geometrarum attentionem vtique eſt mereri exiſtimanda.

II.

Sectio quarta de motu Aeris in Tubis.

Auctore L. Eulero pag. 281.

Tractatus hydrodynamici, quem per partes his Commentariis inſeruimus, ab Ill. *Eulero* conſcripti quarta, quae hic ſiſtitur ſectio, adhuc ad theoriam de motu fluidorum lineari, iam in tertia ſectione tractari coeptam, pertinet. Huius ſcilicet argumenti primariam diuiſionem Ill. Auctor a fluidorum diuerſa indole, quatenus eorum denſitas vel

conſtans vel variabilis eſt, commodiſſime repetendam ſtatuit omnemque fluidorum diuerſitatem hoc intuitu ad duas ſpecies, aquae et aëris, reuocauit.

Expedita itaque in praecedente ſectione tota de motu aquae lineari doctrina; hic ad alteram fluidorum ſpeciem, elaſticorum nempe, generali aëris nomine contentorum, progreditur. At vero etiam hic variatio amplitudinis tuborum tantopere iſtos calculos omnesque argumenti tractationem adficit, vt eius peculiaris ratio fuerit habenda. Hanc ob rem Ill. Auctor in tribus prioribus capitibus motum aëris non, niſi in tubis *aequaliter amplis* contemplatur. Statim vero, quantis difficultatibus implicata ſit determinatio motus aëris, vel primo tentamine Ill. Auctor oſtendit, dum ſcilicet caſum ſimpliciſſimum, quo aër eodem vbique caloris gradu praeditus in tubo aequaliter amplo, remoto adeo grauitatis effectu, moueri concipitur, ad aequationem quidem differentialem ſecundi gradus perducere licuit, ſed talem, cuius reſolutio nullo conſuetae Analyſeos artificio expediri poteſt. Commodiſſime tamen hac in re vſu venit, vt iſta aequatio felici ſucceſſu ad aëris agitationes *minimas*, vbi ſcilicet ſingulae particulae non niſi quam minime a loco initiali recedunt, accommodari poſſit; quo igitur praeſuppoſito, ſi in ſtatu initiali pro quouis tubi loco aëris tam denſitas quam celeritas ſit data, ad quoduis elapſum tempus ſtatum et motum aëris in tubo Ill. Auctor in primo capite definire docet.

Quan-

Quanquam vero iam hic inficias ire non licet, ſolutionem iſtam adeo non eſſe generalem, vt potius vltra ſpeciem motus quam maxime particularem nullo modo pateat: tamen hoc non obſtat, quin ea in pluribus ſummi momenti disquiſitionibus phyſicis vſum praeſtet ampliſſimum; id quod in ſequentibus ipſe Ill. Vir inſignibus exemplis comprobat; dum ſcilicet in ſecundo capite theoriam ſuam ad doctrinam de propagatione ſoni adplicat, a Geometrarum nullo, ſi a Cel. *La Grangio* diſceſſeris, felici ſatis ſucceſſu pertractatam. Hoc igitur grauiſſimum argumentum Ill. Auctor pro tubis aequaliter amplis ita expedit, vt, ſi in iis pulſus alicubi in ſpatio minimo fuerit excitatus, quo aër vtcunque a ſtatu aequilibrii receſſerit, huius agitationis minimae propagationem ad quoduis tempus definire doceat et quidem 1°. ſi tubus fuerit vtrinque in infinitum extenſus 2°. ab vna parte in infinitum extenſus ab altera vero vel clauſus vel apertus 3°. vtrinque apertus 4°. denique ab vna parte apertus, ab altera vero clauſus. Alterum phaenomenon, cui explicando Ill. Auctor theoriae ſuae principia hactenus tradita adplicat, et in quo a naturae ſcrutatoribus vix quidquam praeſtitum eſt, in ſono, quem tibiae edunt inflatae, eiusque explicatione verſatur. Dudum quidem Ill. Auctor elegantem ſimilitudinem inter naturam eiusmodi ſoni et leges chordarum vibrantium detexit; nullo autem modo ipſi eo vsque progredi licuit, vt ipſam aëris agitationem, qua iſti ſoni generantur, calculis definire potuerit: Iam vero in capite

capite tertio abſtruſum hoc argumentum Ill. Auctor ope theoriae ſuae tam felici ſucceſſu perſequitur, vt omnes iſtos motus aëris oſcillatorios in tubis aequaliter amplis determinare ſonosque tibiarum varii generis, ſiue ſint vtrinque ſiue ab vna parte tantum apertae, ſiue etiam vtrinque clauſae, dilucide explicare eorumque leges ex genuinis principiis, conſentiente experientia, deriuare poſſit. Hic vero, vbi theoriam cum experimentis comparare quis velit, id probe perpendi neceſſe eſt, in omni illo calculo latera tubi tanto rigore praedita aſſumi, vt nullius plane impreſſionis et agitationis ſint capacia; quam conditionem cum praxis perfecte non admittat, experientiam tamen eo minus a theoria, quo durior fuerit tubi materia, diſcrepaturam, dubitari non poteſt.

His abſolutis Ill. Auctor ad tubos *inaequaliter amplos* progreditur; quae quidem inueſtigatio multo pluribus, quam praecedens, obſtaculis et difficultatibus premitur. In capite igitur quarto ante omnia motus aëris in tubo inaequaliter amplo ad formulas analyticas reuocatur, quae vero cum ob defectum Analyſeos reſolui non queant, tantum ad agitationes aëris *minimas* adcommodantur. Neque vero etiam admiſſa hac reſtrictione, generalis obtenta eſt reſolutio; quanquam enim ſingularibus artificiis continuo plures reperiantur tuborum figurae, in quibus aëris agitationes minimas definire licet; infinite tamen multae tuborum figurae locum hic prorſus non inue-

inueniunt, pro quibus etiamnum motus aëris determinari non poteſt. Ex eorum igitur tuborum claſſe, quorum figuris principia theoriae hactenus traditae adcommodari licuit, Illuſtr. Auctor ſpecies aliquot ſimpliciſſimas examini peculiari ſubiicit; atque hunc in finem in capite quinto aëris agitationes minimas in tubis figuram conoidicam hyperbolicam habentibus inueſtigat, in quibus motus iſti tremuli, modo ſint minimi, perinde ac in tubis aequaliter amplis, licet calculo paululum operoſiore, definiri poſſunt. Poſt hos deinceps in capite ſexto. Ill. Auctor eadem methodo circa tubos figurae *conicae* verſatur; cuius argumenti euolutio etiam eam ob cauſſam notatu quam maxime digna eſt, quod inde colligere licet, qua ratione pulſus quicunque in libero aëre quaquauerſum propagetur, ſi quidem vniuerſum aërem circumfluum circa centrum quaſi pulſus in infinite multos conos, quorum vertices in iſto centro concurrant, diſtributum concipere licet.

III.

De Perturbatione motus Terrae ab actione Veneris oriunda.

Auctore L. Eulero pag. 426.

Quum ex doctrina grauitatis *Newtoniana* ſequatur, omnia corpora coeleſtia mutua et reciproca inter ſe affici actione, inde quoque intelligitur Plane-

tam quemcunque primarium qui ſi ſola vi verſus Solem attrahente ageretur, ellipſem circa Solem deſcriberet, accedente actione reliquorum Planetarum, ab hoc motu regulari et elliptico multum deturbari. Res igitur eſt in Aſtronomia maximi momenti, has perturbationes et inaequalitates in motibus Planetarum ex actione eorum mutua oriundas perſpicue definire et explicare, quamobrem etiam ſummi noſtri aeui Geometrae *Clairaltius*, *d'Alembertus* et imprimis Illuſtr. huius diſſertationis Auctor in perturbationibus his definiendis, inſignem collocarunt operam. Quod autem imprimis motum Telluris noſtrae attinet, notum eſt, eum praeter vim principalem, qua verſus Solem agitatur, actionibus Iouis, Veneris et Lunae admodum ſenſibiliter adfici. In praeſenti igitur Diſſertatione Illuſtr. *Eulerus* perturbationem motus Terrae ab actione Veneris oriundam examini ſubiicere operae pretium duxit, idque eo maiori cum iure, quod in hac inaequalitate definienda ſecundum conſuetas in huiusmodi operationibus Methodos procedere non liceat. Scilicet in formulis iſtis quae pro actione Veneris in Terram inueniuntur, quum duplicis generis occurrant termini, alii quos diſtantia Veneris a Sole ingreditur, alii vero in quibus diſtantia Veneris a Terra reperitur, vtraque horum terminorum ſpecies ſingularem meretur conſiderationem. Prior enim, quam Illuſt. Auctor partem actionis Veneris Solarem nominauit, ita comparata eſt, vt ſiue tantum ad motum medium Veneris reſpiciatur ſeu etiam excentrici-

citatis ratio habeatur, ſatis commode per ſeriem conuergentem exprimi queat. Cum poſteriori autem, quae heic pars terreſtris actionis Veneris dicitur, res longe aliter ſe habet, ſcilicet quum formulam irrationalem quam diſtantia Veneris a Terra ingreditur, nullo modo in ſeriem conuergentem reſoluere liceat, omnia integralia, in quibus expreſſio huius diſtantiae reperitur mechanice tantum definienda ſunt, quod etiam heic pro ſingulis 5 gradibus elongationis mediae Veneris a Terra praeſtitum eſt. Valoribus autem horum integralium definitis, ſi parti terreſtri actionis Veneris addatur pars Solaris, facile tota perturbatio ab actione Veneris orta definitur, quam igitur Illuſtr. Auctor in Tabella ad finem diſſertationis ſubnexa repraeſentat. Si haec Tabula conferatur cum ea, quam adfert Celeb. *de la Caille* in Tabulis ſuis Solaribus, inſignis inter eas reperietur diſcrepantia, in Tabula ſcilicet Dni *de la Caille*, a o Sig. vsque ad II Sig. 3°. expreſſio pro actione Veneris eſt negatiua, et maximum eius reperitur circa I Sig. 1°. vbi eſt = − 5, 6; a II Sig. 3°. vero vsque ad VI Sig. perturbatio haec poſitiua ſtatuitur, et maximum adipiſcitur valorem circa IV Sig. 3°. ſcilicet + 15″, 2. In Tabula praeſenti per ſex ſigna praecedentia perturbatio eſt negatiua et maximum induit valorem circa II Sig. 10°. vbi eſt = − 22″, 3. Liquet igitur hinc maximum diſcrimen quod inter hanc Tabulam et eam Dni *de la Caille* oritur vsque ad 30″ aſſurgere, quae differentia in loco Solis definiendo certe pro inſigni habenda eſt.

 PHYSICA.

PHYSICA.

I.

De Corde Leonis.

Auctore C. F. Wolff pag. 471.

Solum cor leonis, quoad ſingularia, quae in eo occurrunt, anatomice deſcribitur. Deinde effectus, quos ſingularis illa ſtructura in functionibus cordis producit, qui notabiles ſunt, et ipſam quoque corporis humani phyſiologiam illuſtrant, explicantur.

Pericardium in hoc animali plenum ſpiſſo cruore et adeo diſtentum inueniebatur, vt maximam partem cauitatis thoracis, quae multum ſanguinem itidem continebat, repleret. Ventriculi contra et auriculae cordis vacuae erant. Haec ergo omnino cauſa mortis fuit; cum neque cor ſe dilatare, neque cerebro ſufficiens, (quae ad ſuſtinendas actiones animales et vitales in eo continuo requiritur,) copia ſanguinis ſuppeditari potuerit.

Quae circa figuram cordis leonini, eiusque ſtructuram internam et partes, auriculas, ſeptum, ventriculos, orificia eorundem et valuulas, hiſce praefixas, columnasque carneas, notabilia occurrunt, ea in ipſa Diſſertatione legenda ſunt. Praecipuae tantum-

tantummodo obſeruationis mentionem faciemus, quae in oeconomiam vitalem maximum ſibi influxum vindicat, et vnde patebit, quo vsque in variis animalibus actiones vitales variare poſſint. Leoni cor datum eſt, pro mole corporis paruum, ſed ventriculis inſtructum praegrandibus; vnde parietes eiusdem aeque ac ſeptum, ſi ad alia animalia comparantur, mire tenues ſunt. Hoc hactenus etiam a *Pariſinis Scriptoribus* iam obſeruatum et pro rei dignitate traditum fuit (videantur, quae in hac Diſſ. pag. 477 et 478. deinde quae pag. 491. dicta ſunt). Sed, quod magis forte attentionem Anatomici meretur, quodque minus ab aliis obſeruatum fuit, illud eſt, quod trunci arteriarum, quae ex ventriculis oriuntur, quemadmodum ventriculi ipſi proportione aliorum animalium magni ſunt, parui potius exiſtant proportione eadem, et quod rami earum arteriarum ſimili modo decreſcere pergant. Nam, ſi arteriae leonis ad arterias aliorum animalium in eadem ratione iterum eſſent, vti ventriculi cordis ſunt, quod tamen veriſimile videri potuiſſet, nihil eo mutaretur in motu ſanguinis. Maſſa ſanguinis maior per vaſa maiora ſimili modo in leone quam in aliis animalibus moueretur. Quo magis autem ratio arteriarum leonis ad aliorum animalium arterias ſucceſſiue decreſcit; eo magis quoque celeritas, qua ſanguis in leone mouetur, celeritatem ſuperabit, qua idem in aliis animalibus propellitur. Haec itaque vt accuratius definiri et aeſtimari poſſint, ventriculos cordis et arterias praecipuas maiores in leo-

ne et in homine, aliiſque in animalibus metitus eſt Clar. Auctor, ventriculoſque cum magnitudine cordis, arterias vero cum ventriculis eorundem animalium comparauit, vnde apparuit, quantum in leone ventriculi proportione cordis totius maiores, arteriae vero proportione ventriculorum minores ſint quam in aliis animalibus. Media cordis humani longitudo 4 pollicum et 10 linearum, circumferentia tranſuerſalis autem 10 pollicum eſt. Ventriculus dexter pro hac cordis magnitudine longitudine gaudet 3 poll. 8 lin. et circumferentia 5. poll. 4 lin. In corde leonis igitur, cum eius longitudo ſit 5 poll. 3 lin. et circumferentia 11 poll. 4 lin. ventriculus dexter, ſiquidem iſte nunc ad cor eandem quam in homine rationem haberet, longitudine eſſe deberet 3 poll. 10 lin. et circumferentia 6 poll. Sed inuenitur longitudine 4 poll. 7 lin. et circumferentia 9 poll. 6 lin. Adeoque ventriculus dexter in leone quinta fere parte proportione cordis longior quam in homine, et plus quam tertia parte amplior eſt. Ne vero haec differentia, quae ſane notabilis eſt, paruitati potius ventriculi cordis humani, quam magnitudini leonini adſcribenda eſſe videatur, ventriculus humanus porro cum felino et vitulino comparatus eſt. Felino ventriculo proportione corculi ſui ad normam humanam longitudo eſſe debuiſſet 12 lin. et amplitudo $15\frac{1}{2}$ lin. Sed illa nonniſi 10 lin. haec tantummodo $11\frac{1}{3}$ lin. inventa fuit Vitulinus, qui longitudine 3 poll. $\frac{3}{7}$ lin. et amplitudine 4 poll. $3\frac{1}{3}$ lin. eſſe debuiſſet, nonniſi

niſi 2 poll. 1 lin. longus et 3 poll. 10 lin. amplus inueniebatur, vnde patet, in his animalibus ventriculum etiam humano minorem, nec ergo periculum errandi eſſe, ſi magnitudo ventriculorum leonis ex comparatione ventriculorum hominis diiudicatur. Ventriculus cordis ſiniſter in leone proportione cordis eſſe debuiſſet longitudine 3 poll. $7\frac{1}{2}$ lin. et ambitu 4 poll. $4\frac{1}{8}$ lin. Sed obſeruatus eſt longitudine 5 poll. et ambitu 8 poll. 2 lin. Proinde iſte ventriculus in leone plus quam quarta parte ſolito longior et duplo fere amplior eſt. In fele nempe et vitulo menſurae itidem humanis, quibus cum leoninae comparatae ſunt, minores fuere, excepta ſola circumferentia in corde vitulino, quae paullulo humana maior fuit. Pro hac enormi ventriculorum magnitudine fieri non potuit, quin et mire tenuis ſit ſubſtantia carnea, qua cor efficitur. Paries ventriculi ſiniſtri in corde vitulino et felino duplo fere craſſior eſt quam idem paries eodem in loco in corde humano. At iſte paries humanus tamen eſt ad leoninum vt $9\frac{2}{3} : 5$.

De magnitudine arteriarum vltima modo reſultata repetemus. Ambitus trunci aortae proportione ventriculi ſui in leone fere dimidio quam in homine minor eſt. Nimirum ante ramos maiores editos maximam partem leonis aorta ad humanam eſt vti $1 : (2 - \frac{1}{7}.)$. Sed hoc magno decremento non obſtante tamen aorta poſt ramos maiores illos editos adhuc porro erga hominis aortam decreſcit, ea-

que

que multo plus quam dimidio minor euadit. Nam vbi ad columnam vertebrarum ſe applicat, antequam primam intercoſtalem arteriam ediderit, ad humanam eſt vti 1 : $2\frac{1}{4}$, prope diaphragma autem vti 1 : $2\frac{5}{8}$. Idemque de caeteris trunci aortae ramis valet. Arteria ſubclauia dextra ad eandem hominis arteriam eſt vti 1 : $2\frac{1}{8}$. Subclauia ſiniſtra vti 1 : $2\frac{1}{3}$ et carotides adeo fere ſunt vti 1 : 3. Neque aliter comparatum eſt cum arteriis pulmonalibus. Truncus arteriarum pulmonalium ad eundem truncum in homine proportione ventriculi ſui dextri ſe habet vti 1 : $1\frac{3}{5}$. Sed eius ramus dexter vti 1 : 2 et ſiniſter vti 1 : $2\frac{1}{3}$. Probabile igitur eſt, idem vaſorum decrementum continuatum iri porro per ſuccedentes ramificationes, adeo, vt in ordinibus vltimis, veluti in decimo quinto, vel ſexto, vaſcula decuplo quoque circiter in ambitu ſuo humanis proportione ventriculi ſiniſtri minora ſint.

Hinc facile colligitur, quanto celeritas motus ſanguinis in leone maior ſit quam in homine et in aliis animalibus. Etiamſi in calculo multa largiamur; (nam in imminuendis potius, quam in augendis mirabilibus Auctor peccare voluit) ſanguis tamen quamprimum ex corde erumpit, et in ea parte Aortae, quae citra ramos eſt, quadruplo iam celerius in leone quam in homine et in aliis animalibus quadrupedibus mouebitur; noncuplo autem in ramis ſecundi vel tertii ordinis, quorum, veluti carotidum, peripheriae triplo et lumina igitur non

cuplo

cuplo quam in homine minora ſunt; denique centuplo celerius in ramis decimis quintis, quorum peripheriae decuplo et lumina centuplo in leone minora ſunt quam in homine.

Quum ſanguinis motum in homine ob lumina ramorum, qui ex trunco quouis oriuntur, coniuncta ſemper multo maiora lumine trunci, continuo retardari notum ſit, prout ſanguis ſucceſſiue per ſyſtema arteriarum progreditur; eaque retardatio ſecundum calculos, a Celeberrimis Phyſiologis inſtitutos enormis fere euadat; (KEILIVS celeritatem, qua in vltimis arteriolis ſanguis mouetur, ad eam, qua per aortam propellitur, paſſim ſe habere inuenit vt 1 : 44307. vid. *Perill.* HALL. *El. Phyſ. Tom II. p.* 174.) non minus mirum forte videbitur, ſi pericula docuerint, in leone retardationem nullam fieri, ſed potius accelerari ſanguinem prouti per arterias progreditur. Nam iſtaec retardatio tanta cum ſit in homine; crediddiſſes, eam neceſſariam eſſe ad vitam animalis. Quum ergo non ſit, ſequitur, aliam et peculiarem cauſam eſſe debere, cur tanta ſit in homine. Sic alia alia illuſtrant. Ratio ſummae luminum ramorum, qui ex trunco aortae oriuntur, aortae nempe dorſalis, ſubclauiae vtriusque et corotidis vtriusque ad lumen trunci aortae in leone eſt vt $94\frac{3}{4} : 147$ vel vt $1 : (1\frac{1}{2} + \frac{1}{19})$. Ratio ſummae luminum ramorum pulmonalium, dextri nempe et ſiniſtri ad lumen trunci pulmonalis eſt vt $88\frac{1}{3} : 133\frac{1}{3}$, quae eſt $1 : (1\frac{1}{2} +$ circiter $\frac{1}{95})$.

 Vnde

Vnde patet, non modo retardationem nullam, ſed magnam potius accelerationem ſanguini leonis contingere, dum ex trunco aortae, vel etiam arteriarum pulmonalium in ramos eorum ingreditur.

Haec tandem incredibilis fere celeritas ſanguinis influxum quoque habere videtur in naturam et attributa leonis. Robur non modo corporis quoad partem et agilitatem huius animalis, ſed audaciam quoque et atrocitatem inde deriuat Clar. Auctor, quod quo pacto quibusue argumentis fiat, in ipſa Diſſertatione legi meretur.

II.

Obſeruationes ſplanchnologicae ad Acipenſeris Rutheni *Linn.* anatomen ſpectantes.

Auctore I. T. Koelreuter pag. 511.

Quanquam ea, quae in hac Diſſertatione de ſtructura interna *Acipenſeris rutheni* traduntur, eius indolis non ſint, vt oeconomia vitalis piſcium iis aliqua ratione illuſtrari, vel phyſiologia incrementum inde aliquod capere poſſit, (ſunt nempe merae partium abdominalium deſcriptiones Zootomicae), tamen non ingrata fore ſperauimus cultoribus ſcientiae

tiae naturalis, qui quippe in condendis animalium characteribus nonnunquam etiam interiori partium conformatione vtuntur; atque in hunc finem imprimis hae deſcriptiones inſeruire poſſe videntur. Hepar primum conſideratur. Agitur de eius colore, figura, diuiſione in duodecim lobos, qui omnes ſecundum figuram, quae ſingulis diuerſa et irregularis eſt, prolixe deſcribuntur. Caeterum nihil in his occurrit, quod ſe diſtinguat, vel quod notabile ſit. Veſiculae felleae deinde et ductus cyſtici mentio fit, in quibus nihil inſoliti eſt. Oeſophagi pars prior intus glabra, ea autem, quae propior ventriculo, papillis in ſuperficie interiori obſita eſt. Ventriculus ipſe figura ouatus, caeterum carnoſus, craſſus et durus eſt et ventriculo auium graniuorarum ſimilis. Duodenum teres, itidem durum. Pancreas figura reniformi gaudet, idemque diſſectum etiam intus ſtructuram monſtrat renum ſtructurae quodammodo ſimilem. Subſtantia ſcilicet exteriori corticali duriori, coloreque diſtincta et interiori molliori praeditum eſt, illaque radiatim quaſi ex peripheria verſus centrum producitur. His viſcerum abdominalium deſcriptionibus figuras cordis Clar. Auctor adiunxit.

III.

De Hermaphrodito ad ſexum virilem pertinente.

Auctore I. Lepechin pag. 525.

Egregiae obſeruationes ſunt, et quae non poſſunt non gratiſſimae eſſe phyſiologis, quas Clar. Auctor in hac Diſſertatione Academiae communicavit. Si nihil aliud per hermaphroditum intellexeris, quam hominem, qui inter naturam femineam et maſculam vere ambigit, hic certe, quem deſcriptum tenemus, hermaphroditus fuit. Hoc ſolo reſpectu ei, vt caeteris hactenus in ſcenam productis, nomen illud denegari poterit, ſi hominem poſtules, qui officio vtroque, femineo et maſculo pro lubitu in negotio generationis fungi poſſit. Hoc enim reſpectu mas ille fuit, ſed tamen probe diſtinguendus non modo a feminis illis quae ob ſolam maiorem clitoridem, membrum virile mentientem, immerito et ſine vlla cauſa pro hermaphroditis habitae fuerunt, ſed etiam a maribus, quorum teſticuli in abdomine retenti aliquam ouariorum ſpeciem retulerunt. Scrotum noſtro homini longitudinaliter diuiſum erat in duos ſacculos oblongos, rima profunda diſtinctos, quorum quisque ſuum teſticulum interdum continebat, et qui extremitate ſua anteriori ſupra baſin penis coniungebantur, adeo, vt ſacculi labia maiora

maiora vuluae, rima hanc ipſam et penis, ſolito breuior, a labiis incluſus, clitoridem ad amuſſim referret. Sed iſte penis imperforatus quoque et loco vrethrae nonniſi ſulco longitudinali inſtructus erat, cum vrethra iam ſub radice penis intra labia terminaretur. Quid ergo obſtat, quo minus pro vera clitoride habeatur haec pars, quae neque ſpecie externa, neque ſtructura membrum virile ſed omni reſpectu clitoridem refert. His notis ſexus feminini accedunt facies imberbis! vox feminea! (nam hominem nonniſi viuum obſeruare licuit,) et tandem mammae muliebres, turgidae, papillis craſſioribus, areola cinctis, inſtructae! Recte monuit Clar. Auctor non caſu haec omnia accidiſſe. Nam inter ipſas cauſas formatrices, quaecunque hae fuerint, et quantumcunque easdem nos latere velis, tamen aliquid fuiſſe, quod ad fingendam feminam requiritur, vel aliquid deſuiſſe, quod ad producendum marem neceſſarium eſt, res ipſa loquitur, confirmatque obſeruatio, quam Clar. Auctor addit duorum fratrum, qui hermaphrodito noſtro fuere, et quibus ambobus eadem partium genitalium conformatio, idemque muliebris habitus erat. Neque autem veriſimile eſt, praedelineata fuiſſe primordia horum hominum in ouis maternis. Nam aut feminae aut mares perfecti, non homines dubii, praedelineati fuiſſent, acque minus ac monſtra illa, quae, poſtquam nata ſunt, perire neceſſe eſt. Caeterum viros tamen eſſe hos hermaphroditos pericula docuerunt. Nam maximus eorum natu vxorem duxit ex eaque liberos genuit.

IV.

Salmo Leucichthys et Cyprinus Chalcoides deſcripti.

Auctore A. I. Gueldenſtaedt pag. 531.

Mare Caſpium, quorſum Clar. huius Diſſertationis Auctor indagandorum naturae productorum cauſa miſſus eſt, piſcibus quidem, eodem referente, omnino abundat, ſed magis tamen individuorum copia, quam varietate ſpecierum ſuperbit. Hae enim ad decades quatuor vix accedunt, maximamque partem Europeae et aquis dulcibus communes ſunt. Plerasque Clar. Auctor recenſet et nonnullas ex Acipenſerum genere, characteribus a capitis partibus deſumtis, determinat. Deinde duas ſpecies producit, quarum altera ad *Salmonum* altera ad *Cyprinorum* genus pertinet, quaeque plane indigenae mari Caſpio et Ichtyologis minus notae ſunt. Salmoni nomen ſpecificum triuiale *Leucichthydis*, Cyprino vero *Chalcoidis* addidit et vtriusque piſcis deſcriptionem concinnauit. Prior vbique per Ruſſiam *Belaia Rybyza*, id eſt *albi piſcis* poſterior vero *Harengi Kislarienſis* nomine venit, vnde nomina triuialia petita. Ille ob maxillas edentulas, inferioremque longiorem facile cum *Salmone Albula* LINNAEI confundi poſſet, quamobrem ſequentes ambarum ſpecierum characteres eſſentiales conſtituti ſunt:

Leu-

Leucichthys erit : Salmo maxillis edentulis inferiore longiore ; radiis membranae branchioſtegae decem. *Albula* autem : Salmo maxillis inferiore longiore, radiis membranae branchioſtegae ſeptem. Hic poſterior, *Cyprinus* nempe *Chalcoides*, a congeneribus ſpeciebus ſequenti charactere diſtingui-tur : Cyprinus pedalis, radiis pinnae ani nouemdecim maxilla inferiore longiore incurua.

V.

Kraſcheninnikouia, nouum plantarum genus.

Auctore A. I. Gueldenſtaedt p. 548.

Nouum hoc plantarum genus, quod Clar. Auctor hic nobis offert, quodque in memoriam Viri meritiſſimi, membri olim Academiae noſtrae, *Kraſcheninnikouiam* appellat, a pluribus quidem Botanicis hactenus viſum et collectum, ſed non ſatis adcurate, vti Clar. Auctor obſeruat, examinatum, neque adeo recte determinatum fuit. TOVRNEFORTIVS primus hanc plantam inuenit in Oriente, eamque *Ceratoidis* ſui generi adiunxit, quod idem *Ceratocarpus* LINNAEI eſt. Deinde STELLERVS eandem in campis ſibiricis reperit ; ſed varie, nunc ad *Bliti*, nunc ad *Camphoratae* genus retulit. Illuſtr. LINNAEVS prius *Vrticam* poſt haec *Axiridem* eandem

dem appellauit, quem etiam GMELINVS in Flora Sibirica ſecutus eſt, adeo tamen, vt ipſe de vero genere adhuc dubius permanſerit. Hos omnes itaque Clar. Auctor non modo in aſſignatione generis ſed eatenus etiam erraſſe exiſtimat, quod generatim ad vnum horum generum, iamiam notorum, inter quae quaſi ambigua ſit, hanc plantam referendam eſſe, vnanimi licet ſenſu, crediderint. Nam novam prorſus, propriique generis illam iudicat, quamuis tamen omnino concedit, multa illi cum Vrtica et plura adhuc cum Ceratocarpo communia eſſe, adeo, vt media quaſi inter dicta haec genera et *Atriplicem* ſit, eaque coniungat. Conſtituit eius characterem genericum, cuius notae praecipue in florum maſculorum *Perianthio* tetraphyllo, perſiſtente; *Corolla* nulla; *Staminum* filamentis quatuor capillaribus, thalamo inſertis, antherisque ſubrotundis didymis; in florum femineorum *Perianthio* monophyllo *Corolla* nulla *Germine* ouato ſupero, *Stylo* ſimplici, *Stigmatibus* duobus capillaribus reflexis, *Pericarpii* calyce dilatato, ſemen vndique tegente; *Semineque* vnico, ouato-compreſſo conſiſtunt. Et cum characterem Ceratocarpi, quocum magna Kraſcheninnikouiae ſimilitudo eſt, hactenus notum aeque erroneum inuenerit, correctiorem reddit. Denique deſcriptionem plantae, quae noui generis eſt, addit, ſpeciemque eiusdem, quam *Ceratoidem* triviali nomine vocat, determinat.

VI.

VI.

Koelreuteria, nouum plantarum genus.

Auctore E. Laxmann pag. 561.

Diu iam plantae huius, in horto Academico noſtro perennantis flores exſpectauerant, qui illi prioribus temporibus praeerant Botanici, ſed fruſtra hactenus; donec tandem nuper aeſtate valde calida exoptatos flores produxit. Clar. itaque huius Diſſ. Auctor, cui occaſio fauebat, plantam delineari curauit, genus eiusdem, quod nouum fore ab aliis coniectura iam proſpectum erat, deſcripſit, nomenque *Koelreuteriae paniculatae* eidem impoſuit. Character genericus conſiſtit in *calyce pentaphyllo*, *infero*, *foliolis inaequalibus*; *corolla tetrapetala*, *petalis aequalibus*; *nectariis petaloideis*, *et corpuſculo receptaculi analogo genitalia tantum ſuſtinente.*

ASTRONOMICA.

I.

Experimenta circa Longitudinem Penduli ſimplicis minuta ſecunda Kolae et Archangelopoli oſcillantis.

Auctore Stephano Rumovski pag. 567.

Ab eo tempore, quo *Richerus* Horologium Aſtronomicum Cayennam translatum ſingulis diebus duobus minutis primis retardaſſe, ac longitudinem penduli $1\frac{1}{4}$ lin. minuendam fuiſſe obſeruauit, vt illud motu ſuo ſingula minuta ſecunda temporis aeque ac Pariſiis indicaret, Aſtronomi nullam praetermittunt occaſionem inquirendi in longitudinem penduli ſimplicis, vt certius conſtet, quantum figura telluris a ſphaeroidica aberret. Non inanem itaque operam collocaſſe cenſendus eſt Cl. Auctor, dum Kolae ſub latitudine 68°. $52\frac{1}{2}'$ longitudinem penduli ſimplicis per experimenta definire allaborauerit.

Duplex hic occurrit determinatio penduli ſimplicis minuta ſecunda Kolae oſcillantis: altera ab experimentis authomato pendulo inuariabili inſtructo inſtitutis petita, altera ab experimentis pendulo ſimplici peractis. Ex his longitudo penduli ſimplicis in

in temperie aeris 12° ſupra o thermometri Reaumuriani deducitur 3 ped. 9, 46 lin.; ex illis vero in temperie aeris 6½° ſupra o eiusdem thermometri longitudo penduli eruitur 3 ped. 9, 34 lin., quam priori praeferendam eſſe non ſine ratione exiſtimat Cl. Auctor.

Ad calcem huius diſſertationis ſtabilitur longitudo penduli ſimplicis Archangelopoli 3 ped. 9, 15 lin. verum determinatio haec non aeque certa eſt ac praecedens; innititur enim determinationi longitudinis penduli ſimplicis Kolae, dein ſupponitur horologium Aſtronomicum Kola Archangelopolin translatum nullam in itinere mutationem fuiſſe paſſum. Interim tamen negari nequit determinationem hanc magis veritati conſentaneam videri ac *De l'Islii*, prout patet ex comparatione longitudinum pendulorum Kolae, in Ponoi et in Pello inuentarum.

II.

De Parallaxi Solis concluſa ex tranſitu Veneris per Solem A. 1769. in Inſula Regis Georgii obſeruato.

Auctore A. I. Lexell pag. 586.

Dum in Parte IIda Tom. XIV. horum Commentariorum, obſeruationum ſuper tranſitu Veneris

 ris

ris ad ſinum Hudſonis et in California factarum, inſtituta eſt comparatio, cum illis obſeruationibus quae in Europa factae fuerunt, euidenter quidem demonſtratum eſt, valorem parallaxis tempore tranſitus 8 ſecunda ſuperare, neque tamen ad 9 ſecunda excreſcere, ſed probabiliter $8\frac{1}{2}$ ſec. aliquanto eſſe maiorem; quia tamen haec disquiſitio ita comparata erat, vt leues in obſeruationibus commiſſi errores ipſam concluſionum certitudinem multum debilitare poſſent, ſummo omnium Aſtronomorum deſiderio exſpectabantur obſeruationes, quae ſuper hoc phaenomeno ab Aſtronomis Anglis in Inſula quadam maris Pacifici *King-Georg Eyland* dicta inſtitutae fuerunt, quippe ex quarum obſeruationum comparatione cum Europeicis de vera quantitate Parallaxis Solaris tutiſſimum inſtitui poſſet iudicium, ſiquidem pro hac inſula effectus parallaxis ad durationem tranſitus Veneris imminuendam erat inſignis adeoque contrarius illi, qui pro locis Europeicis obtinuit, qui ſcilicet valuit ad durationem tranſitus augendam. Statim igitur ac Illuſtr. Societas Scientiarum Regia Londinenſis, obſeruationes has cum noſtra Academia Scientiarum communicare dignata eſt, Cl. huius diſſertationis Auctor easdem ad praeſcriptum Methodi *Eulerianae* in Tomo XIV. Comment expoſitae, calculo ſubiecit, easque pro Parallaxi Soli inuenit concluſiones, quas in hac Diſſertatione fuſius exponit, et cuius ſumma tantum capita hoc loco perſtringere ſuffecerit. Vt Cl. Auctor eo certiores pro Parallaxi Solis inueniret concluſiones, ſingulas obſer-

vationes

vationes Americanas cum inſigni numero earum, quae in Europa inſtitutae fuerunt, comparare neceſſum duxit, in quo negotio exſequendo duo caſus ſeorſim conſiderandi fuerunt, prior quo ratio habetur tam contactuum internorum quam externorum, alter quo ad contactus tantum internos vtpote certiores tantum reſpicitur His itaque praeſuppoſitis, ſi π deſignat Parallaxin Solis tempore tranſitus, y autem correctionem Latitudinis Geocentricae Veneris ex Tabulis aſſumtae pro tempore coniunctionis, inuenit combinationem obſeruationum pro Inſula Regis Georgii cum Europeicis praetere pro priori caſu $\pi = 8'', 68 - 0,0077\, y$ et pro poſteriori $\pi = 8'', 58 - 0,0080 . y$. Simili modo combinatio obſeruationum ad ſinum Hudſonis factarum cum Europeicis dat pro priori caſu $\pi = 8'', 52 - 0,0019 . y$ et pro poſteriori $\pi = 8'', 74 - 0,0029\, y$. Denique obſeruationes Californiae inſtitutae, ſi cum Europeicis comparentur, praebent pro poſteriori caſu $\pi = 8, 61 - 0, 0062 . y$, pro hoc ſcilicet loco obſeruationes tantum contactuum internorum in computum ductae fuerunt. Vt autem nunc ex his diverſis concluſionibus valor medius rite exquiratur, vnicuique earum ea tribuenda eſt probabilitas, quae ipſi reapſe competit, et quae proportionalis eſt cenſenda coefficienti ipſius π in aequatione vnde eius valor deductus eſt. Hoc modo igitur probabilitates aeſtimando, inuenit Cl. Auctor valorem parallaxis medium tempore tranſitus fore $\pi = 8'', 63 - 0, 0062 . y$, ſi ad omnes obſeruationes attendatur, vel $\pi = 8, 57$

$- 0,0062.y$, ſi obſeruationes in Inſula Regis Georgii pro contactibus externis excludantur, vel $\pi = 8'', 62 - 0,0065.y$ ſi obſeruationes contactuum externorum pro ſinu Hudſonis etiam excludantur, vnde exacte quidem ſtatuere licuit $\pi = 8,60 - 0,006.y$. Ad huius autem concluſionis vlteriorem confirmationem Cl. Auctor obſeruationes Americanas ſeorſim cum obſeruationibus in iis Lapponiae locis factis, vbi totum tranſitum obſeruare licuit comparat, tum etiam ipſas obſeruationes Americanas inter ſe confert, ex priori disquiſitione inuenit medio ſumto $\pi = 8,64 - 0,0075.y$, et ex poſteriori $\pi = 8'',47 - 0,01.y$. Denique vt valor abſolutus ipſius π inueniatur correctionem Latitudinis Geocentricae ſupponit $8''$, vnde habetur $\pi = 8'',55$ de qua Auctor noſter affirmare non dubitat eam vltra partem decimam ſecundi a veritate non fore diſcrepantem. Si contactuum externorum pro Inſula Regis Georgii ratio haberetur, nullum quidem eſt dubium, quin valor Parallaxis aliquanto maior prodiret, oſtendit igitur Cl. Auctor has obſeruationes imprimis pro contactu externo circa egreſſum inſignibus erroribus eſſe obnoxias, qua etiam occaſione in Longitudinem Geographicam Inſulae Regis Georgii a Pariſiis inquirit, quae ab ipſo inuenta eſt $10^h. 7'. 22''$ verſus Occid. Vltimo demum loco exponit quales errores in obſeruationibus admittere neceſſe foret, ſi Parallaxis ad 10 ſec. vel ad 9 ſec., augenda eſſet. Et pro Parallaxi quidem 10 ſec. medius valor errorum vsque ad duo minuta prima increſceret, pro hypotheſi

autem

autem Parallaxis $9''$ hic error vix infra 20 aut 30 ſec. ſubſiſtere poſſet.

III.

Elementa Aſtronomica Theoriae Veneris deducta ex obſeruatione tranſitus Veneris ſub Sole ad ſinum Hudſonis, Californiae et in Inſula Regis Georgii inſtituta.

Auctore W. L. Krafft pag. 649.

Coniunctiones eclipticae Veneris cum Sole, etiamſi a principali iſtiusmodi obſeruationum, in definienda parallaxi Solis horizontali, vſu diſceſſeris, eam quoque ob cauſſam Aſtronomorum attentionem ſummo iure prouocant, quod ad perficienda theoriae huius planetae primaria elementa maxime ſunt accommodatae. Noſtri igitur aeui Aſtronomis cum tam contigerit eſſe felicibus, vt bis intra nouem annos rariſſimo hoc fruerentur phaenomeno; quin in motuum Veneris cognitionem inſignis inde redundauerit vtilitas, dubitari non poteſt. Hunc ipſum quoque ſcopum in hac diſſertatione ſibi fixit Cl. Auctor, dum vltimi tranſitus Veneris ſub Sole 1769. viſi tres omnibus numeris abſolutae obſeruationes ad Academiam eſſent transmiſſae. Principio itaque

itaque Cl. Auctor id operam dat, vt motus Veneris horarios in ecliptica, in orbita relatiua et in latitudinem ſumma cum praeciſione definiat; quibus praemiſſis ex mora ingreſſus vel egreſſus per effectus parallacticos in hypotheſi parallaxis Solis $= 8''$, 55 computatos ad centrum terrae reducta quantitatem ſemidiametri Veneris determinat; vnde porro ad diſtantiam centrorum minimam, latitudinem Veneris geocentricam atque coniunctionis tempus verum, inueſtiganda progreditur. Locum Nodi Veneris ex hac ipſa obſeruatione deductum cum eo, quem obſeruatio anni 1761. praebet, comparando motus annuus lineae Nodorum Veneris reſpectu aequinoctiorum colligitur $32''$, 03 adeoque $- 18''$, 30 intuitu fixarum; quae quidem determinatio parum ab ea diſcrepat, quae ex theoria attractionis vniuerſalis deriuatur.

IV.

Tentamen Orbitae Veneris excentricitatem et aphelium huiusque motum annuum definiendi.

Auctore W. L. Krafft pag. 658.

Methodus, planetarum excentricitates et aphelia definiendi, quam a Caſſinio prolatam inprimis Cel. *la Lande* in Comment. Paris. 1755. inſi-

gniter

gniter excoluit, quantumuis ſit egregia et ad calculi facilitatem apta; eo tamen haud mediocri incommodo premi videtur, quod ipſos apheliorum motus annuos tanquam elementa calculi ſupponat cognitos; quodſi enim, quae adhibentur, obſeruationes magno temporis interuallo inter ſe ſint disiunctae; omnis calculi praeciſio pro orbitis praeſertim valde excentricis haud parum inde labefactari videtur. Remedium huic difficultati adferre conatus eſt Cl. Auctor, dum correctionem aliquam ipſius quoque aphelii annuo motui adplicandam, tanquam incognitam quantitatem, in calculum introducit et ex quaternis obſeruationibus, debite inter ſe diſpoſitis, tres elicit aequationes analyticas, vnde correctiones pro excentricitate, aphelii poſitione eiusque praeceſſione annua definiuntur. Ad elementorum, quae hic pro Veneris theoria inuenit Cl. Auctor, praeciſionem quod attinet; ea plures obſeruationes, in idoneis huic disquiſitioui orbitae punctis inſtitutas, comparando etiam magis perfici et comprobari poterit. Ceterum excentricitas et poſitio aphelii hic ſtabilita, illa a Caſſinianis, haec ab Halleianis, tabulis vix discrepat; motus vero aphelii annuus 45 minutis ſecundis maior fuit inuentus eo, quem Cel. *Caſſini* ſtatuit adoptandum.

V.

De Latitudine Veneris Geocentrica tempore tranſitus A. 1769.

Auctore A. I. Lexell pag. 669.

Quum ex obſeruationibus contactuum Veneris cum Sole pro Latitudine Veneris Geocentrica prodeat valor aliquanto maior eo, qui reperitur ſi ad obſeruationes diſtantiarum minimarum attendatur, Cl. huius diſſertationis Auctor in veram et exactam quantitatem latitudinis Geocentricae ex obſeruationibus diſtantiarum inter centra Solis et Veneris deducendam, inquirere conſtituit, vt eo ipſo conſtaret cuinam obſeruationum ſpeciei potior tribuenda ſit fides. Hunc in finem eas imprimis computo ſubiecit obſeruationes, quae Noritoni in Penſyluania circa diſtantias proximas inter limbos Solis et Veneris inſtitutae ſunt, ex quarum inter ſe combinatione valor diſtantiae minimae inter centra Solis et Veneris facile exquiritur. Si enim pro datis duobus temporibus, innoteſcant diſtantiae apparentes centrorum Solis et Veneris eaedem effectu parallaxis correctae dabunt veras diſtantias inter haec ipſa centra, tum vero ex tempore inter obſeruationes praeterlapſo dabitur chorda a Venere eo tempore percurſa, ideoque in triangulo cuius tria dantur latera, inueniri quoque poteſt perpendicularis in baſin (chordam

a Ve-

a Venere percurſam), quae erit ipſa diſtantia minima. Hoc autem modo ex 36 diuerſis comparationibus, quarum maxima diſcrepantia 5″ non excedit, colligitur valor diſtantiae minimae 10′. 9″, 4 pro ſemidiametro Solis 15′. 47″, ſi autem binae obſeruationes, quae reliquis ſunt incertiores excludantur, maximus diſſenſus concluſionum 2″ non ſuperabit, tumque medio ſumto habebitur diſtantia minima 10′. 10″, quam tamen vno ſecundo maiorem eſſe ſuſpicatur Cl. Auctor, quod etiam per obſeruationes Philadelphiae inſtitutas confirmare annititur. Deinde obſeruationes quoque a Cel. *Krafft* Orenburgi inſtitutas circa appulſus Solis et Veneris ad eadem fila Quadrantis horizontalia et verticalia in computum duxit, indeque valorem Latitudinis Geocentricae Veneris quaeſiuit, quam tamen vera maiorem reperit, oſtendit igitur ex huiusmodi obſeruationibus licet quam maxime exactis, vix quicquam certi de valore Latitudinis Geocentricae ſtatui poſſe, quum vnius ſecundi error in appulſu notando, in valore Latitudinis producat errorem 8 ſec., igitur vt concluſiones ex huiusmodi obſeruationibus deduci poſſent, quae non vltra 3 aut 4 ſecunda inter ſe diſcreparent, neceſſum eſſet, vt momenta appulſus ad praeciſionem dimidiae vel tertiae partis minuti ſecundi notari poſſent qualem exactitudinem in huiusmodi obſeruationibus exſpectare fruſtraneum eſſet. Denique reticendum non eſt, ſi valor diametri Solaris aliquantum imminuatur, obſeruationes contactuum cum obſeruationibus Micrometricis melius

conciliari poſſe, immo perfectum obtineri conſenſum ſi cum Cel. *de la Lande* diameter Solis 7″ imminuatur, quo facto prodibit diſtantia minima 10′ 8″ circiter. Verum quum tanta diminutio diametri Solaris vix admittenda ſit, niſi per menſuras actuales Micrometris captas comprobari poſſit, Cl. Auctor tutiſſimum iudicauit pro valore diametri Solis 10′. 45″, 5, qui ipſi admodum probabilis viſus eſt, ſtatuere valorem diſtantiae minimae Veneris a centro Solis 10′. 10″, ex quo Latitudo Veneris Geocentrica tempore coniunctionis habebitur 10′. 17″.

IV.

Epitome Obſeruationum meteorologicarum, anno 1771. ſecundum Calendarium Iulianum Petropoli inſtitutarum.

Auctore I. A. Eulero pag. 693.

Obſeruationes meteorologicas anni 1771. eadem Cel. Auctor et inſtituit et heic exponit methodo, quam in horum Commentariorum Tomo decimo quarto fuſius ab Ipſo legimus explicatam. Barometri maxima altitudo obſeruata fuit 28. 77 poll. ped. Paris. cum ſpatio variationis annuo 1. 81; ad menſtruas vero variationes quod attinet, eas, vti com-

communiter, ita et hoc anno, in menſibus aeſtiuis, longe minores, quam hybernis, deprehendimus. Frigus intenſiſſimum fuit 198°. diuiſionis *Deslilianae*, quod ergo vix tribus gradibus a ſummo frigore abfuit Petropoli adhuc obſeruato; calor maximus fuit 109° ſeu 22° ſupra punctum congelationis in diuiſione Reaumuriana. Obſeruationes aurorarum borealium, quales quidem viginti nouem hoc anno adparuerunt, aliorumque phaenomenorum Cel. Auctor ſingulis menſibus ſubnectit.

INDEX.
DISSERTATIONVM.
Mathematica.

Leon. Euler, De Solidis, quorum ſuperficiem in planum explicare licet pag. 3.

Eiusdem, Methodus noua et facilis calculum variationum tractandi pag. 35.

Dan. Bernoulli, De ſummationibus ſerierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione et vſu pag. 71.

Leon. Euler, Euolutio formulae integralis $\int x^{f-1} dx (lx)^{\frac{m}{n}}$ integratione a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extenſa pag. 91.

Eiusdem, Problematis cuiusdam Geometrici prorſus ſingularis euolutio pag. 140.

Eiusdem, Conſiderationes Cyclometricae p. 160.

A. I. Lexell, De criteriis integrabilitatis formularum differentialium Diſſertatio ſecunda p. 171.

Eiusdem, Demonſtratio Theorematis Analytici a Cel. *la Grange* inuenti pag. 230.

Phyſico-Mathematica.

Dan. Bernoulli, De Vibrationibus chordarum, ex duabus partibus tam longitudine quam craſ-

ſitie

ſitie ab inuicem diuerſis compoſitarum pag. 257.

Leon. Euler, Sectio quarta de motu Aeris in Tubis pag. 281.

Eiusdem, De Perturbatione motus Terrae ab actione Veneris oriunda pag. 426.

Phyſica.

C. F. Wolff, De Corde Leonis pag. 471.

I. T. Koelreuter, Obſeruationes ſplanchnologicae ad Acipenſeris Rutheni *Linn.* anatomen ſpectantes pag. 511.

I. Lepechin, De Hermaphrodito ad ſexum virilem pertinente pag. 525.

A. I. Gueldenſtaedt, Salmo Leucichthys et Cyprinus Chalcoides deſcripti pag. 531.

Eiusdem, Kraſcheninnikouia, nouum plantarum genus pag. 548.

E. Laxmann, Koelreuteria, nouum plantarum genus pag. 561.

Aſtronomica.

Steph. Rumovski, Experimenta circa Longitudinem Penduli ſimplicis minuta ſecunda Kolae et Archangelopoli oſcillantis pag. 567.

A. I. Lexell, De Parallaxi Solis concluſa ex tranſitu Veneris per Solem A. 1769. in Inſula Regis Georgii obſeruato pag. 586.

W. L. Krafft, Elementa Aſtronomica Theoriae Veneris deducta ex obſeruatione tranſitus Veneris ſub Sole ad ſinum Hudſonis, Californiae et in Inſula Regis Georgii inſtituta pag. 649.

Eiusdem, Tentamen Orbitae Veneris excentricitatem et aphelium huiusque motum annuum definiendi pag. 658.

A. I. Lexell, De Latitudine Veneris Geocentrica tempore tranſitus A. 1769. pag. 669.

I. A. Euler, Epitome Obſeruationum meteorologicarum, anno 1771. ſecundum Calendarium Iulianum Petropoli inſtitutarum p. 693.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE
SOLIDIS QVORVM
SVPERFICIEM IN PLANVM EXPLICARE LICET.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Notiſſima eſt proprietas cylindri et coni, qua eorum ſuperficiem in planum explicare licet atque adeo haec proprietas ad omnia corpora cylindrica et conica extenditur, quorum baſes figuram habeant quamcunque; contra vero ſphaera hac proprietate deſtituitur, quum eius ſuperficies nullo modo in planum explicari neque ſuperficie plana obduci queat; ex quo naſcitur quaeſtio aeque curioſa ac notatu digna, vtrum praeter conos et cylindros alia quoque corporum genera exiſtant, quorum ſuperficiem itidem in planum explicare liceat nec ne? quam ob rem in hac diſſertatione ſequens conſiderare conſtitui Problema:

Inuenire aequationem generalem pro omnibus ſolidis, quorum ſuperficiem in planum explicare licet, cuius ſolutionem variis modis ſum agreſſurus.

SOLVTIO PRIMA.

ex meris principiis Analyticis petita.

Tab. I. Fig. 1. 2. Sit Z punctum quodcunque in ſuperficie ſolidi quaeſiti, cuius locus more ſolito per has ternas coordinatas inter ſe normales $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ exprimatur, ita vt aequatio inter has coordinatas ſit inueſtiganda, qua problemati ſatisfiat. Deinde concipiamus ſuperficiem huius ſolidi, iam in planum eſſe explicatam eamque in Fig. 2. repraeſentari, in qua punctum illud Z incidat in V, cuius locus per binas coordinatas orthogonales ita definiatur vt ſit, $OT = t$ et $TV = u$ atque manifeſtum eſt, ternas coordinatas priores x, y et z certo quodam modo ab his binis t et u pendere debere, ideoque ſingulas earum tamquam certas functiones iſtarum t et u ſpectari poſſe.

3. Quo hanc conditionem commodius in calculum introducamus eam in differentialibus conſideremus et quoniam tam x, quam y et z ſunt functiones binarum variabilium t et u, earum differentialia his formulis definiamus:

$$dx = l\,dt + \lambda\,du;\quad dy = m\,dt + \mu\,du \text{ et } dz = n\,dt + \nu\,du$$

vbi quum litterae l, m, n et λ, μ, ν itidem certas functiones binarum variabilium t et u ſignificent, ex natura huiusmodi functionum conſtat eſſe debere:

$$\left(\frac{dl}{du}\right) = \left(\frac{d\lambda}{dt}\right);\quad \left(\frac{dm}{du}\right) = \left(\frac{d\mu}{dt}\right) \text{ et } \left(\frac{dn}{du}\right) = \left(\frac{d\nu}{dt}\right).$$

4 Iam

4. Iam in ſuperficie explanata praeter punctum V duo alia infinite propinqua v et v' contemplemur, pro quorum illo coordinatae ſint $OT = t$ et $Tv = u + du$ pro hoc vero $Ot = t + dt$ et $tv' = u$, ita vt puncta V et v communem habeant abſciſſam $OT = t$, at puncta V et v' communem applicatam $= u$. Hinc iunctis lineolis Vv' et vv' latera trianguli elementaris Vvv' ita determinantur, vt ſit $Vv = du$, $Vv' = dt$, et $vv' = \sqrt{(du^2 + dt^2)}$, atque nunc facile intelligitur, hoc idem triangulum in ſuperficie ſolidi quaeſiti reperiri debere. Tab. I. Fig. 2.

5. Sint igitur in ſuperficie ſolidi puncta z et z', quae punctis v et v' reſpondeant, atque videamus quo modo pro illis punctis z et z' ternae coordinatae ſe ſint habiturae? Quemadmodum autem ipſum punctum Z per has tres coordinatas primam $= x$ ſecundam $= y$ et tertiam $= z$ definitur, quae ſingulae ſunt functiones binarum t et u, quoniam pro puncto v abſciſſa t manet, applicata vero u ſuo differentiali du augetur, pro puncto ſolidi z ternae coordinatae ita ſe habebunt:

$$\text{I}^{ma}\; x + \lambda du \quad \text{II}^{da}\; y + \mu du \quad \text{et} \quad \text{III}^{tia}\; z + \nu du$$

ſimili modo quia pro puncto v' applicata u manet abſciſſa vero t ſuo differentiali dt augetur, pro puncto z' ternae coordinatae erunt:

$$\text{I}^{ma}\; x + l dt \quad \text{II}^{da}\; y + m dt \quad \text{et} \quad \text{III}^{tia}\; z + n dt.$$

6. Conſtat autem ſi pro puncto quocunque in ſuperficie ſolidi coordinatae fuerint x, y et z pro

 alio

alio vero puncto proximo x', y', et z', tum eorum punctorum diſtantiam fore $= \sqrt{((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2)}$; hinc pro triangulo Zzz' habebimus ſingula eius latera 1°. $Zz = du\sqrt{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)}$; 2°. $Zz' = dt\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}$ et 3^{tio} $zz' = \sqrt{((\lambda du - l dt)^2 + (\mu du - m dt)^2 + (\nu du - n dt)^2)}$ ſiue $zz' = \sqrt{(dt^2(ll + mm + nn) + du^2(\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu) - 2\,dt\,du(l\lambda + m\mu + n\nu))}$.

7. Iam quum ſuperficies ſolidi prorſus debeat conuenire cum figura plana (Fig. 2) neceſſe eſt, vt triangula Zzz' et Vvv' ſint non ſolum aequalia, ſed etiam ſimilia ideoque latera homologa aequalia, ſcilicet:

I°. $Zz = Vv$, II°. $Zz' = Vv'$ et $zz' = vv'$

vnde tres ſequentes nanciſcimur aequationes

I°. $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$; II°. $l^2 + m^2 + n^2 = 1$;

III°. $dt^2(l^2 + m^2 + n^2) + du^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - 2\,dt\,du(l\lambda + m\mu + n\nu) = dt^2 + du^2$

tertia autem ob binas priores reducitur ad hanc

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0,$$

quibus tribus aequationibus ſolutio problematis noſtri continetur, ex quo intelligitur eam reduci ad ſequens problema analyticum:

Propoſitis duabus variabilibus t *et* u *earum ſex inuenire functiones* l, m, n *et* λ, μ, ν *ita comparatas, vt ſex ſequentibus conditionibus ſatisfiat*

I°. $\left(\frac{dl}{du}\right) = \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)$; II°. $\left(\frac{dm}{du}\right) = \left(\frac{d\mu}{dt}\right)$; III^{tio} $\left(\frac{dn}{du}\right) = \left(\frac{d\nu}{dt}\right)$

IV°. $ll + mm + nn = 1$; V°. $\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1$;

VI°. $l\lambda + m\mu + n\nu = 0$

quod

quod problema in ſe conſideratum longe videtur difficillimum, cuius tamen ſolutionem ſatis concinnam infra exhibere licebit.

SECVNDA SOLVTIO.

ex principiis Geometricis petita.

8. Vt hanc ſolutionem a primis principiis repetamus, conſideremus corpora vel prismatica vel pyramidica, quae baſibus exceptis charta obducta intelligantur, atque in hac charta plicae rectilineae deprehendentur vel inter ſe parallelae, vel ad certum punctum verticem ſcilicet pyramidis conuergentes, quae lineae rectae quotcunque fuerint, litteris A *a*, B *b*, C *c*, D *d* etc. deſignentur. Quodſi ergo charta in planum expandatur, in ea eaedem lineae rectae A *a*, B *b*, C *c* etc. occurrent, eruntque vel inter ſe parallelae vel ad certum punctum conuergentes. Vnde viciſſim ſi ſuper charta plana huiusmodi lineae rectae ducantur, ſecundum quas chartam plicare liceat, ea certo corpori vel prismatico vel pyramidico obducendo erit apta.

9. Quin etiam in iſta charta plana rectas A *a*, B *b*, C *c* etc. pro lubitu ducere licebit, ita vt neque inter ſe ſint parallelae neque ad certum punctum conuergant, dummodo ſe mutuo nusquam decuſſent, quemadmodum (Fig. 3.) declarat quocunque enim modo iſta charta ſecundum has rectas plicetur ſemper concipere licebit eiusmodi ſolidum, cui iſta charta plicata adaptari poſſit. Ex quo patet praeter Tab. I. Fig. 3.

corpora

corpora priſmatica et pyramidica, alia quoque dari corporum genera quae hoc modo charta obduci queant, quorumque adeo ſuperficiem in planum explicare liceat.

10. In ſuperficie ergo horum corporum dabuntur etiam quotcunque lineae rectae A*a*, B*b*, C*c*, D*d* etc. quae etiamſi neque inter ſe ſint parallelae, neque ad quodpiam punctum conuergentes, tamen ita erunt comparatae, vt binae quaeque proximae veluti A*a* et B*b*, vel B*b* et C*c*, vel C*c* et D*d* etc. niſi ſint parallelae, productae ſaltem in vno puncto concurrant, niſi enim hoc eueniret, ſpatium inter huiusmodi binas rectas proximas in ſuperficie corporis interceptum non foret planum, neque propterea ipſam ſuperficiem in planum explicare liceret, quamuis in ea darentur quotcunque lineae rectae A *a*, B *b*, C *c* etc. Ex quo concludimus ad corpora ſcopo noſtro ſatisfacientia non ſufficere, vt ſuper iis quotcunque rectas A *a*, B *b*, C *c* ducere liceat, ſed inſuper imprimis requiri vt binae proximae in eodem plano exiſtant, ſpatiumque inter eas interceptum ipſum ſit planum.

11. Nunc iam in infinitum augeamus rectas illas A *a*, B *b*, C *c* etc. vt corpus noſtrum obtineat ſuperficiem vbique incuruatam, quemadmodum Problema noſtrum ob continuitatis legem poſtulat. Atque nunc quidem ſtatim apparet, ſuperficiem huiusmodi corporum ita comparatam eſſe debere, vt ex quolibet in ea ſumto puncto vna ſaltem linea recta

educi

educi poſſit, quae tota in ipſa ſuperficie ſit ſita, verum haec conditio ſola nondum indolem Problematis noſtri exhaurit, ſed inſuper neceſſe eſt, vt quaeuis huiusmodi binae rectae inter ſe proximae in eodem plano ſint conſtitutae, hoc eſt vt niſi ſint parallelae, eae ſaltem productae in vno puncto concurrant. Quare ſi ſingulae illae rectae hoc modo ad concurſum vsque producantur, omnia concurſuum puncta in certa quadam linea curua ſita reperientur, quae cum tota non ſit in eodem plano duplici curuatura erit praedita atque ita comparata, vt ſingula eius elementa ſi producantur, ipſas illas rectas A a, B b, C c ſupra memoratas in ſuperficie corporis exhibeant.

12. Quemadmodum igitur quoduis corpus noſtro Problemati conueniens ad certam quandam lineam curuam duplicis curuaturae deducit; ita vicisſim ſumta pro lubitu huiusmodi linea curua ex ea corpus determinare poterimus, quod problemati noſtro ſatisfaciet. Talis autem linea curua primo proiiciatur in plano tabulae, ſitque eius proiectio a U u pro qua ponamus abſciſſam A T $= t$ et applicatam T U $= u$, ita vt aequatio inter t et u tamquam data ſpectetur, ſitque recta U M tangens huius curvae in puncto U, recta vero um tangens in puncto proximo u; hoc poſito ſit b V v ipſa curua duplicis curuaturae, cuius applicata ad planum noſtrum normalis ponatur U V $= v$, ſitque v proximum in eadem curua punctum, atque ex vtroque puncto V, v educantur tangentes quarum illa V S rectae U M in puncto S, haec vero $v s$ rectae $u m$ in Tab. I. Fig. 4.

 puncto

puncto s occurrat. Hic quidem ductu tangentium proximarum in punctis u et v carere potuiſſemus, ſed quia in ſequentibus iis opus erit, hic eas in Figura indicare viſum eſt.

13. Quum igitur natura curuae $b\,V\,v$ duplici aequatione inter ternas coordinatas $A\,T = t$, $T\,U = u$ et $U\,V = v$ exprimatur, tam littera u, quam v vt functio ipſius t ſpectari poterit, vnde ſimul definietur poſitio vtriusque tangentis U M et V S, quocirca vocemus angulos $T\,U\,M = \zeta$ et $U\,V\,S = \theta$, atque poſito elemento $T\,t = d\,t$ erit $d\,u = \frac{d\,t}{tang.\,\zeta}$, $U\,u = \frac{d\,t}{ſin.\,\zeta}$, tum vero $d\,v = \frac{d\,t}{ſin.\,\zeta\;tang.\,\theta}$ ac denique elementum curuae $V\,v = \frac{d\,t}{ſin.\,\zeta\;ſin.\,\theta}$. Pro ſitu autem tangentium habebimus $T\,M = u$ tang. ζ; $U\,M = \frac{u}{coſ.\,\zeta}$, at recta $U\,S = v$ tang. θ et $V\,S = v$ ſec. $\theta = \frac{v}{coſ.\,\theta}$.

14. Quoniam nunc tota recta V S ſita eſt in ſuperficie corporis quod quaerimus, capiamus in ea punctum quodcunque indefinitum Z, vnde in planum tabulae demiſſo perpendiculo Z Y et ex Y ad axem A T ducta normali Y X habebimus pro ſuperficie quaeſita ipſas ternas coordinatas, quas ſupra ſumus contemplati, ſcilicet $A\,X = x$, $X\,Y = y$ et $Y\,Z = z$, inter quas ergo debitam aequationem inveſtigari oportet, qua huius ſuperficiei natura exprimatur.

15. Hunc in finem vocemus interuallum indefinitum $V\,Z = s$, quae ergo eſt quantitas variabilis neutiquam a puncto V pendens, ideoque probe diſtinguen-

ſtinguenda a variabili t, cuius functiones non ſolum ſunt binae applicatae $TU = u$ et $UV = v$, ſed etiam bini anguli ζ et θ. Hinc autem adipiſcimur $ZY = z = v - s\,\text{coſ.}\,\theta$ et interuallum $UY = s\,\text{ſin}\,\theta$, vnde porro concludimus $XY = y = u - s\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\zeta$ et $XT = s\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\zeta$, ſicque tandem obtinemus abſciſſam $AX = x = t - s\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\zeta$ ita vt per binas variabiles t et s, tres noſtrae coordinatae hoc modo ſuccincte determinentur:

I°. $x = t - s\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\zeta$ II°. $y = u - s\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\zeta$
III. $z = v - s\,\text{coſ.}\,\theta$.

16. Praeter omnem igitur exſpectationem hic vſu venit, vt formulas adeo algebraicas pro ternis coordinatis x, y, z elicuerimus, ſiquidem pro quantitatibus u et v functiones algebraicae ipſius t accipiantur. Hae enim functiones penitus arbitrio noſtro permittuntur, iis autem aſſumtis, bini anguli ζ et θ ita determinantur, vt ſit $\text{tang.}\,\zeta = \frac{dt}{du}$ vel $\text{ſin.}\,\zeta = \frac{dt}{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}$ et $\text{coſ.}\,\zeta = \frac{du}{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}$, tum vero $\text{tang.}\,\theta = \frac{dt}{dv.\,\text{ſin.}\,\zeta} = \frac{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}{dv}$, ideoque $\text{ſin.}\,\theta = \frac{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}{\sqrt{(dt^2 + du^2 + dv^2)}}$ et $\text{coſ.}\,\theta = \frac{dv}{\sqrt{(dt^2 + du^2 + dv^2)}}$. Quodſi autem viciſſim bini anguli ζ et θ per variabilem t, fuerint dati, ipſae applicatae u et v, per ſequentes formulas integrales reperientur expresſae $u = \int \frac{dt}{\text{tang.}\,\zeta}$ et $v = \int \frac{dt}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{tang.}\,\theta}$.

17. In his ergo formulis omnia plane ſolida, quorum ſuperficiem in planum explicare licet contineri neceſſe eſt. Ante omnia igitur operae pretium

 tium

tium erit oſtendere quomodo quaeuis corpora conica in iis contineantur, ſiquidem cylindrica in conicis iam continentur, vertice in infinitum remoto. Sit igitur punctum V vertex coni, qui quum ſit fixus coordinatae t, u et v conſtantes habebunt valores. Quoniam igitur nihil impedit, quo minus hic vertex in ipſo puncto fixo A accipiatur, ponere poterimus $t = 0$, $u = 0$ et $v = 0$, tum autem ob tang. $\zeta = \frac{dt}{du}$ et tang. $\theta = \frac{dt}{dv.\,\text{ſin.}\,\zeta} = \frac{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}{dv}$, hi anguli ζ et θ prodeunt indefiniti, ita tamen, vt alter tamquam functio quaedam alterius ſpectari poſſit, quandoquidem omnia quae ad poſitionem rectarum V S pertinent, ad vnicam variabilem ſunt referenda.

18. Quum igitur ſit $t = 0$, $u = 0$ et $v = 0$ habebimus:

I°. $x = - s$ ſin. θ ſin. ζ, II°. $y = - s$ ſin. θ coſ. ζ et III^tio^ $z = - s$ coſ. θ,

vnde fit $\frac{x}{y} =$ tang. ζ et $\frac{x}{z} =$ tang. θ ſin. ζ, ex illa colligitur ſin. $\zeta = \frac{x}{\sqrt{(xx + yy)}}$, ideoque ex hac tang. $\theta = \frac{\sqrt{(xx + yy)}}{z}$; quum igitur tang. θ functioni cuicunque ipſius tang. ζ aequetur, habebimus talem aequationem: $\frac{\sqrt{(xx + yy)}}{z} = \Phi : (\frac{x}{y})$, ſicque quantitas $\frac{\sqrt{(xx + yy)}}{z}$ aequabitur functioni homogeneae nullius dimenſionis ipſarum x et y hincque porro ipſa quantitas z aequabitur functioni homogeneae vnius dimenſionis ipſarum x et y, ſiue quod eodem redit aequatio inter x, y et z, ita erit comparata, vt in

ea

ea tres variabiles x, y et z vbique eundem dimenſionum numerum adimpleant. Quodſi vna coordinatarum x, y, z in infinitum abeat, aequatio pro ſolido duas tantum reliquas implicabit coordinatas, quod eſt criterium corporum cylindricorum.

19. Aliis ſolidis noſtro problemati ſatisfacientibus hic euoluendis non immoramur; quum infra vbi tertiam Methodum trademus, multo facilius cuncta huiusmodi corporum genera cognoſcere queamus. Interea dum iſta ſecunda Methodus, tam facilem nobis ſuppeditauit ſolutionem, cum per Methodum priorem vix vllam ſolutionem ſperare licuiſſet; nunc etiam priorem ſolutionem vberius euoluere atque adeo formulas illas analyticas primo intuitu ſummopere arduas, reſoluere poterimus vnde in Analyſin plurimum lucis inferetur. Ad hoc praeſtandum tantum opus erit, vt hanc poſteriorem ſolutionem ad elementa prioris ſollicite reuocemus.

Applicatio Methodi poſterioris ad ſolutionem priorem.

20. Quoniam in poſteriori ſolutione iam formulas pro ternis coordinatis x, y et z quibus natura ſolidi continetur, elicuimus, in eo nobis erit elaborandum vt etiam formulas pro figura plana in quam ſuperficies ſolidi explicatur, inueſtigemus. Hic ante omnia curua illa duplicis curuaturae b V v accuratius eſt perpendenda, quippe qnae per explicationem illius ſuperficiei etiam ad planum perducitur.

 tur.

tur. Quum autem haec curua per inflexionem infinitis modis ad planum reduci atque adeo in lineam rectam extendi queat, ante omnia inquirendum eſt, quanam lege hanc reductionem ad planum fieri oporteat. Ex ſuperioribus autem manifeſtum eſt, hanc reductionem ita fieri debere, vt binae quaeque tangentes proximae V S, et $v\,s$ eundem ſitum inter ſe conſeruent, ſiue vt angulus inter eas interceptus S V s maneat idem. Scilicet ipſa linea curua B V v ita ad planum eſt redigenda, vt bina eius quaeque elementa proxima eandem inclinationem inter ſe conſeruent.

Tab. I. Fig. 4.

21. Praecipuum igitur negotium huc redit, vt angulum infinite paruum S V s inueſtigemus, quem in finem ab angulo M U m eſt exordiendum. Quum autem ſit angulus T U M $= \zeta$, et angulus $t\,u\,m = \zeta + d\,\zeta$, manifeſto ſequitur angulus M U m $= d\zeta$, deinde quia ſupra iam inuenimus $US = v\,\text{tang.}\,\theta$, erit ex natura differentialium $u\,s = v\,\text{tang.}\,\theta + d.(v\,\text{tang.}\,\theta)$ $= v\,\text{tang.}\,\theta + dv.\,\text{tang.}\,\theta + \frac{v\,d\,\theta}{\text{coſ.}\,\theta^2}$, vbi $d\,v = \frac{d\,t}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{tang.}\,\theta}$, quum igitur ſit $U\,u = \frac{d\,t}{\text{ſin.}\,\zeta}$, erit $U\,s = v\,\text{tang}\,\theta + d\,v\,\text{tang.}\,\theta$ $+ \frac{v\,d\,\theta}{\text{coſ.}\,\theta^2} - \frac{d\,t}{\text{ſin.}\,\zeta} = v\,\text{tang.}\,\theta + \frac{v\,d\,\theta}{\text{coſ.}\,\theta^2}$. Ex S itaque in U s ducatur perpendiculum S r, vt habeatur $r\,s$ $= \frac{v\,d\,\theta}{\text{coſ.}\,\theta^2}$, tum vero erit $S\,r = v\,d\,\zeta\,\text{tang.}\,\theta$, vnde etiam elementum S s definire liceret, ſiquidem eo opus haberemus.

22. Nunc ex puncto r in tangentem $v\,s$ quoque perpendiculum ducamus $r\,\varrho$, vt ducta $S\,\varrho$ fiat norma-

normalis in $v\,s$, vbi notandum triangulum $S\,r\,\varrho$ fore rectangulum ad r, quia $S\,r$ ad ipſum planum $s\,U\,V$ eſt normalis. Quia nunc angulus $r\,s\,\varrho = 90° - \theta$ erit $r\,\varrho = s\,r.\,\text{ſin.}\,r\,s\,\varrho = \frac{v\,d\,\theta}{\text{coſ.}\,\theta}$, vnde colligitur $S\,\varrho = \sqrt{(v\,v\,d\zeta^2\,\text{tang.}\,\theta^2 + \frac{v\,v\,d\,\theta^2}{\text{coſ.}\,\theta^2})} = \frac{v}{\text{coſ.}\,\theta}\sqrt{(d\zeta^2\,\text{ſin.}\,\zeta^2 + d\,\theta^2)}$. Quum igitur ſit $V\,S = \frac{v}{\text{coſ.}\,\theta}$, hinc concluditur angulus $S\,V\,s = \frac{S\,\varrho}{V\,S} = \sqrt{(d\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta^2 + d\,\theta^2)}$.

23. Sic itaque inuenimus angulum $S\,V\,s$, quo bina elementa curuae proxima inter ſe inclinantur ex quo promtiſſime radius oſculi huius curuae in puncto V definiri poteſt, quippe qui eſt $= \frac{V\,v}{S\,V\,s} = \frac{d\,t}{\text{ſin.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta\,\sqrt{(d\,\zeta^2.\,\text{ſin.}\,\theta^2 + d\,\theta^2)}}$ quod ergo negotium ob duplicem curuaturam non impeditur, quae in tranſitu monuiſſe ſat eſt. Quoniam autem hic cardo rei in hoc angulo elementari $S\,V\,s$ verſatur, vocemus hunc angulum $S\,V\,s = d\,\omega$, ita vt ſit $d\,\omega = \sqrt{(d\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta^2 + d\,\theta^2)}$, ſiue $d\,\omega^2 - d\,\theta^2 = d\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta^2$, vbi quum ambo anguli ζ et θ per variabilem t determinentur, cuius etiam functiones ſunt ambae applicatae u et v, patet quoque angulum ω tamquam functionem eiusdem variabilis t ſpectari debere.

24. Iam ſecundum praecepta ſupra data curva illa duplicis curuaturae $b\,V\,v$, in plano ſit deſcripta, ita vt angulus inter tangentes proximas interceptus $S\,V\,s$ ſit $= d\,\omega$, atque hac curua ad axem $O\,P$ per applicatam $P\,V$ relata, euidens eſt fore angulum $P\,V\,S = \omega$. Statuamus autem has coordinatas $O\,P = p$ et $P\,V = q$, atque habebimus $\frac{d\,p}{d\,q} = \text{tang}\,\omega$ Tab. I. Fig. 5.

et

et elementum curuae $V v = \frac{dp}{\text{ſin.}\,\omega}$ at vero per coordinatas praecedentes t, u et v cum angulis ζ et θ, erat idem elementum $V v = \frac{dt}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta}$, vnde conſequimur $dt\,\text{ſin.}\,\omega = dp\,\text{ſin}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta$, quae cum illa aequatione $\frac{dp}{dq} = \text{tang.}\,\omega$ coniuncta, dabit pro praeſentibus coordinatis p et q ſequentes valores integrales $p = \int \frac{dt.\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta}$ et $q = \int \frac{dt.\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta}$ inuentis his quantitatibus p et q, quae itidem ſunt functiones eiusdem variabilis t, capiatur interuallum $VZ = s$, quae eſt altera variabilis in calculum introducenda atque ex puncto Z ad axem demiſſo perpendiculo ZT, inuenimus $OT = p - s\,\text{ſin.}\,\omega$ et $TZ = q - s\,\text{coſ.}\,\omega$.

25. Quoniam igitur pro puncto Z ad planum reducto determinationem ſumus adepti, ponamus eius coordinatas $OT = T$ et $TZ = U$, quae ita per binas variabiles t et s definiuntur, vt ſit

$$T = p - s\,\text{ſin.}\,\omega = \int \frac{dt.\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta} - s\,\text{ſin.}\,\omega$$

$$U = q - s\,\text{coſ.}\,\omega = \int \frac{dt.\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta} - s\,\text{coſ.}\,\omega$$

vbi notandum angulum ω ita pendere ab angulis ζ et θ, vt ſit $d\omega = V(d\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta^2 + d\theta^2)$. Sunt vero hae coordinatae T et U eaedem, quas in prima ſolutione literis t et u deſignauimus, vnde eadem mutatione ibi facta, formulae pro ſolido ibi inuentae ad has redeunt

$$dx = l\,dT + \lambda\,dU;\quad dy = m\,dT + \mu\,dU;\quad dz = n\,dT + \nu\,dU$$

manentibus conditionibus quas ibi inuenimus ſcilicet:

$$ll + mm + nn = 1;\quad \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1\quad \text{et}\quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

26.

26. Hic autem pro iisdem coordinatis ſolidi, x, y et z, ſequentes inuenimus valores:

$$x = t - s\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\zeta;\quad y = u - s\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\zeta \quad\text{et}\quad z = v - s\,\text{coſ.}\,\theta$$

qui ob $d\,u = \frac{d\,t}{\text{tang.}\,\zeta}$ et $d\,v = \frac{d\,t}{\text{ſin.}\,\zeta.\,\text{tang.}\,\theta}$, differentiati praebent:

$$d\,x = d\,t - d\,s\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\zeta - s\,d\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\zeta - s\,d\,\theta\,\text{ſin}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta$$

$$d\,y = \frac{d\,t}{\text{tang.}\,\zeta} - d\,s\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\zeta + s\,d\,\zeta\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta - s\,d\,\theta\,\text{coſ}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta$$

$$d\,z = \frac{d\,t}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{tang.}\,\theta} - d\,s\,\text{coſ.}\,\theta + s\,d\,\theta\,\text{ſin.}\,\theta.$$

27. Antequam vlterius progrediamur, haud abs re erit praecipuas harum formularum relationes annotaſſe, ac primo quidem pro ipſis formulis finitis eliminando s obtinemus has relationes:

$$x\,\text{coſ.}\,\zeta - y\,\text{ſin.}\,\zeta = t\,\text{coſ.}\,\zeta - u\,\text{ſin.}\,\zeta;$$

$$x\,\text{ſin.}\,\zeta + y\,\text{coſ.}\,\zeta = t\,\text{ſin.}\,\zeta + u\,\text{coſ.}\,\zeta - s\,\text{ſin.}\,\theta;$$

$$x\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta + y\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta - z\,\text{ſin.}\,\theta = t\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta + u\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta - v\,\text{ſin.}\,\theta.$$

Deinde vero pro differentialibus ſequentes:

I. $d\,x\,\text{coſ.}\,\zeta - d\,y\,\text{ſin.}\,\zeta = - s\,d\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta$

II. $d\,x\,\text{ſin.}\,\zeta + d\,y\,\text{coſ.}\,\zeta = \frac{d\,t}{\text{ſin.}\,\zeta} - d\,s\,\text{ſin.}\,\theta - s\,d\,\theta\,\text{coſ,}\,\theta$ et

III. $d\,x\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta + d\,y\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta - d\,z\,\text{ſin.}\,\theta = - s\,d\,\theta.$

28. Quoniam autem hoc nouo calculo omnia ad binas variabiles t et s reduximus, dum in priori calculo vſi ſumus binis variabilibus T et U, videamus quomodo hae per illas exprimantur, atque ex

ex formulis quidem pro T et U inuentis ſtatim habemus:

$$dT = \frac{dt.}{ſin.\zeta.}\frac{ſin.\omega}{ſin.\theta} - ds\,ſin.\omega - sd\omega.coſ.\omega \text{ et}$$

$$dU = \frac{dt.}{ſin.\zeta.}\frac{coſ.\omega}{ſin.\theta} - ds\,coſ.\omega + sd\omega.\,ſin.\omega$$

quos valores ſi in formulis dx, dy et dz ante inventis ſubſtituamus et binas variabiles t et s probe diſtinguamus; ſequentes nanciſcemur expreſſiones:

$$dx = dt\frac{(l\,ſin.\omega + \lambda\,coſ.\omega)}{ſin.\zeta\,ſin.\theta} - sd\omega(l\,coſ.\omega - \lambda\,ſin.\omega) - ds(l\,ſin.\omega + \lambda\,coſ.\omega)$$

$$dy = dt\frac{(m\,ſin.\omega + \mu\,coſ.\omega)}{ſin.\zeta.\,ſin.\theta} - sd\omega(m\,coſ.\omega - \mu\,ſin.\omega) - ds(m\,ſin.\omega + \mu\,coſ.\omega)$$

$$dz = dt\frac{(n\,ſin.\omega + \nu\,coſ.\omega)}{ſin.\zeta\,ſin.\theta} - sd\omega(n\,coſ.\omega - \nu\,ſin.\omega) - ds(n\,ſin.\omega + \nu\,coſ.\omega)$$

quas cum iis quae per poſteriorem ſolutionem prodierunt comparemus, quae ſunt

$$dx = dt - sd\zeta\,ſin.\theta\,coſ.\zeta - sd\theta\,ſin.\zeta\,coſ.\theta - ds\,ſin.\zeta\,ſin.\theta$$

$$dy = \frac{dt}{tang.\zeta} + sd\zeta\,ſin.\zeta\,ſin.\theta - sd\theta\,coſ.\zeta\,coſ.\theta - ds\,coſ.\zeta\,ſin.\theta$$

$$dz = \frac{dt}{ſin.\zeta\,tang.\theta} \qquad + sd\theta\,ſin.\theta \qquad - ds\,coſ.\theta$$

atque primo membra per ds affecta vtrinque aequalia eſſe debent, vnde obtinemus has aequationes:

I. $l\,ſin.\omega + \lambda\,coſ.\omega = ſin.\zeta.\,ſin.\theta$

II. $m\,ſin.\omega + \mu\,coſ.\omega = coſ.\zeta.\,ſin.\theta$

III. $n\,ſin.\omega + \nu\,coſ.\omega = coſ.\theta.$

29 Quodſi iam hi valores in prioribus membris, quae differentiale dt et ab eo pendentia, $d\zeta$ $d\theta$ et $d\omega$ inuoluunt, ſubſtituantur, adipiſcemur ſequentes aequationes:

$$l\cos.\omega - \lambda\sin.\omega = \frac{d\zeta\cos.\zeta.\sin.\theta + d\theta\sin.\zeta\cos.\theta}{d\omega} = \frac{d(\sin.\zeta.\sin.\theta)}{d\omega}$$

$$m\cos.\omega - \mu\sin.\omega = -\frac{d\zeta.\sin.\zeta\sin.\theta + d\theta\cos.\zeta\cos.\theta}{d\omega} = \frac{d.\cos.\zeta.\sin.\theta}{d\omega}$$

$$n\cos.\omega - \nu\sin.\omega = -\frac{d\theta.\sin.\theta}{d\omega} = \frac{d.\cos.\theta}{d\omega}.$$

Hic imprimis notari meretur ex his formulis inventis alteram variabilem s prorſus exceſſiſſe, ita vt iam quantitates l, λ, m, μ, n, ν per vnicam variabilem t determinentur, alteramque s prorſus non inuoluant, dum contra ipſae quantitates T et U ambas variabiles t et s implicant.

30. Nunc pro functionibus l et λ definiendis has duas inuenimus aequationes:

$$l\sin.\omega + \lambda\cos.\omega = \sin.\zeta\sin.\theta$$

$$l\cos.\omega - \lambda\sin.\omega = \frac{d.(\sin.\zeta.\sin.\theta)}{d\omega}$$

Hinc prior in ſin. ω + poſterior in coſ. ω dat:

$$l = \sin.\zeta.\sin.\theta.\sin.\omega + \cos.\omega.\frac{d.(\sin.\zeta.\sin.\theta)}{d\omega}$$

at I. coſ. ω − II. ſin. ω dat.

$$\lambda = \sin.\zeta.\sin.\theta.\cos.\omega - \sin.\omega\frac{d(\sin.\zeta.\sin.\theta)}{d\omega}$$

Simili modo reliquae literae reperientur, vt ſequitur

$$m = \cos\zeta.\sin.\theta.\sin.\omega + \cos.\omega.\frac{d(\cos.\zeta.\sin.\theta)}{d\omega}$$

$$\mu = \cos.\zeta.\sin.\theta.\cos.\omega - \sin.\omega.\frac{d(\cos.\zeta.\sin.\theta)}{d\omega}$$

$$n = \cos.\theta\ \sin.\omega + \frac{\cos.\omega.d.\cos.\theta}{d\omega}$$

$$\nu = \cos.\theta.\cos.\omega - \frac{\sin.\omega.d.\cos.\theta}{d\omega}.$$

En ergo idoneos valores pro litteris l, λ, m, μ et n, ν, qui ita ſunt comparati, vt tres illas formulas $l\,d\mathrm{T} + \lambda\,d\mathrm{U}$, $m\,d\mathrm{T} + \mu\,d\mathrm{U}$ et $n\,d\mathrm{T} + \nu\,d\mathrm{U}$ fiant integrabiles, atque adeo ipſa integralia facile exhiberi queant, quippe quae ſunt

$$x = t - s\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\zeta;\ y = u - s\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\zeta;\ z = v - s\,\text{coſ.}\,\theta.$$

31. Quoniam ambae noſtrae ſolutiones penitus inter ſe conuenire debent, nullum eſt dubium, quin etiam reliquae conditiones ſupra memoratae impleantur, ſcilicet certo erit:

$$ll + mm + nn = 1;\ \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1;\ l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Ad quod oſtendendum ponamus breuitatis gratia $\text{ſin.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta = p$; $\text{coſ.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta = q$ et $\text{coſ.}\,\theta = r$, ita vt ſit

$$pp + qq + rr = 1,\ \text{ideoque}\ pdp + qdq + rdr = 0,$$

iam vero quum habeamus

$$l = p\,\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{dp}{d\omega}.\,\text{coſ.}\,\omega;\ m = q\,\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{dq}{d\omega}.\,\text{coſ.}\,\omega;\ n = r\,\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{dr}{d\omega}\,\text{coſ.}\,\omega$$

$$\lambda = p\,\text{coſ.}\,\omega - \tfrac{dp}{d\omega}.\,\text{ſin.}\,\omega;\ \mu = q\,\text{coſ.}\,\omega - \tfrac{dq}{d\omega}.\,\text{ſin.}\,\omega;\ \nu = r\,\text{coſ.}\,\omega - \tfrac{dr}{d\omega}.\,\text{ſin.}\,\omega$$

hinc inſtituto calculo reperiemus,

$$1^{\circ}\ ll + mm + nn = (pp + qq + rr)\,\text{ſin.}\,\omega^2 + \tfrac{2\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega}{d\omega}(pdp + qdq + rdr) + \tfrac{\text{coſ.}\,\omega^2}{d\omega^2}(dp^2 + dq^2 + dr^2)\ \text{ſiue}$$

$$ll + mm + nn = \text{ſin.}\,\omega^2 + \tfrac{\text{coſ.}\,\omega^2}{d\omega^2}(dp^2 + dq^2 + dr^2),$$

ſicque tota quaeſtio in valore $dp^2 + dq^2 + dr^2$ inveſtigando verſatur. Quum autem ſit

$$dp = d\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta + d\theta\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ}\,\theta$$

$$dq = -d\zeta\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta + d\theta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta\ \text{et}\ dr = -d\theta\,\text{ſin.}\,\theta;$$

colli-

colligemus

$$dp^2 + dq^2 + dr^2 = d\zeta^2 \sin.\theta^2 + d\theta^2 = d\omega^2,$$

ita vt iam certum ſit eſſe

$$\frac{dp^2 + dq^2 + dr^2}{d\omega^2} = 1$$

quocirca manifeſtum eſt fore:

$$ll + mm + nn = \sin.\omega^2 + \cos.\omega^2 = 1.$$

32. Simili modo pro litteris Graecis reperiemus:

$$\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = (pp + qq + rr)\cos.\omega^2 - \frac{2\sin.\omega\cos.\omega}{d\omega}(pdp + qdq + rdr)$$
$$\frac{\sin.\omega^2}{d\omega^2}(dp^2 + dq^2 + dr^2),$$

quae manifeſto praebet vt ante

$$\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = \cos.\omega^2 + \sin.\omega^2 = 1.$$

Supereſt igitur vt tertiam proprietatem examinemus pro qua nanciſcimur:

$$l\lambda = pp\sin.\omega\cos.\omega - \frac{pdp}{d\omega}\sin.\omega^2 + \frac{pdp}{d\omega}\cos.\omega^2 - \frac{dp^2}{d\omega^2}\sin.\omega\cos.\omega$$
$$m\mu = qq\sin.\omega\cos.\omega - \frac{qdq}{d\omega}\sin.\omega^2 + \frac{qdq}{d\omega}\cos.\omega^2 - \frac{dq^2}{d\omega^2}\sin.\omega\cos.\omega$$
$$n\nu = rr\sin.\omega\cos.\omega - \frac{rdr}{d\omega}\sin.\omega^2 + \frac{rdr}{d\omega}\cos.\omega^2 - \frac{dr^2}{d\omega^2}\sin.\omega\cos.\omega$$

quibus in vnam ſummam collectis fiet

$$l\lambda + m\mu + n\nu = \sin.\omega\cos.\omega - \sin.\omega\cos.\omega = 0.$$

Atque hoc modo Problema illud Analyticum ſupra commemoratum (7) feliciſſime ſolutum dedimus, quae ſolutio ita ſuccincte ſe habet.

Problema Analyticum.

33. Propoſitis duabus variabilibus T et U earum ſex inuenire functiones l, m, n et λ, μ, ν ita comparatas, vt ſex ſequentibus conditionibus ſatisfiat:

I°. $\left(\frac{dl}{dU}\right)=\left(\frac{d\lambda}{dT}\right)$; II°. $\left(\frac{dm}{dU}\right)=\left(\frac{d\mu}{dT}\right)$; III^{io} $\left(\frac{dn}{dU}\right)=\left(\frac{d\nu}{dT}\right)$

IV°. $ll+mm+nn=1$; V°. $\lambda\lambda+\mu\mu+\nu\nu=1$;

VI. $l\lambda+m\mu+n\nu=0$.

Solutio.

Introductis in calculum duabus nouis variabilibus s et t, huius poſterioris t capiantur duae functiones quaecunque ζ et θ, quae ſcilicet vt anguli ſpectentur, e quibus formetur nouus angulus ω, ita vt ſit $d\omega=\sqrt{(d\zeta^2 \text{ſin.}\,\theta^2+d\theta^2)}$, tum vero hinc binae variabiles T et U, ita determinentur, vt ſit

$$T=\int\frac{dt\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta}-s\,\text{ſin.}\,\omega$$

$$U=\int\frac{dt\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta}-s\,\text{coſ.}\,\omega$$

quo facto ſex functiones quaeſitae ita ſe habebunt

$l=\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\omega+\frac{\text{coſ.}\,\omega}{d\omega}d(\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta)$; $\lambda=\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\omega-\frac{\text{ſin.}\,\omega}{d\omega}d(\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta)$

$m=\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\omega+\frac{\text{coſ.}\,\omega}{d\omega}d(\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta)$; $\mu=\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\omega-\frac{\text{ſin.}\,\omega}{d\omega}d(\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta)$

$n=\text{coſ.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\omega+\frac{\text{coſ.}\,\omega}{d\omega}d.\,\text{coſ.}\,\theta$; $\nu=\text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\omega-\frac{\text{ſin.}\,\omega}{d\omega}d.\,\text{coſ.}\,\theta$.

His autem valoribus, ſequentes tres formulae differentiales:

I°. $l\,dT+\lambda\,dU$; II°. $m\,dT+\mu\,dU$; III^{io} $n\,dT+\nu\,dU$

quip-

quippe quibus tres priores conditiones continentur, non ſolum integrabiles redduntur, ſed etiam ipſa integralia ſequenti modo exprimentur:

$$\text{I}^\circ.\ \int (l\,d\text{T} + \lambda\,d\text{U}) = t - s\ \text{ſin.}\,\theta\ \text{ſin.}\,\zeta$$

$$\text{II}^\circ.\ \int (m\,d\text{T} + \mu\,d\text{U}) = \int \frac{dt}{\text{tang.}\,\zeta} - s\ \text{ſin.}\,\theta\ \text{coſ.}\,\zeta$$

$$\text{III}^\circ.\ \int (n\,d\text{T} + \nu\,d\text{U}) = \int \frac{dt}{\text{ſin.}\,\zeta\ \text{tang.}\,\theta} - s\ \text{coſ.}\,\theta,$$

quae ſolutio adeo pro completa haberi debet propterea quod duas functiones arbitrarias complectitur.

34. Haec euolutio ſine dubio maximi eſt momenti atque imprimis meretur, vt omni ſtudio in ſingula eius elementa inquiramus. Ac primo quidem quum introductis litteris p, q et r, ita vt ſit

$$pp + qq + rr = 1 \text{ et } dp^2 + dq^2 + dr^2 = d\omega^2$$

inuenerimus

$$l\ \text{ſin.}\,\omega + \lambda\ \text{coſ.}\,\omega = p \text{ et } l\ \text{coſ.}\,\omega - \lambda\ \text{ſin.}\,\omega = \frac{dp}{d\omega},$$

ſi illam differentiemus habebimus

$$dl\ \text{ſin.}\,\omega + d\lambda\ \text{coſ.}\,\omega + l\,d\omega\ \text{coſ.}\,\omega - \lambda\,d\omega\ \text{ſin.}\,\omega = dp$$

ideoque

$$dl\ \text{ſin.}\,\omega + d\lambda\ \text{coſ.}\,\omega = 0, \text{ ita vt ſit } \frac{d\lambda}{dl} = -\text{tang.}\,\omega.$$

Simili vero modo etiam reperiemus

$$\frac{d\mu}{dm} = -\text{tang.}\,\omega \text{ et } \frac{d\nu}{dn} = -\text{tang.}\,\omega.$$

En ergo pulcherrimam proprietatem, quae inter ſex noſtras functiones l, m, n et λ, μ, ν intercedit, quam hoc modo repraeſentare licet, vt ſit

$$dl : d\lambda = dm : d\mu = dn : d\nu = -\text{coſ.}\,\omega : \text{ſin.}\,\omega$$

35.

35. Quod ſi haec probe perpendamus, veſtigia quaedam deprehendimus quibus inſiſtentes ſolutionem directam problematis huius difficillimi indagare poterimus. Scilicet conſtitutis his aequationibus:

$$dx = l\,dT + \lambda\,dU;\; dy = m\,dT + \mu\,dU;\; dz = n\,dT + \nu\,dU$$

primum obſeruari conuenit quantitates l, m, n et λ, μ, ν functiones eſſe debere vnicae nouae variabilis, quae tamen ad binas principes variabiles T et U certam quandam teneat relationem. Sit igitur ω iſta noua variabilis, cuius ſex noſtrae quantitates ſint certae quaedam functiones. Atque iam vidimus ſi litterae p, q et r tales functiones ipſius ω denotent, vt ſit

$$pp + qq + rr = 1 \text{ et } dp^2 + dq^2 + dr^2 = d\omega^2,$$

tum ſtatuendo:

$$l = p \,\text{ſin.}\, \omega + \frac{dp}{d\omega}.\text{coſ.}\,\omega;\quad m = q\,\text{ſin.}\,\omega + \frac{dq}{d\omega}\,\text{coſ.}\,\omega;$$
$$n = r\,\text{ſin.}\,\omega + \frac{dr}{d\omega}.\text{coſ.}\,\omega$$

$$\lambda = p\,\text{coſ.}\,\omega - \frac{dp}{d\omega}.\text{ſin.}\,\omega;\quad \mu = q\,\text{coſ.}\,\omega - \frac{dq}{d\omega}.\text{ſin.}\,\omega;$$
$$d\nu = r\,\text{coſ}\,\omega - \frac{dr}{d\omega}.\text{ſin.}\,\omega$$

has tres conditiones iam adimpleri ſcilicet:

$$ll + mm + nn = 1;\; \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1;\; \text{et } l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

praeterea vero hinc modo deduximus iſtam inſignem proprietatem, vt ſit

$$d\lambda = -dl\,\text{tang.}\,\omega;\; d\mu = -dm\,\text{tang.}\,\omega;\; \text{et } d\nu = -dn\,\text{tang.}\,\omega$$

quae nobis inſignem praeſtabit vſum ad reliquas conditiones adimplendas vti mox patebit.

36. Hac ſcilicet tres conditiones id poſtulant, vt formulae illae differentiales pro dx, dy et dz exhibitae integrabiles reddantur, quem in finem relationem illam, quae inter binas variabiles T et U et inter ω intercedere debet, inueſtigari oportet. Ad hoc praeſtandum conuertantur illae aequationes differentiales per integrationem in ſequentes formas;

$$x = l\,T + \lambda\,U - \int (T\,dl + U\,d\lambda);$$
$$y = m\,T + \mu\,U - \int (T\,dm + U\,d\mu);$$
$$z = n\,T + \nu\,U - \int (T\,dn + U\,d\nu);$$

nunc vero hac tres nouae formulae integrales induent ſequentes formas:

$$x = l\,T + \lambda\,U - \int dl\,(T - U\,\mathrm{tang}\,\omega);$$
$$y = m\,T + \mu\,U - \int dm\,(T - U\,\mathrm{tang.}\,\omega);$$
$$z = n\,T + \nu\,U - \int dn\,(T - U\,\mathrm{tang.}\,\omega).$$

Quum igitur l, m et n ſint functiones eiusdem variabilis ω, manifeſtum eſt ternas has formulas reuera integrabiles reddi, ſi modo expreſſio $T - U\,\mathrm{tang.}\,\omega$ fuerit functio quaecunque nouae variabilis ω; quare ſi talis functio indicetur littera Ω habebimus $T - U\,\mathrm{tang.}\,\omega = \Omega$, qua aequatione quaeſita illa relatio, quae inter variabiles T, U et ω intercedere debet determinatur.

37. Quare ſi pro Ω accipiatur pro lubitu functio quaecunque ipſius ω, cuius etiam vt vidimus litterae p, q et r ſunt certae functiones, per quas iam litteras l, m, n et λ, μ, ν definiuimus, binae variabiles T et U, ita debent eſſe comparatae, vt

 fiat

fiat $T = \Omega + U \,\text{tang.}\, \omega$, ſcilicet nunc tantum binas variabiles U et ω in calculo retineamus et loco T iſtum valorem introducamus, tum igitur ternae noſtrae formulae integrales ita repraeſentari poterunt:

$$x = l\Omega + l U \,\text{tang.}\, \omega + \lambda U - \int \Omega\, dl$$
$$y = m\Omega + m U \,\text{tang.}\, \omega + \mu U - \int \Omega\, dm$$
$$z = n\Omega + n U \,\text{tang.}\, \omega + \nu U - \int \Omega\, dn$$

quae expreſſiones facile transformantur in ſequentes

$$x = U(l \,\text{tang.}\, \omega + \lambda) + \int l\, d\Omega = \frac{Up}{\text{coſ.}\, \omega} + \int p \,\text{ſin.}\, \omega.\, d\Omega + \int \frac{dp\, d\Omega}{d\omega} \,\text{coſ.}\, \omega$$

$$y = U(m \,\text{tang.}\, \omega + \mu) + \int m\, d\Omega = \frac{Uq}{\text{coſ.}\, \omega} + \int q \,\text{ſin.}\, \omega.\, d\Omega + \int \frac{dq\, d\Omega}{d\omega} \,\text{coſ.}\, \omega$$

$$z = U(n \,\text{tang.}\, \omega + \nu) + \int n\, d\Omega = \frac{Ur}{\text{coſ.}\, \omega} + \int r \,\text{ſin.}\, \omega\, d\Omega + \int \frac{dr\, d\Omega}{d\omega} \,\text{coſ.}\, \omega.$$

TERTIA SOLVTIO
Problematis principalis, ex Theoria Lucis et vmbrae petita.

38. Quae vulgo in Opticis de luce et vmbra tradi ſolent, plerumque ad caſum maxime ſpecialem ſunt reſtricta, quo tam corpori lucido quam opaco a quo vmbra proiicitur, figura ſphaerica tribuitur, vnde vmbra oritur vel cylindrica vel conica ſiue conuergens ſiue diuergens, prout corpus opacum vel aequale, vel minus vel maius fuerit quam corpus lucidum. Quando autem vel corporis lucidi vel opaci vel adeo

adeo vtriusque ſigura a ſphaerica recedit, vix quicquam in libris, qui de hac re prodierunt reperimus in quo acquieſcere queamus; quin etiam ſi hoc argumentum in genere pertractare velimus, vtrique corpori lucido et opaco figuras quascunque tribuentes, quaeſtio exoritur maxime ardua atque adeo in eam partem Analyſeos infinitorum circa functiones binarum, pluriumue variabilium, quae non ita pridem demum excoli eſt coepta, referenda.

39. Quod autem imprimis circa hanc Theoriam ad praeſens noſtrum inſtitutum pertinet, eſt, quod ſemper figurae vmbrarum ita ſint comparatae, vt earum ſuperficiem in planum explicare liceat, ex quo viciſſim intelligitur, ſi pro figura quacunque tam corporis lucidi, quam opaci formam vmbrae determinare poterimus, tum ſimul quoque problema noſtrum perfecte fore ſolutum.

40. Quod autem ſemper figura vmbrae noſtro problemati ſubiiciatur, hoc modo facile oſtendi poteſt. Quoniam vmbra ab extremis corporis lucidi radiis, qui ſimul corpus opacum ſtringunt terminatur, primo patet in ſuperficie vmbrae cuiusque infinitas dari lineas rectas, quandoquidem ſinguli radii ſecundum lineas rectas progrediuntur, praeterea vero etiam omnes hi radii vtrumque corpus tam lucidum quam opacum tangent, uare ſi planum quodcunque concipiatur, quod haec duo corpora ſimul contingat ac punctum contactu quidem in corpore lucido notetur littera M, in opaco vero littera *m*,

 perſpi-

perſpicuum eſt, lineam rectam M m productam radium lucis exhibere, quo vmbra terminatur, quod etiam intelligendum eſt de aliis radiis proximis, qui ex puncto M ſuper eodem plano tangente educuntur, quippe qui itidem vt tangentes corporis opaci ſpectari poſſunt, ex quo ipſa palmaria proprietas noſtri problematis exſurgit, quod quaeuis binae rectae proximae in ſuperficie ducendae ſimul in eodem plano reperiantur.

41. Verum haec Theoria lucis et vmbrae nimis late patet, quam vt eam hic pro dignitate pertractare locus permittat; tantum igitur inde depromamus, quantum ad praeſens inſtitutum expediendum ſufficit. Sepoſita autem tam corporis lucidi quam opaci figura, hic tantum formam quaſi coni vmbroſi ſpectemus, quem in finem duas eius ſectiones inter ſe parallelas ac dato interuallo diſtantes contemplemur, quibus quum figuras quaſcunque tribuere liceat, manifeſtum eſt, hanc conſiderationem omnes prorſus vmbrarum figuras in ſe complecti.

Tab. I. Fig. 6. 42. Sint igitur duae hae Sectiones normales in planum tabulae rectaeque A a perpendiculariter inſiſtentes, ac prior quidem ſit curua B U U′ cuius natura aequatione quacunque inter coordinatas A T $=$ T et T U $=$ U exprimatur; ſimili modo ſit $b\, u\, u'$ altera curua a priore vtcunque diuerſa pro qua data ſit aequatio inter coordinatas $a\, t = t$, $t\, u = u$, interuallum autem harum ſectionum ponatur A $a = a$, hic quidem alteram Sectionem B U U′ tamquam diſcum

diſcum planum lucidum ſpectare licebit, et dum altera $b\,u\,u'$ diſcum planum opacum refert, a radiis lucidis ille ipſe conus vmbroſus orietur, quem contemplamur.

43. Puncta autem U et u ita ſint ſumta, vt recta U u producta referat radium vmbram terminantem, quae cum in plano vtrumque diſcum tangente, ſita eſſe debeat, neceſſe eſt vt ambo elementa, $U\,U'$ et $u\,u'$ cum recta U u in eodem plano ſint ſita ex quo perſpicuum eſt haec duo elementa inter ſe parallela eſſe debere, ex quo ſequitur inter differentialia eandem rationem ſubſiſtere debere, ita vt ſit $dT : dU :: dt : du$, quare ſi ponatur $dU = \Phi dT$ erit etiam $du = \Phi dt$.

44. Spectetur igitur haec quantitas Φ, vt variabilis quantitas principalis, per quam reliquae omnes determinentur ſequenti modo. Pro priore curua B U, ſit T functio quaecunque ipſius Φ, cuius quippe natura, indoles curuae B U U' definitur tum vero erit $dU = \Phi dT$ et $U = \int \Phi dT$, euidens autem eſt hoc modo curuam quamcunque per variabilem Φ exprimi poſſe. Simili autem modo pro altera curua $b\,u\,u'$, abſciſſa t certe aequabitur functioni ipſius Φ, ac tum itidem habebitur $du = \Phi dt$ ac $u = \int \Phi dt$, vnde quum ambae curuae penitus arbitrio noſtro relinquantur, pro litteris T et t functiones quaſcunque ipſius Φ aſſumere licet, quibus conſtitutis ſimul ambae applicatae U et u determinantur.

45. Sumatur nunc in recta Uu punctum quodcunque Z, quod quum ſitum ſit in ſuperficie quam inueſtigamus, inde ad planum tabulae demittamus perpendiculum Z Y in rectam T t incidens et ex Y ad axem noſtrum A a agatur normalis Y X, vt pro puncto indefinito Z ternas obtineamus coordinatas, quas vocemus:

$$AX = x, \quad XY = y, \quad \text{et} \quad YZ = z$$

atque nunc facile erit aequationem inter has ternas coordinatas, qua natura ſuperficiei quaeſitae exprimatur eruere

46. Principia ſcilicet Geometriae ſtatim nobis ſuppeditant has analogias:

$$T - t : a :: T - y : x; \quad \text{ſeu} \quad Tx - tx = aT - ay$$

$$U - u : a :: U - z : x; \quad \text{ſiue} \quad Ux - ux = aU - az,$$

vnde per ambas variabiles Φ et x, ambas coordinatas y et z definire licebit, ſiquidem habebimus:

$$y = T - \frac{x(T - t)}{a} \quad \text{et} \quad z = U - \frac{x(U - u)}{a};$$

quodſi enim ex his duabus aequationibus variabilis Φ cum quantitatibus inde pendentibus T, t et U, u eliminentur, reſultabit aequatio naturam noſtrae ſuperficiei exprimens.

47. Tali autem eliminatione neutiquam indigemus, quum natura ſuperficiei multo clarius ex binis aequationibus inuentis perſpici poſſit, quae per ſe iam ita ſunt ſimplices, vt ſolutionem commodiorem deſiderare nefas foret, interim tamen formas harum

harum aequationum aliquantillum immutare haud inutile erit. Generaliori autem modo, valores pro y et z ita repraeſentemus $y = P + Qx$ et $z = R + Sx$, vbi iam litterae P, Q, R, S ſignificent functiones alterius varibialis Φ, atque nunc quaeſtio in hoc verſabitur, cuiusmodi hae functiones eſſe debeant, vt binae aequationes exhibitae ſuperficiem in planum explicabilem definiant.

48. Comparemus ergo has formas aſſumtas cum iis quas ante inuenimus, ac primo quidem habebimus:

$$P = T \text{ et } R = U, \; Q = \frac{t - T}{a}, \; S = \frac{u - U}{a}$$

vbi quum T et t ſint functiones arbitrariae ipſius Φ, euidens eſt functiones P et Q etiam pro lubitu accipi poſſe, at quoniam U et u certo modo a T et t pendent, etiam functiones R et S certo modo a binis prioribus P et Q pendere debebunt. Quum autem ſit

$$T = P, \; t = P + aQ, \; U = R \text{ et } u = R + aS$$

hos valores ſubſtituamus in formulis fundamentalibus

$$dU = \Phi dT \text{ et } du = \Phi dt$$

et obtinebimus

$$dR = \Phi dP \text{ et } dR + adS = \Phi dP + a\Phi dQ$$

ſeu $dS = \Phi dQ$.

49. Nunc igitur quoque ipſam quantitatem Φ ex calculo exturbare poterimus, quum ſit vel

$\Phi =$

$\Phi = \frac{dR}{dP}$ vel $\Phi = \frac{dS}{dQ}$ ita vt eius loco altera litterarum R vel S arbitrio noſtro permittatur, quare ſi P, Q et R fuerint functiones quaecunque eiusdem cuiusdam variabilis, tum S talis functio eiusdem variabilis eſſe debet, vt ſit $dS = \frac{dQ\,dR}{dP}$ ſiue $\frac{dS}{dR} = \frac{dQ}{dP}$; quin etiam adhuc commodius haec ſolutio ita adornari poterit, vt dicamus pro litteris P, Q, R S eiusmodi functiones cuiuspiam variabilis aſſumi debere, vt fiat $\frac{dS}{dR} = \frac{dQ}{dP}$ vel etiam $\frac{dS}{dQ} = \frac{dR}{dP}$, quod ſi fuerit praeſtitum hae duae aequationes

$$y = P + Qx \text{ et } z = R + Sx$$

naturam ſolidi quaeſiti expriment.

50. Perinde eſt quacunque littera illa variabilis cuius functiones ſunt P, Q, R et S indicetur, quin etiam pro ea vna harum quatuor P, Q, R, S aſſumi poterit, cuius deinde tres reliquae functiones ſunt intelligendae. Hinc quamdiu vna earum valorem conſtantem retinet, reliquae etiam manebunt conſtantes, ac tum ex variabilitate ipſius x orientur omnes lineae rectae, quas in ſuperficie ducere licet.

51. Conditioni autem praeſcriptae $\frac{dS}{dQ} = \frac{dR}{dP}$, manifeſto ſatisfiet ſumendo quantitates P et R conſtantes; vnde ſolutio particularis problematis noſtri ſequitur. Ponamus enim eſſe $P = A$ et $R = B$, ita vt nunc S ſpectanda ſit, vt functio quaecunque ipſius Q. At ſemper coordinatas ita variare licet vt fiat $A = 0$ et $B = 0$, quo facto ob $Q = \frac{y}{x}$ erit $\frac{z}{x} = S$ functio homogenea nullius dimenſionis $= \Phi$ ipſa-

ipſarum x et y, ſiue z aequabitur functioni homogeneae vnius dimenſionis ipſarum x et y, quod eſt criterium ſuperficierum conicarum.

52. Conditioni etiam ſatisfit ſumendo $Q = o$ et $S = o$, ita vt R maneat functio quaecunque ipſius P, quo caſu pro z prodibit functio quaecunque ipſius y, quae quum duas tantum variabiles inuoluat y et z erit pro ſolido cylindrico. Idem vſu venit, ſi ſtatuamus vel $P = o$ et $Q = o$ vel $R = o$ et $S = o$, priore enim caſu habetur $y = o$ poſteriore vero $z = o$, vtroque caſu aequatio eſt pro plano.

53. Verum vt etiam alias ſpecies huiusmodi ſolidorum cognoſcamus pro ſimplicioribus accipiamus:

$$P = a\,\Phi^{\alpha},\quad Q = b\,\Phi^{\beta},\quad R = c\,\Phi^{\gamma};\quad S = d\,\Phi^{\delta}$$

atque vt conditioni praeſcriptae ſatisfiat neceſſe eſt ſit $\frac{b\,\beta}{a\,\alpha}\,\Phi^{\beta-\alpha} = \frac{d\,\delta}{c\,\gamma}\,\Phi^{\delta-\gamma}$, vnde duplex determinatio oritur, prima ſcilicet exponentium $\beta - \alpha = \delta - \gamma$ altera vero coefficientium: $\frac{b\,\beta}{a\,\alpha} = \frac{d\,\delta}{c\,\gamma}$, cui vtrique ſatisfiet ſumendo vt ſequitur

$$a = \frac{f\,g}{\varkappa+\lambda};\quad b = \frac{f\,h}{\varkappa+\mu};\quad c = \frac{g\,k}{\lambda+\nu};\quad d = \frac{h\,k}{\mu+\nu}$$

$$\alpha = \varkappa+\lambda;\quad \beta = \varkappa+\mu;\quad \gamma = \lambda+\nu;\quad \delta = \mu+\nu,$$

tum vero aequationes erunt:

$$y = a\,\Phi^{\alpha} + b\,\Phi^{\beta}\,x;\quad z = c\,\Phi^{\gamma} + d\,\Phi^{\delta}\,x.$$

54. In numeris ergo determinatis conſideremus hunc caſum:

$$y = 2\Phi + 3\Phi^2 x \text{ et } z = \Phi^3 + 2\Phi^3 x$$

vnde facta eliminatione litterae Φ ſequens elicitur aequatio:

$$4y^3 x + 72y^2 xxz - yy - 18yxz + 27xxzz + 2z = 0$$

quae ergo eſt pro ſolido, cuius ſuperficiem in planum explicare licet.

ME-

METHODVS NOVA ET FACILIS CALCVLVM VARIATIONVM TRACTANDI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si detur aequatio quaecunque inter binas variabiles x et y ſeu quod eodem redit, ſi y fuerit functio quaecunque ipſius x, tum omnes expreſſiones quomodocunque ex his duabus quantitatibus x et y formatae et compoſitae tamquam functiones vnius variabilis x, ſpectari poterunt; ita vt pro quouis valore determinato ipſius x, determinatos quoque valores ſortiantur.

2. Huiusmodi autem expreſſionum ex quantitatibus x et y formatarum, tria genera conſtitui conuenit; ad quorum primum referimus omnes illas expreſſiones in quibus tantum ipſae quantitates x et y occurrunt et per operationes quascunque ſiue algebraicas ſiue etiam tranſcendentes inter ſe ſunt complicatae, cuiusmodi ſunt $\alpha x^3 + \beta x y + \gamma y^3$, item $e^{\alpha x}$ Arc. ſin. y, in qua poſteriore operationes tranſcendentes cernuntur. Secundum autem genus eas complectitur expreſſiones in quibus praeter ipſas

 quan-

quantitates x et y etiam ratio differentialium occurrit, quam rationem adeo ad differentialia cuiusque gradus extendimus, cuiusmodi expreſſionum indolem quo clarius perſpiciamus, ponatur more ſolito

$$dy = p\,dx;\ dp = q\,dx;\ dq = r\,dx \text{ etc.}$$

ac tales expreſſiones erunt functiones quantitatum x, y, p, q, r etc. Tertium denique genus eiusmodi expreſſiones continet in quibus praeterea formulae integrales inuoluuntur, quorſum pertinent expreſſiones illae in calculo variationum imprimis conſideratae, quae hac forma ſunt repraeſentatae $\int V\,dx$, vbi V eſt functio quaecunque non ſolum ipſarum x et y; ſed etiam quantitatum p, q, r etc., quin etiam ea alias inſuper formulas integrales inuoluere poteſt.

3. His circa terna huiusmodi expreſſionum genera conſtitutis, facilius indolem calculi variationum explicare poterimus. Totum enim negotium huc redit, vt ſi propoſita fuerit relatio quaecunque inter x et y eaque aliquantillum varietur, ſeu eius loco alia quaepiam relatio inter x et y ab illa infinite parum quomodocunque diſcrepans adhibeatur, inueſtigari oporteat, quantam mutationem omnes illae expreſſiones, tam primi, quam ſecundi et tertii generis ſint ſubiturae ad quod inueniendum in calculo variationum prouti equidem eum olim tractaui, praeter differentiale dy, quo quantitas y augetur dum x in $x+dx$ abit, ipſi quantitati y aliud incrementum δy tribuitur penitus ab arbitrio noſtro pendens neque per x determinatum, cui incremento varia-

variationis nomen indideram atque methodum expoſueram variationes inde in ſingula expreſſionum genera redundantes inueniendi.

4. Videbatur igitur calculus variationum omnino ſingulare calculi genus conſtituere, verum poſtquam eius indolem accuratius eſſem perſcrutatus, vniuerſum hunc calculum perſpexi leui facta immutatione ad ſecundam partem calculi integralis cuius elementa in tertio volumine operis mei de hoc argumento expoſui, reduci poſſe. Pertractaui autem in iſta ſecunda parte eas integrationes, quae circa functiones duarum variabilium verſantur in quo calculi genere etiam nunc vix vltra prima elementa progredi licuit.

5. Illius ſcilicet incrementi loco, quod variationem appellaui, ipſam quantitatem y non amplius tamquam functionem ſolius variabilis x conſidero, ſed eam tamquam functionem binarum variabilium x et t in calculum introduco, ſic enim dum $dx(\frac{dy}{dx})$ ſignificat verum differentiale ipſius y haec formula $dt(\frac{dy}{dt})$ idem ſignificare poterit, quod antea ſigno δy indicauimus. Quo haec reddantur clariora concipiamus y vt applicatam cuiuſpiam curuae abſciſſae x reſpondentem atque in calculo variationum, alia relatio requiritur, quae omnes alias curuas huic ſaltem proximas complectatur, omnes autem huiusmodi curuas, ſi X denotet illam functionem cui y aequatur tali aequatione contineri poſſe: $y = X + tV$ manifeſtum eſt; denotante V functionem quamcun-

que ipſius x. Sumta enim t infinite parua haec aequatio omnes omnino lineas curuas propoſitae proximas in ſe comprehendet atque adeo hanc formam multo generaliorem reddere licet, ita vt pro y functio quaecunque binarum variabilium x et t vſurpari poſſit, dummodo ea ita fuerit comparata, vt poſito $t = 0$, prodeat ipſa functio propoſita $y = X$.

7. Pro variatione igitur inuenienda, quantitas x vt conſtans ſpectari ipſius vero y differentiale tantum ex variabilitate ipſius t deſumi debet; vnde ſi expreſſio propoſita fuerit primi generis functio ſcilicet ipſarum x et y tantum, quam littera Z deſignemus; ponamus differentiatione conſueta prodire $M\,dx + N\,dy$ atque nunc pro variatione inuenienda fiat $dx = 0$, at loco dy ſcribatur $dt(\frac{dy}{dt})$, quippe quod eſt incrementum ex ſola variabilitate t oriundum. Quo facto variatio quaeſita huius expreſſionis Z erit $= N\,dt(\frac{dy}{dt})$. Quare ſi ipſa variatio ſimili modo per $dt(\frac{dZ}{dt})$ indicetur, habebimus $(\frac{dZ}{dt}) = N(\frac{dy}{dt})$.

7. Nunc ad expreſſiones ſecundi generis progrediamur, in quibus quum praeter x et y occurrant quantitates p, q, r etc. harum variationes quatenus y etiam a variabili t pendet, per legem generalem his formulis exprimentur

$$dt(\frac{dp}{dt});\ dt(\frac{dq}{dt});\ dt(\frac{dr}{dt}) \text{ etc.}$$

Quum autem pro ſola variabili x, ſit

$$p = (\frac{dy}{dx});\ q = (\frac{dp}{dx}) = (\frac{ddy}{dx^2});\ \text{et}\ r = (\frac{dq}{dx}) = (\frac{ddp}{dx^2}) = (\frac{d^3y}{dx^3}) \text{ etc.}$$

erit

erit per regulas generales differentiandi functiones duarum variabilium

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)=\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x\,d\,t}\right);\ \left(\frac{dq}{dt}\right)=\left(\frac{d^3\,y}{d\,x^2\,d\,t}\right);\ \left(\frac{dr}{dt}\right)=\left(\frac{d^4\,y}{d\,x^3\,d\,t}\right) \text{ etc.}$$

vbi meminiſſe iuuabit formulam verbi gratia $\left(\frac{d^3\,y}{d\,x^2.\,d\,t}\right)$ prodire, ſi functio y ter differentietur et duabus vicibus ſola x, vna vice autem ſola t variabilis ſumatur tum vero qualibet differentiatione differentialia ſimplicia $d\,x$ vel $d\,t$ abiiciantur.

8. His expeditis ſit iam Z functio quaecunque ipſarum x, y, p, q, r etc., hic quidem nullo adhuc reſpectu habito ad variabilem t, quippe quae tantum in ſubſidium variationis introducitur, atque differentiatione more ſolito facta prodeat

$$d\mathrm{Z}=\mathrm{M}\,dx+\mathrm{N}\,dy+\mathrm{P}\,dp+\mathrm{Q}\,dq+\mathrm{R}\,dr \text{ etc.}$$

nunc igitur pro variatione ſeu $d\,t\left(\frac{d\,\mathrm{Z}}{d\,t}\right)$ inuenienda ſcribi debebit vt ſequitur:

$$dx=0;\ dy=dt\left(\frac{dy}{dt}\right),\ dp=dt\left(\frac{d\,p}{d\,t}\right)=dt\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x\,d\,t}\right),$$

$$dq=dt\left(\frac{d^3\,y}{d\,x^2\,d\,t}\right),\ dr=dt\left(\frac{d^4\,y}{d\,x^3\,d\,t}\right) \text{ etc.}$$

atque variatio quaeſita erit

$$dt\left(\frac{d\mathrm{Z}}{dt}\right)=\mathrm{N}dt\left(\frac{dy}{dt}\right)+\mathrm{P}dt\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x\,dt}\right)+\mathrm{Q}\,dt\left(\frac{d^3\,y}{d\,x^2\,dt}\right)+\mathrm{R}\,dt\left(\frac{d^4\,y}{d\,x^3\,dt}\right) \text{ etc.}$$

vnde ſequitur diuiſione per $d\,t$ facta fore:

$$\left(\frac{d\,\mathrm{Z}}{d\,t}\right)=\mathrm{N}\left(\frac{d\,y}{d\,t}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x\,d\,t}\right)+\mathrm{Q}\left(\frac{d^3y}{d\,x^2\,d\,t}\right)+\mathrm{R}\left(\frac{d^4\,y}{d\,x^3\,d\,t}\right) \text{ etc.}$$

9. Sit nunc etiam expreſſio quaecunque tertii generis propoſita $\int \mathrm{Z}\,d\,x$, vbi Z ſit functio quaecunque

cunque ipſarum x, y, p, q, r etc. ita vt per differentiationem ordinariam habeatur:

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr,$$

vbi quidem hactenus nulla ratio nouae variabilis t eſt habita atque integratio formulae propoſitae $\int Z dx$ per ſolam variabilem x eſt expedienda, quo obſervato, quaeſtio huc redit, vt ſi iam y vt functio binarum variabilium x et t conſideretur et vbique quantitas y elemento $dt(\frac{dy}{dt})$ augeatur, augmentum quod ipſa formula integralis $\int Z dx$ inde capiet definiatur, hoc enim augmentum ipſa erit variatio formulae integralis propoſitae.

10 Quare ad hanc variationem inueniendam in functione illa Z vbique loco y ſcribatur eius valor auctus $y + dt(\frac{dy}{dt})$, ſicque vt ante vidimus, ipſa functio Z augmentum capiet $dt(\frac{dZ}{dt})$ ex quo ipſa formula integralis augmentum capiet hoc: $\int dt(\frac{dZ}{dt})dx$, quod erit ipſa variatio quaeſita. Quoniam vero in hac integratione ſola x pro variabili habetur, elementum dt ante ſignum poni poterit ita vt iam variatio futura ſit $= dt\int dx(\frac{dZ}{dt})$.

11. Quoniam igitur in § 8 valor ipſius $(\frac{dZ}{dt})$ iam euolutus habetur ſi ille hic ſubſtituatur formulae $\int Z dx$ variatio prodibit ita expreſſa:

$$dt\int dx\left(N(\tfrac{dy}{dt}) + P(\tfrac{ddy}{dx\,dt}) + Q(\tfrac{d^3y}{dx^2dt}) + R(\tfrac{d^4y}{dx^3.dt}) \text{ etc.}\right)$$

quam

quam etiam ſequenti modo per partes repraeſentaſſe iuuabit

$$dt\int N\,dx\left(\frac{dy}{dt}\right)+dt\int P\,dx\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)+dt\int Q\,dx\left(\frac{d^3y}{dx^2.dt}\right)+dt\int R\,dx\left(\frac{d^4y}{dx^3dt}\right) \text{ etc.}$$

qua expreſſione contenti eſſe poſſemus, ſi quaeſtio circa caſum aliquem determinatum inſtitueretur, vbi y non ſolum functioni cuipiam datae ipſius x aequaretur, ſed etiam noua variabilis t modo determinato introduceretur; tum enim omnes illas formulas $\left(\frac{dy}{dt}\right)$; $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$; $\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right)$ etc. actu euoluere liceret, ita vt tum elementum dx per ſolam functionem ipſius x afficeretur, ſiquidem vti initio innuimus euolutione facta, iterum poni debet $t=0$.

12. At vero tales quaeſtiones determinatae nunquam occurrere ſolent; ſed potius relatio inter y et x ſemper incognita eſſe ſolet, inde demum determinanda, quod variatio in nihilum abire debeat, quippe in quo Methodus maximorum et minimorum verſatur. Huiusmodi quaeſtiones ergo ita enunciari conuenit, qualis relatio inter quantitates x et y intercedere debeat, vt formulae integralis propoſitae $\int Z\,dx$ variatio in nihilum abeat, quomodocunque etiam noua variabilis t in calculum introducatur? Quodſi autem quaeſtio hac ratione inſtituatur, perſpicuum eſt formulis $\left(\frac{dy}{dt}\right)$; $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$; $\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right)$ etc. nullos certos valores tribui poſſe.

13. Verum hic prorſus ſingulare artificium in ſubſidium vocari poteſt, cuius ope formulas integrales poſteriores in § 11 ad formam prioris reduce-

ducere licet, ita vt in omnibus eadem formula $(\frac{dy}{dt})$ occurrat. Quum enim $dx(\frac{ddy}{dx\,dt})$ ſit differentiale formulae $(\frac{dy}{dt})$ ſumta ſola x variabili, erit per conſuetam integralium reductionem:

$$\int P\,dx\,(\frac{ddy}{dx\,dt}) = P\,(\frac{dy}{dt}) - \int dx\,(\frac{dP}{dx})(\frac{dy}{dt}),$$

ſimili modo quia $dx(\frac{d^3y}{dx^2.\,dt})$ eſt differentiale formulae $(\frac{ddy}{dx\,dt})$ habebimus ſtatim hanc reductionem

$$\int Q\,dx(\frac{d^3y}{dx^2.\,dt}) = Q(\frac{ddy}{dx\,dt}) - \int dx(\frac{dQ}{dx})(\frac{ddy}{dx\,dt}),$$

nunc vero per praecedentem reductionem fit

$$\int dx(\frac{dQ}{dx})(\frac{ddy}{dx\,dt}) = (\frac{dQ}{dx})(\frac{dy}{dt}) - \int dx(\frac{ddQ}{dx^2})(\frac{dy}{dt})$$

ſicque omnino habebimus

$$\int Q\,dx(\frac{d^3y}{dx^2.\,dt}) = Q(\frac{ddy}{dx.\,dt}) - (\frac{dQ}{dx})(\frac{dy}{dt}) + \int dx\,(\frac{ddQ}{dx^2})(\frac{dy}{dt})$$

atque nunc ſatis perſpicuum eſt, ſequentem formulam integralem ita reductum iri:

$$\int R\,dx(\frac{d^4y}{dx^3\,dt}) = R(\frac{d^3y}{dx^2.\,dt}) - (\frac{dR}{dx})(\frac{ddy}{dx\,dt}) + (\frac{ddR}{dx^2})(\frac{dy}{dt})$$
$$- \int dx(\frac{d^3R}{dx^3})(\frac{dy}{dt})$$

ac ſi inſuper talis formula adeſſet, foret:

$$\int S\,dx(\frac{d^5y}{dx^4\,dt}) = S(\frac{d^4y}{dx^3.\,dt}) - (\frac{dS}{dx})(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}) + (\frac{ddS}{dx^2})(\frac{ddy}{dx\,dt})$$
$$- (\frac{d^3S}{dx^3})(\frac{dy}{dt}) + \int dx(\frac{d^4S}{dx^4})(\frac{dy}{dt}).$$

14. Quodſi nunc has formulas reductas ſubſtituamus in expreſſione variationis quaeſitae, formulae $\int Z\,dx$, tum haec variatio non ſolum formulis conſtabit integralibus, ſed etiam continebit partes abſolu-

ſolutas, quarum aliae formulam $(\frac{dy}{dt})$, aliae hanc $(\frac{ddy}{dxdt})$; aliae vero hanc $(\frac{d^3y}{dx^2dt})$ etc. continebunt; dum contra omnes integrales eandem formulam $(\frac{dy}{dt})$ inuoluunt, quocirca variatio quaeſita formula propoſitae $\int Z\,dx$, ſequenti modo habebitur expreſſa;

$$\begin{aligned}
&dt\int dx(\tfrac{dy}{dt})(N-(\tfrac{dP}{dx})+(\tfrac{ddQ}{dx^2})-(\tfrac{d^3R}{dx^3})+(\tfrac{d^4S}{dx^4}) \text{ etc.})\\
&+dt(\tfrac{dy}{dt})\ (P-(\tfrac{dQ}{dx})+(\tfrac{ddR}{dx^2})-(\tfrac{d^3S}{dx^3}))\\
&+dt(\tfrac{ddy}{dxdt})(Q-(\tfrac{dR}{dx})+(\tfrac{ddS}{dx^2})- \text{ etc.})\\
&+dt(\tfrac{d^3y}{dx^2dt})(R-(\tfrac{dS}{dx}) \text{ etc.})\\
&+dt(\tfrac{d^4y}{dx^3dt})(S- \text{ etc.})\\
&+ \text{ etc.}
\end{aligned}$$

15. Quamquam hic meum inſtitutum non eſt methodum maximorum et minimorum pertractare, quoniam hoc alibi iam ſatis copioſe eſt factum; tamen hic praetermittere non poſſum, quin obſeruem, ſi variatio formulae $\int Z\,dx$ euaneſcere debeat, quomodocunque etiam noua variabilis t in calculum ingrediatur; id nullo modo fieri poſſe, niſi tota pars prima integralis ſeorſim euaneſcat, ex quo neceſſe eſt, inter x et y hanc aequationem conſtitui

$$0 = N-(\frac{dP}{dx})+(\frac{ddQ}{dx^2})-(\frac{d^3R}{dx^3})+(\frac{d^4S}{dx^4}) \text{ etc.}$$

et quia nunc variabilis t nulla amplius ratio habetur, ſicque tantum vnica adhuc variabilis x ſupereſt, clauſulis omiſſis hanc habebimus aequationem:

$$0 = N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4} \text{ etc.}$$

qua deſiderata relatio inter x et y exprimitur. Partes autem abſolutae, tantum ad terminos extremos referuntur, circa quas ea obſeruari debent, quae iam alibi fuſius ſunt praecepta.

16. Hic etiam non immoror iis caſibus quibus quantitas Z ipſa inſuper formulas integrales involuit, quoniam etiam hoc argumentum alibi ſatis eſt pertractatum, verum hic opus multo magis arduum molior, dum eandem hanc methodum ad functiones adeo duarum variabilium extendere conabor, quod equidem in diſſertatione illa, quam olim de calculo variationum conſcripſeram, tunc temporis praeſtare non potui, multitudine tot quantitatum diverſi generis deterritus.

Applicatio Methodi praecedentis ad functiones duarum variabilium.

17. Si habeatur aequatio quaecunque inter ternas variabiles x, y et z ea naturam cuiuspiam ſuperficiei exprimi cenſemus, vbi quidem binas coordinatas x et y in plano horizontali conſtitui intelligamus, tertiam vero z verticalem, ſicque haec tertia z, vt functio ſpectari poteſt binarum x et y; vnde more ſolito duplicia incrementa conſideranda occurrunt, quatenus ſcilicet a variabilitate ipſius x, vel ipſius y naſcuntur. Illud nempe incrementum ipſius z quod ex variatione ipſius x oritur hac formula:

$$dx\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

hoc

hoc vero ex variatione ipſius y oriundum iſta:

$$dy\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

indicari ſolet.

18. Quodſi iam haec ſuperficies aequatione inter x, y et z expreſſa, cum aliis quibuscunque ſuperficiebus ipſi proximis comparari debeat, id commodiſſime fiet nouam variabilem t introducendo, ita vt iam z ſpectanda ſit vt functio trium variabilium, x, y et t, quae quidem ſumto $t = 0$, in functionem ſuperiorem abeant, at dum ipſi t valores infinite parui tribuuntur, omnes ſuperficies proximas complectatur, quo poſito perſpicuum eſt, quoniam variabiles x et y a noua t, neutiquam pendent earum differentialia dx et dy nullo modo cum dt permiſceri, ſola vero coordinata z triplicis generis incrementa capere poteſt, praeter bina enim iam ante commemorata, quae vel ab x vel ab y profiſiſcuntur, accipere poterit incrementum a variabilitate ipſius t oriundum, quod tali formula $dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$ eſt repraeſentandum.

19. Ponamus nunc V eſſe expreſſionem vtcunque ex ipſis coordinatis x, y et z compoſitam, ſiue per meras operationes algebraicas, ſiue etiam tranſcendentes formatas, quae more ſolito differentiata praebeat:

$$dV = L\,dx + M\,dy + N\,dz,$$

atque ſi eiusdem incrementum deſideretur a noua variabili t ſola oriundum manifeſtum eſt, ſtatui de-

bere $dx = 0$ et $dy = 0$, at loco dz ſcribi debere $dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$, ſicque hoc ſignandi modo vſurpato habebimus

$$dt\left(\frac{dV}{dt}\right) = N\,dt\left(\frac{dz}{dt}\right) \text{ ideoque } \left(\frac{dV}{dt}\right) = N\left(\frac{dz}{dt}\right).$$

Tales autem expreſſiones vt ante primum genus conſtituunt.

20. Progrediamur ergo ad ſecundum genus, quo expreſſio v praeter ipſas coordinatas x, y, z etiam rationes differentialium earum inuoluat; atque hic quidem ante omnia, formam huiusmodi expresſionum accuratius perpendi oportet. Quoniam autem hic ſtatim quantitas z duplicia incrementa capere poteſt (hic enim nondum ad nouam variabilem t reſpicimus) ponamus breuitatis gratia

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{et} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = p',$$

quae duae litterae differentialia primi gradus comprehendunt, deinde pro differentialibus ſecundi gradus ponamus:

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = q\,;\ \left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) = q'\,;\ \left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = q''$$

vnde ſequentes relationes inter has litteras et praecedentes notaſſe iuuabit:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = q\,;\ \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right) = q'\,;\ \left(\frac{dp'}{dy}\right) = q''$$

ſimili modo differentialia tertii gradus his formulis complectamur:

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = r\,;\ \left(\frac{d^3z}{dx^2\,dy}\right) = r'\,;\ \left(\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right) = r''\,;\ \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = r'''$$

vbi

vbi hae relationes ſunt notandae:

$$r = \left(\frac{dq}{dx}\right);\ r' = \left(\frac{dq}{dy}\right) = \left(\frac{dq'}{dx}\right);\ r'' = \left(\frac{dq'}{dy}\right) = \left(\frac{dq''}{dx}\right);\ r''' = \left(\frac{dq''}{dy}\right)$$

quarta autem differentialia has formulas praebent:

$$s = \left(\frac{d^4z}{dx^4}\right);\ s' = \left(\frac{d^4z}{dx^3dy}\right);\ s'' = \left(\frac{d^4z}{dx^2dy^2}\right);\ s''' = \left(\frac{d^4z}{dxdy^3}\right);$$
$$s'''' = \left(\frac{d^4z}{dy^4}\right)$$

et ſic vltra quousque libuerit.

21. His explicatis expreſſiones ſecundi generis, praeter ipſas coordinatas x, y et z etiam quantitates p, p', q, q', q'', r, r', r'', r''' etc. vtcunque inuoluere poſſunt, ex quo ſi V denotet quamcunque huiusmodi expreſſionem eius differentiale more ſolito ſumtum ſequenti forma exhibeamus:

$$\begin{aligned} dV = L\,dx + M\,dy + N\,dz + P\,dp + Q\,dq &+ R\,dr \\ + P'dp' + Q'dq' &+ R'dr' \\ + Q''dq'' &+ R''dr'' \quad \text{etc.} \\ &+ R'''dr''' \end{aligned}$$

quam formam animo imprimi conueniet, ne opus ſit eam ſaepius repetere.

22. Quodſi iam huiusmodi expreſſionum variatio, ſeu id incrementum inueniri debeat, quod reſultat ex variatione nouae variabilis t, quam in valorem coordinatae z introducimus, iam vidimus ſumi debere $dx = 0$ et $dy = 0$, tum vero fieri $dz = dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$, ob eandem vero rationem ſequentia differentialia ſimili modo erunt exprimenda, quae cum

cum ſuis transformationibus per ſe ſatis claris ita ſe habebunt:

$$dp = dt\left(\frac{dp}{dt}\right) = dt\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right);\; dp' = dt\left(\frac{dp'}{dt}\right) = \left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)$$

$$dq = dt\left(\frac{dq}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^3z}{dx^2\,dt}\right);\; dq' = dt\left(\frac{dq'}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right);$$

$$dq'' = dt\left(\frac{dq''}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^3z}{dy^2\,dt}\right)$$

$$dr = dt\left(\frac{dr}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^4z}{dx^3\,dt}\right);\; dr' = dt\left(\frac{dr'}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^4z}{dx^2\,dy\,dt}\right)$$

$$dr'' = dt\left(\frac{dr''}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^4z}{dx\,dy^2\,dt}\right);\; dr''' = dt\left(\frac{dr'''}{dt}\right)$$

$$= dt\left(\frac{d^4z}{dy^3\,dt}\right) \text{ etc.}$$

23. Totum ergo negotium huc redit, vt in formula illa differentiali pro dV data loco ſingulorum differentialium iſti valores ſubſtituantur, hocque modo prodibit variatio expreſſionis V ex ſola variabilitate ipſius t oriunda, ſeu valor huius formulae $dt\left(\frac{dV}{dt}\right)$, quoniam autem ſingula membra elemento dt erunt affecta, eo omiſſo adipiſcimur ſequentem formam:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right) = N\left(\frac{dz}{dt}\right) + P\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right) + Q\left(\frac{d^3z}{dx^2.dt}\right) + R\left(\frac{d^4z}{dx^3.dt}\right)$$

$$+ P'\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right) + Q'\left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right) + R'\left(\frac{d^4z}{dx^2\,dy\,dt}\right)$$

$$+ Q''\left(\frac{d^3z}{dy^2.dt}\right) + R''\left(\frac{d^4z}{dx\,dy^2\,dt}\right)$$

$$+ R'''\left(\frac{d^4z}{dy^3.dt}\right)$$

quae ad variationes quarumcunque expreſſionum ſecundi generis inueniendas ſufficit.

24. Nunc expreſſiones tertii generis adgredi poterimus formulas integrales inuoluentes in quibus potiſſi-

potiſſimum vis huius methodi cernitur. Quando enim quaeſtio circa maxima vel minima quae in ſuperficiebus occurrere poſſunt, verſatur; formula illa, quae maximum vel minimum reddi debet neceſſaro eſt formula integralis atque adeo formula integralis duplicata, cuius indolem hic paucis explicari conuenit. Quemadmodum enim in praecedente parte, formulae integrales ſimplices ſunt conſideratae, quae ad datam abſciſſam x ſunt relatae, ita hic in ſuperficiebus, quaeſtiones ſemper non ad ſolam abſciſſam x, ſed ad totum quoddam ſpatium in plano horizontali tanquam baſem ſunt referendae cui portio ſuperficiei quae maximi minimiue quadam proprietate gaudere debet, immineat. Quare quum talis baſis duplicem habeat dimenſionem alteram ab x, alteram vero ab y pendentem, huiusmodi formulae integrales erunt duplicatae, hoc modo exprimi ſolitae $\int\int V\,dx\,dy$, eae ſcilicet duplicem integrationem poſtulant, atque in priore ſola coordinata x vel ſola y pro variabili habetur, et integratio vsque ad terminos baſis propoſitae extenditur, tum vero demum etiam altera variabilis aſſumitur atque altera integratio abſoluitur. Et quoniam perinde eſt vtra prius pro variabili habeatur, ſine diſcrimine geminam illam integrationem ſigno duplicato $\int\int$ indicamus; neque vero hic loci eſt, omnia quae circa huiusmodi integrationes duplicatas ſunt obſeruanda, fuſius exponere, quippe quod argumentum in Tomo XIV. horum Commentariorum iam ſatis accurate eſt pertractatum.

25. Quodſi ergo huiusmodi formulae integralis $\int\int V\, dx\, dy$ variatio quaeri debeat, vbi V denotat expreſſionem quamcunque vel primi vel ſecundi generis, ex ſuperioribus ſatis liquet hanc variationem ita expreſſum iri:

$$dt \int\int \left(\frac{dV}{dt}\right) dx\, dy$$

quae forma iterum eſt integralis duplicata et prouti vel x vel y priore integratione vt conſtans ſpectatur, ea formula vel hoc modo

$$dt \int dx \int \left(\frac{dV}{dt}\right) dy\,,$$

vel hoc modo

$$dt \int dy \int \left(\frac{dV}{dt}\right) dx$$

exhiberi poteſt.

26. Sit nunc V talis expreſſio qualem ſupra § 19 deſcripſimus et cuius variationem ſeu valorem $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ in § 23 euoluimus, tantum opus erit, ſingula membra ibi expoſita heic loco $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ ſubſtituere; vnde ſequens congeries formularum integralium naſcetur, quibus iunctim ſumtis variatio quaeſita $dt \int\int \left(\frac{dV}{dt}\right) dx\, dy$ exprimetur:

$$dt \int\int N \left(\frac{dz}{dt}\right) dx\,dy + dt \int\int P \left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right) dx.\,dy + dt \int\int Q \left(\frac{d^3z}{dx^2\,dt}\right) dx\,dy + dt \int\int R \left(\frac{d^4z}{dx^3\,dt}\right) dx\,dy$$
$$+ dt \int\int P' \left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right) dx\,dy + dt \int\int Q' \left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right) dx\,dy + dt \int\int R' \left(\frac{d^4z}{dx^2\,dy\,dt}\right) dx\,dy$$
$$+ dt \int\int Q'' \left(\frac{d^3z}{dy^2\,dt}\right) dx\,dy + dt \int\int R'' \left(\frac{d^4z}{dx\,dy^2\,dt}\right) dx\,dy$$
$$+ dt \int\int R''' \left(\frac{d^4z}{dy^3\,dt}\right) dx\,dy$$

etc.

27.

27. Nunc ſingula haec membra poſt primum peculiares reductiones admittunt, quas probe notaſſe iuuabit. Pro ſecundo membro ſumamus primo x tantum variabile eritque:

$$\int P\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)dx = P\left(\frac{dz}{dt}\right) - \int\left(\frac{dz}{dt}\right)dx\left(\frac{dP}{dx}\right),$$

vnde etiam alteram integrationem adiiciendo erit:

$$\iint P\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)dx\,dy = \int P\left(\frac{dz}{dt}\right)dy - \iint\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dP}{dx}\right)dx\,dy.$$

Pro tertio membro ſumatur primo ſola y variabilis eritque:

$$\int P'\left(\frac{ddz}{dy.\,dt}\right)dy = P'\left(\frac{dz}{dt}\right) - \int\left(\frac{dz}{dt}\right)dy\left(\frac{dP'}{dy}\right)$$

vnde ipſum tertium membrum tranſibit in

$$\iint P'\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)dx\,dy = \int P'\left(\frac{dz}{dt}\right)dx - \iint\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dP'}{dy}\right)dx\,dy.$$

28. Pro ſequentibus membris hae ipſae reductiones ſequentes dabunt transformationes, pro quarto ſcilicet habebimus ex ſecundo

$$\iint Q\left(\frac{d^3z}{dx^2\,dt}\right)dx = \int Q\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)dy - \iint\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)\left(\frac{dQ}{dx}\right)dx\,dy$$

at vero hoc membrum poſterius ad ſimilitudinem ſecundi reducitur hoc modo, vbi tantum loco P ſcribi debet $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$:

$$\int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dQ}{dx}\right)dy - \iint\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)dx\,dy$$

ita vt nunc quartum membrum praebeat hanc formam:

$$\int Q\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)dy - \int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dQ}{dx}\right)dy + \iint\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)dx\,dy.$$

 Simili

Simili modo quintum membrum ope ſecundi reducitur vbi loco P ſcribitur Q' et loco $(\frac{d\,d\,z}{d\,x\,d\,t})$, $(\frac{d^3\,z}{d\,x\,d\,y\,d\,t})$, ſiue loco $(\frac{d\,z}{d\,t})$ ſcribendo $(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t})$ ſicque habebitur

$$\iint Q'(\frac{d^3\,z}{d\,x\,d\,y\,d\,t})dx\,dy = \int Q'(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t})dy - \iint(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t})(\frac{d\,Q'}{d\,x})dx\,dy$$

quod poſterius membrum cum tertio conferatur, vbi loco tantum P' ſcribi debet $(\frac{d\,Q'}{d\,x})$, quo pacto totum membrum induet hanc formam:

$$\int Q'(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t})dy - \int(\frac{d\,z}{d\,t})(\frac{d\,Q'}{d\,x})dx + \iint(\frac{d\,z}{d\,t})(\frac{d\,d\,Q'}{d\,x\,d\,y})dx\,dy,$$

ſextum vero membrum bis cum ſecundo collatum reducitur ad hanc formam:

$$\int Q''(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t})dx - \int(\frac{d\,z}{d\,t})(\frac{d\,Q''}{d\,y})dx + \iint(\frac{d\,z}{d\,t})(\frac{d\,d\,Q''}{d\,y^2})dx\,dy$$

28. Si hoc modo vlterius progrediamur ad ſequentia membra, ſeptimum membrum in ſequentes partes reſoluitur:

$$\int R\,(\frac{d^3\,z}{d\,x^2\,d\,t})dy - \int(\frac{d\,d\,z}{d\,x\,d\,t})(\frac{d\,R}{d\,x})dy + \int(\frac{d\,z}{d\,t})(\frac{d\,d\,R}{d\,x^2})dy$$
$$-\iint(\frac{d\,z}{d\,t})(\frac{d^3\,R}{d\,x^3})dx\,dy$$

deinde octauum membrum

$$\int R'\,(\frac{d^3\,z}{d\,x\,d\,y\,d\,t})dy - \int(\frac{d\,d\,z}{d\,x\,d\,t})(\frac{d\,R'}{d\,x})dy + \int(\frac{d\,z}{d\,t})(\frac{d\,d\,R'}{d\,x\,d\,y})dy$$
$$-\iint(\frac{d\,z}{d\,t})(\frac{d^3\,R'}{d\,x^2\,d\,y})dx\,dy$$

tum nonum membrum fiet

$$\int R''(\frac{d^3\,z}{d\,x\,d\,y\,d\,t})dx - \int(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t})(\frac{d\,R''}{d\,y})dx + \int(\frac{d\,z}{d\,t})(\frac{d\,d\,R''}{d\,x\,d\,y})dx$$
$$-\iint(\frac{d\,z}{d\,t})(\frac{d^3\,R''}{d\,x\,d\,y^2})dx\,dy$$

et decimum

$$\int R'''(\frac{d^3\,z}{d\,y^2\,d\,t})dx - \int(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t})(\frac{d\,R'''}{d\,y})dx + \int(\frac{d\,z}{d\,t})(\frac{d\,d\,R'''}{d\,y^2})dx$$
$$-\iint(\frac{d\,z}{d\,t})(\frac{d^3\,R'''}{d\,y^3})dx\,dy.$$

29. Colligamus nunc omnes iſtas formulas in vnam ſummam, atque variatio quaeſita pluribus conſtabit membris, quarum primum formulas integrales duplicatas, reliqua vero ſimplices complectentur, hoc pacto variatio quaeſita ſequenti modo erit expreſſa:

$$dt\iint dx\,dy\left(\frac{dz}{dt}\right)\left\{\begin{array}{l} N-\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right)\\ \quad-\left(\frac{dP'}{dy}\right)+\left(\frac{ddQ'}{dxdy}\right)-\left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right)\\ \qquad+\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right)-\left(\frac{d^3R''}{dxdy^2}\right)\\ \qquad\qquad-\left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right)\end{array}\right\}\text{etc.}$$

$$+dt\left\{\begin{array}{l} \int\left(\frac{dz}{dt}\right)P\,dy+\int Q\,dy\left(\frac{ddz}{dxdt}\right)-\int dy\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)+\int R\,dy\left(\frac{d^3z}{dx^2dt}\right)\\ \int\left(\frac{dz}{dt}\right)P'dx+\int Q'dy\left(\frac{ddz}{dydt}\right)-\int dx\left(\frac{dQ'}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)+\int R'dy\left(\frac{d^3z}{dxdydt}\right)\\ \qquad+\int Q''dx\left(\frac{ddz}{dydt}\right)-\int dx\left(\frac{dQ''}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)+\int R''dx\left(\frac{d^3z}{dxdydt}\right)\\ \qquad\qquad+\int R'''dx\left(\frac{d^3z}{dy^2dt}\right)\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} -\int dy\left(\frac{dR}{dx}\right)\left(\frac{ddz}{dxdt}\right)+\int dy\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR}{dx^2}\right)\\ -\int dy\left(\frac{dR'}{dx}\right)\left(\frac{ddz}{dxdt}\right)+\int dy\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR'}{dxdy}\right)\\ -\int dx\left(\frac{dR''}{dy}\right)\left(\frac{ddz}{dydt}\right)+\int dx\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR''}{dxdy}\right)\\ -\int dx\left(\frac{dR'''}{dy}\right)\left(\frac{ddz}{dydt}\right)+\int dx\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR'''}{dy^2}\right)\end{array}\right\}\text{etc.}$$

30. Verum quid haec ſingula membra proprie ſignificent et ad quemnam vſum adhiberi queant, neutiquam adhuc perſpicere licet, unde hoc argumentum cuius prima ſundamenta etiamnunc vix iacta ſunt cenſenda omnem Geometrarum attentionem atque multo accuratiorem inueſtigationem poſtulare videtur, quod negotium vix ante ſuſcipere licet, quam

 caſus

caſus nonnulli particulares omni ſtudio et diligentia fuerint euoluti, quin etiam ipſa pars prior, quae tantum circa functiones vnius variabilis verſatur neutiquam adhuc ſatis clare et diſtincte eſt enucleata, ita vt perſpicue intelligeremus veram indolem atque naturam ſingularum partium, quibus variationem contineri inuenimus, quem in finem dilucidationes ſequentes hic adiungere viſum eſt.

Dilucidationes ſuper Theoria variationum ad functiones ſaltem vnius variabilis accommodata.

31. Quaeſtiones quae hic occurrunt ad hoc problema generale reuocare licet:

Explicatio ipſius Problematis. *Si* y *fuerit functio quaecunque ipſius* x, *indeque definiatur valor cuiuspiam formulae integralis datae* ſ Z d x, *denotante* Z *expreſſionem ex ipſis quantitatibus* x *et* y *earumque differentialium rationibus vtcunque compoſitam, quaeſtio eſt, ſi loco illius functionis* y *alia quaecunque illi proxima ſeu infinite parum tantum ab ea diſcrepans adhibeatur, quanto maiorem minoremve valorem, tum eadem formula integralis* ſ Z d x *ſit conſecutura.*

32. At quia hoc modo iſta quaeſtio enunciata nimis videri poſſet abſtracta, eam more ſolito ad Geometriam reuocemus. Sit igitur ſuper axe
Tab. II. Fig. 1. A P, propoſita curua quaecunque A M aequatione inter abſciſſam A P $= x$ et applicatam P M $= y$ expreſſa, pro qua definiri oporteat valorem formulae cuius-

cuiuspiam integralis $\int Z\,dx$, qui ſit $= W$, quo poſito conſideretur alia curua quaecunque $\alpha\mu$ infinite parum a data diſcrepans, ac ſi pro hac curua itidem definiatur valor formulae $\int Z\,dx$, quaeritur, quantum iſte valor a praecedente ſit diſcrepaturus, euidens enim eſt, hoc diſcrimen praebere ipſam variationem quantitatis W, quam ſupra ope calculi variationum exhibuimus.

33. Quo haec adhuc clariora euadant, exemplum quodpiam proferamus, quo propoſita curua A M eiusque axe A P tamquam verticali conſiderato, quaeratur tempus quo corpus ex puncto A ſuper hac curua A M deſcendens vsque ad punctum M pertingit. Iam quia celeritas corporis in M, eſt vt $\sqrt{AP} = \sqrt{x}$ et ipſum curuae elementum $= dx\sqrt{(1+pp)}$, poſito ſcilicet $dy = p\,dx$ vti in ſolutione generali eſt praeceptum; erit tempus per elementum Mm $= dx\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$ vnde formula integralis $\int Z\,dx$ pro hoc caſu abit in $\int dx\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$, ita vt habeatur $Z = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$, quare nunc tempus erit definiendum, quo corpus ſuper curua quacunque proxima $\alpha\mu$ deſcendens ab α vsque ad μ perueniet, vbi diſcrimen dabit ipſam variationem formulae $\int dx\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$ huic caſui convenientem.

34. Quoniam hic formula integralis conſideranda venit, ante omnia diſpiciendum eſt, quomodo eam determinari oporteat. In exemplo quidem allato, manifeſtum eſt formulae $\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$ integrale

grale ita capi debere, vt euaneſcat poſito $x = 0$, vnde etiam in genere intelligitur, ſemper pro integratione formulae $\int Z\,dx$, certum aliquem terminum veluti punctum A, tamquam principium integrationis ſtatui atque integrale $\int Z\,dx$ euaneſcere debere poſito $x = 0$, vel ſi forte circumſtantiae aliter fuerint comparatae, tribuendo ipſi x valorem quempiam datum, deinde vero initio conſtituto, valor formulae $\int Z\,dx = W$ abſciſſae $AP = x$ reſpondebit.

35. His circa formulam integralem $\int Z\,dx$ obſeruatis, videamus, quamnam ideam nobis de curvis illis proximis $\alpha\,\mu$ formare debeamus. Ac primo quidem patet, has curuas continuo quodam tractu ductas eſſe debere, ita vt in iis nusquam anguli aliiue ſaltus deprehendantur; hoc ſolo notato, perinde eſt ſiue iſtae curuae lege quapiam continuitatis vel aequatione quapiam contineantur, ſiue ſint adeo discontinuae, quaſi libero manus motu ductae.

36. Huiusmodi lineae curuae commodiſſime ſequenti modo formatae menti repraeſentari poſſunt. Ducatur ſcilicet pro lubitu linea curua quaecunque BN eidem abſciſſae AP imminens, ac ductis ad ſingula axis puncta X applicatis XYV ſingula interualla YV in ratione finiti ad infinite paruum ſecentur in v, ita vt Yv ſit quaſi pars infiniteſima interualli YV. Hoc enim modo curua $\alpha\,\nu\,\mu$ obtinebitur a curua propoſita AM in omnibus punctis infinite parum diſſita, qualem ad inſtitutum noſtrum requi-

requirimus. Praeterea tamen notandum eſt, in curva illa arbitraria B N nusquam tangentem ad axem A P normalem eſſe debere, quia hoc modo diuiſio illorum interuallorum turbaretur. Atque nunc euidens eſt, non ſolum interualla Y v eſſe infinite parva, ſed etiam tangentes in punctis Y et v infinite parum a parallelismo deficere.

37 His circa ipſam quaeſtionis propoſitionem annotatis, contemplemur nunc accuratius quoque ſolutionem ſupra inuentam, eiusque ſingulas partes, vt quid quaelibet earum innuat et ad quemnam vſum ſit transferenda perſpicue intelligamus; ſolutionem autem in §. 14. datam hic contemplabimur. Statim igitur conſideremus primam variationis ibi inuentae partem, quae hac formula integrali continetur. Explicatio partis primae in variatione.

$$dt \int dx \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(N - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) + \left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) - \text{etc.}\right)$$

cuius integratio ita capi debet, vt in ipſo termino initiali A euaneſcat, qua conditione conſtans arbitraria determinatur, quod ſi ergo in ſingulis punctis X Y haec formula applicata intelligatur, aggregatum omnium iſtarum formularum elementarium ab initio A vsque ad terminum M extenſum praebebit primam partem variationis quaeſitae, atque hic quidem in Figura perſpicuum eſt, ſpatiolum Y v exprimere incrementum applicatae y a ſola variabili t oriundum ita vt ſit Y $v = dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

38. Haec igitur prima pars variationis inuoluit omnia ſpatiola $Y v$ intra terminos A et M contenta, quae quum in infinitum variari poſſint, atque adeo a poſitiuis ad negatiua tranſire queant, maximae variationes hic locum habere poſſunt. Verum tamen vnicus caſus hinc debet excipi, quo curva A M ita eſt comparata, vt ſit

$$o = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^3} \text{ etc.}$$

tum enim vtcunque curuae proximae fuerint comparatae, iſta pars prima variationis, ſemper in nihilum abit. Neque deuiatio curuarum proximarum $\alpha\,\mu$ a principali A M intra terminos A et M quicquam ad variationem confert; ex quo haec curua reſpectu formulae integralis $\int Z\,dx$ inprimis eſt memorabilis, quandoquidem in ea haec formula integralis vel maximum vel minimum obtinet valorem.

Explicatio partis ſecundae in variatione.

39. Progrediamur nunc ad ſecundam partem variationis ſupra inuentae, quae eſt

$$dt\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3 S}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

circa quam primum obſeruo, quoniam ea ad terminum M refertur per integrationem rite inſtitutam, inſuper adiici debere, ſimilem expreſſionem ad terminum priorem A relatam, at vero ſigno contrario affectam, id quod ideo eſt neceſſarium vt facto $x = o$, etiam haec expreſſio penitus tollatur. Refertur autem iſta pars

$$dt\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$

vnice

vnice ad vltimum terminum M, vbi $dt\,(\frac{dy}{dt})$ ipſum ſpatiolum M μ exprimit, ſimilique modo in alteram partem pro initio A ſpatiolum A α ingredietur. Hinc patet ſi omnes curuae proximae $\alpha\,\mu$ per ipſos ambos terminos A et M ducantur tum variationem ſecundae partis in nihilum abire.

40. Conſideremus autem caſum, quo curua proxima $\alpha\,\mu$ per primum quidem terminum A tranſit non vero quoque per alterum M, ſed ſit punctum μ eius terminus, atque variatio ex ſecunda parte nata erit

$$= \mathrm{M}\,\mu\,(\mathrm{P} - \frac{d\,\mathrm{Q}}{d\,x} + \frac{d\,d\,\mathrm{R}}{d\,x^2}\ \text{etc.}).$$

Atque hinc etiam definire poterimus variationem ex eodem fonte oriundam, ſi curua proxima A μ, non in ipſo puncto μ ſed alio quocunque ω terminetur, exiſtente ſemper interuallo $\mu\,\omega$ infinite paruo. Ducta enim applicata $\omega\,m\,p$, variatio modo inuenta inſuper augeri debet particula formulae $\int \mathrm{Z}\,d\,x$, quae elemento $\mathrm{P}p = dx$ reſpondet, quae particula quum ſit $= \mathrm{Z}.\ \mathrm{P}\,p$, pro arcu curuae proximae A ω erit variatio ex ſecunda parte oriunda

$$= \mathrm{M}\,\mu\,(\mathrm{P} - \frac{d\,\mathrm{Q}}{d\,x} + \frac{d\,d\,\mathrm{R}}{d\,x^2}\ \text{etc.}) + \mathrm{Z}.\,\mathrm{P}\,p.$$

41. Ducatur recta M ω et quaeramus angulum $\omega\,\mathrm{M}\,m$, quem haec recta Mω cum curua principali conſtituit, ponatur iſte angulus $\omega\,\mathrm{M}\,m = \omega$ et ducta M O ipſi Pp parallela, quia eſt proxime $m\,\omega = \mathrm{M}\,\mu$ et anguli $m\,\mathrm{M}\,o$ tangens $= p$ ideoque

$o m = p . P p$; habebitur $O \omega = M \mu + p . P p$ vnde fit:

$$\text{tang.}\ \omega M o = \frac{M \mu}{P p} + p,$$

atque hinc colligitur

$$\omega M m = \text{tang.}\ \omega = \frac{M \mu}{P p (1 + p p) + M \mu . p}.$$

Seruemus nunc in calculo hunc ipſum angulum ω atque hinc habebimus ſpatiolum:

$$M \mu = \frac{P p (1 + p p)\ \text{tang.}\ \omega}{1 - p\ \text{tang.}\ \omega}$$

quo valore ſubſtituto variatio pro arcu $A \omega$ erit:

$$P p \left(Z + \frac{(1 + p p)\ \text{tang.}\ \omega}{1 - p\ \text{tang.}\ \omega} . \left(P - \frac{d Q}{d x} + \frac{d d R}{d x^2}\ \text{etc.}\right)\right).$$

42. Nunc operae pretium erit eum angulum ω definire, vt iſta variatio in nihilum abeat, id quod eueniet, ſi capiatur

$$\text{tang.}\ \omega = \frac{Z}{p Z - (1 + p p)\left(P - \frac{d Q}{d x} + \frac{d d R}{d x^2}\ \text{etc}\right)}$$

quare hoc angulo ita conſtituto pro omnibus lineis proximis vbicunque in recta $M \omega$ terminatis variatio ex ſecunda parte oriunda euaneſcet. Hic caſus prae caeteris omnino notatu dignus conſiderari meretur, quo recta $M \omega$ fit ad curuam principalem in puncto M normalis, quod euenit, ſi fuerit

$$p Z - (1 + p p)\left(P - \frac{d Q}{d x} + \frac{d d R}{d x^2}\ \text{etc.}\right) = 0,$$

qua aequatione certa conditio ipſius formulae integralis $\int Z d x$ ſiue indoles expreſſionis Z definitur.

43. Non igitur pigebit in talem expreſſionem Z inquiſiuiſſe, ac primo quidem patet eam praeter coordinatas x et y etiam quantitatem p inuoluere debere. Sumamus autem praeterea in Z non ingredi litteras q, r etc. ita vt ſit $Q = 0$, $R = 0$, ac noſtra aequatio reſoluenda erit:

$$p Z = (1 + pp) P,$$

vbi notandum eſt eſſe

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp,$$

quare ſi ambae coordinatae x et y tanquam conſtantes tractentur erit

$$dZ = P\,dp \quad \text{ideoque} \quad P = \frac{dZ}{dp},$$

quo valore ibi introducto haec prodibit aequatio

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{p\,dp}{1 + pp}$$

quae integrata dat

$$L.\,Z = L.\,\sqrt{(1 + pp)} + L.\,C$$

quae conſtans functio quaecunque ipſarum x et y eſſe poteſt, talis functio ſit V atque habebimus

$$Z = V\sqrt{(1 + pp)},$$

ideoque formula integralis

$$= \int V\,dx\,\sqrt{(1 + pp)}.$$

Huius formulae ſignificatum ſatis eleganter per tempus, quo corpus quodpiam per curuam A M promouetur exprimi poteſt. Si enim celeritas in puncto M, fuerit $= \frac{1}{V}$, hoc eſt ſi celeritas in ſingulis

punctis proportionalis fuerit, functioni cuicunque binarum variabilium x et y, tum

$$V\, dx\, V(1+pp)\,\cdot$$

exprimit elementum temporis ideoque formula

$$\int V\, dx\, V(1+pp),$$

totum tempus quo corpus ab A ad M peruenit.

Explicatio partis tertiae in variatione.

44. Quod ad tertiam partem variationis attinet ſcilicet

$$dt\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)\left(Q-\frac{dR}{dx}+\frac{ddS}{dx^2}\text{ etc.}\right)$$

ea locum non habet, niſi expreſſio Z etiam differentialia ſecundi gradus inuoluat, quod quidem rariſſime vſu venire ſolet. Hic autem obſeruandum eſt, quoniam $M\mu = dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$ fore pro ſequenti elemento

$$m\omega = dt\left(\frac{dy}{dt}\right)+dt\,dx\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$$

vnde colligitur

$$dt\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)=\frac{m\omega - M\mu}{dx}=\frac{M\omega - M\mu}{Pp},$$

hac autem formula exprimitur declinatio directionis $\mu\omega$ a directione Mm, quae quidem, vt iam ante obſeruauimus ſemper eſt quam minima.

45. Quodſi ergo Tangens in μ perfecte fuerit parallela tangenti in M, quod euenit, ſi etiam in curua generatrice B N, tangens ad N huic fuerit parallela, tum variatio ex tertia parte oriunda prorſus euaneſcit, quod etiam de termino initiali A eſt intelligendum, ſi tangentes in A et B inter ſe fuerint

fuerint parallelae, atque hinc iam perſpicitur, vt variationes ex quarta parte oriundae euaneſcant, neceſſe eſt, vt praeterea etiam radii oſculi in punctis M et μ fiant aequales.

46. Atque ex his iam ſatis perſpicuum eſt, variationes ex ſecunda parte oriundas euaneſcere, ſi omnes curuae proximae $\alpha\mu$ per vtrumque terminum M et A ducantur. Deinde vero inſuper etiam variationes tertiae partis, ſi omnes curuae proximae ſimul in vtroque termino A et M cum curua principali AM communes habeat tangentes. Praeterea vero quoque variariones quartae partis in nihilum abire, ſi omnes curuae proximae in terminis A et M inſuper ratione curuaturae cum curua principali conveniant. Hic autem probe meminiſſe iuuabit, variationes tertiae partis per ſe euaneſcere, ſi modo quantitas Z non differentialia ſecundi gradus inuoluat; quartae vero partis ſemper euaneſcere niſi differentialia tertii gradus in quantitatem Z ingrediantur, et ita porro. Vnde quum initio oſtenderimus, quomodo variatio primae partis ad nihilum ſit redigenda, nunc euidentiſſime intelligimus ſub quibusnam conditionibus, omnes variationis partes ſimul euaneſcant.

Dilucidationes circa curuas maximi, minimiue proprietate praeditas.

47. Si formula integralis $\int Z\,dx$ in curua quaeſita debeat eſſe vel maximum vel minimum, iam ſupra oſtendimus, poſito

dZ

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.}$$

naturam huius curuae, hac exprimi aequatione:

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \text{ etc.}$$

quae aequatio niſi quantitates P, Q, R euaneſcant, vel ſint conſtantes, ſemper eſt differentialis vel ſecundi, vel quarti, vel ſexti, aliusue gradus paris. Hic ergo ſtatim memoratu dignum occurrit quod iſta aequatio nunquam vel ſimpliciter differentialis, vel tertii, vel quinti, aliusue gradus imparis euadat, id quod mox clarius exponemus.

48. Quaeſtiones ergo huc pertinentes, ſponte in varias diuiduntur pro gradu differentialium, ad quem aequationes exſurgunt, quandoquidem ab hoc gradu natura ſolutionis maxime pendet, propterea quod ea ſemper totidem conſtantes arbitrarias inuoluit. Ad primam ergo claſſem referimus eos caſus quibus aequatio pro maximo vel minimo inuenta prorſus eſt finita. Ad ſecundam autem claſſem eos, quibus haec aequatio fit differentialis ſecundi gradus, ad tertiam eos, quibus aequatio ad quartum gradum aſcendit et ita porro, quas ſingulas claſſes ordine deſcribamus.

I. Claſſis. Ad ſolutionem ergo primae claſſis formula $\int Z\,dx$ ſtatim perducit quando expreſſio Z tantum per coordinatas x et y excluſis omnium differentialium rationibus determinatur, quia enim hoc caſu, ſimpliciter fit

$$dZ = M\,dx + N\,dy$$

aequatio pro curua maximi vel minimi erit $N = 0$, quae ergo aequatio omnino eſt determinata, atque adeo

adeo curua ſatisfaciens vnica in ſuo genere. Veluti ſi quaeratur linea in qua valor formulae $\int dx(2xy-yy)$ fiat maximus vel minimus, ob $Z = 2xy - yy$, ideoque $N = 2(x-y)$, aequatio quaeſita erit $x-y=0$, ſeu linea quaeſita erit recta ad axem angulo ſemirecto inclinata, pro qua ergo valor formulae propoſitae integralis eſt $\frac{x^3}{3}$, qui vtique minor eſt, quam ſi vlla alia linea curua ſumeretur pro eadem ſcilicet abſciſſa.

49. His autem caſibus prima claſſis nondum exhauritur, ſed dantur adhuc alii perinde ad aequationes finitas ducentes, ad quod oſtendendum, ſit $\mathfrak{Z}$ functio quaecunque ipſarum x et y atque $d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy$, iamque ponatur $Z = \mathfrak{Z}p$ eritque $M = \mathfrak{M}p$; $N = \mathfrak{N}p$; $P = \mathfrak{Z}$, quare vt formula $\int Z\,dx$ fiat maximum vel minimum aequatio reperitur:

$$0 = \mathfrak{N}p - \frac{d\mathfrak{Z}}{dx} = \mathfrak{N}p - \mathfrak{M} - \frac{\mathfrak{N}.\,dy}{dx} = -\mathfrak{M}$$

quae itidem eſt aequatio finita. Quod quidem etiam ſtatim praeuidere licuiſſet, quum enim ſit $p\,dx = dy$, haec formula integralis $\int \mathfrak{Z}\,dy$ a praecedente $\int Z\,dx$ aliter non differt, niſi quod coordinatae x et y ſint permutatae, vnde quod de priore erat affirmatum, etiam de poſteriore valet.

Hinc natura primae claſſis adhuc generalius ita deſcribi poteſt; vt ea complectatur omnes formulas integrales huiusmodi $\int (Z + \mathfrak{Z}p)\,dx$, vbi litterae Z et $\mathfrak{Z}$ denotant functiones quaſcunque ipſa-

rum x et y, tum enim aequatio pro curua maximi vel minimi erit:

$$o = N - \mathfrak{M},$$

quae eſt aequatio omnino determinata.

II. Claſſis. 50. Ad claſſem ſecundam referimus eas formulas integrales $\int Z dx$, quae deducunt ad aequationem differentialem ſecundi gradus, huc ergo primo pertinent caſus, quibus Z tantum ex litteris x, y et p componitur, ita vt ſit

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$$

vnde quidem caſum poſteriorem primae claſſis excipere oportet, quippe quod euenit, ſi P fuerit functio tantum ipſarum x et y, ita vt pro praeſenti caſu quantitas P praeter x et y etiam litteram p complecti debeat. Tum autem aequatio pro curua quaeſita erit $o = N - \frac{dP}{dx}$, vbi quum P inuoluat p, ideoque $d.(\frac{dx}{dy})$ formula $\frac{dP}{dx}$ continebit differentialia ſecundi gradus, haec ergo aequatio neutiquam eſt determinata, quum duas adeo conſtantes arbitrarias recipiat, quibus effici poteſt, vt curua per data duo puncta tranſeat, atque adeo quaeſtiones huius claſſis ita accuratius ſunt definiendae, vt curuae inueſtigentur, quae non inter omnes plane curuas, ſed inter eas tantum, quae per eadem duo puncta ducuntur, praeſcripta maximi minimiue proprietate gaudeant; ſemper autem quaeſtiones huius claſſis ita ſunt comparatae, vt per naturam ſuam hanc reſtrictionem poſtulent.

51. Praeterea vero etiam ad ſecundam claſſem referri oportet caſus, quibus $Z = \mathfrak{Z} q$ exiſtente $\mathfrak{Z}$ functione quacunque ipſarum x, y et p, ſi enim fuerit

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp$$

habebimus

$$M = \mathfrak{M}q;\ N = \mathfrak{N}q;\ P = \mathfrak{P}q, \text{ et } Q = \mathfrak{Z}$$

quare quum aequatio pro curua ſit

$$o = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}, \text{ ſiue } o = N - \frac{1}{dx}d.\left(P - \frac{dQ}{dx}\right);$$

formula haec $P - \frac{dQ}{dx}$ abit in

$$\mathfrak{P}q - \frac{d\mathfrak{Z}}{dx} = \mathfrak{P}q - \mathfrak{M} - \mathfrak{N}p - \mathfrak{P}q = -\mathfrak{M} - \mathfrak{N}p$$

vnde aequatio noſtra euadet

$$o = N + \frac{1}{dx}d(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}p) = 2\mathfrak{N}q + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + p\frac{d\mathfrak{N}}{dx},$$

quae manifeſto tantum differentialia ſecundi gradus continet. Generalius ergo adhuc ſi formula integralis propoſita fuerit $\int(Z + \mathfrak{Z}q)dx$, vbi Z et $\mathfrak{Z}$ quomodocunque ex quantitatibus x, y et p ſint compoſitae, aequatio pro curua quaeſita erit

$$o = N - \frac{dP}{dx} + 2\mathfrak{N}q + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + p\frac{d\mathfrak{N}}{dx}$$

ſiue etiam

$$o = N\,dx - dP + 2\mathfrak{N}dp + d\mathfrak{M} + p\,d\mathfrak{N}$$

quae manifeſto tantum eſt differentialis ſecundi gradus.

52. At ſi quantitas Z ita ex litteris x, y, p et q fuerit compoſita vt poſito III. Claſſis.

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq$$

 etiam

etiam quantitas Q inuoluat litteram q, tum huiuſmodi caſus ad tertiam claſſem erunt referendi et quum aequatio pro curua quaeſita reperiatur

$$o = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$$

euidens eſt terminum $\frac{ddQ}{dx^2}$ inuoluere differentialia quarti gradus, vnde aequatio finita pro curua implicabit quatuor conſtantes arbitrarias, quibus ergo effici poteſt, vt curua deſiderata non ſolum per datos duos terminos tranſeat, ſed etiam eius tangentes in vtroque termino datam obtineant poſitionem, in qua quadruplici determinatione natura quaeſtionum ad hanc claſſem pertinentium continetur et accuratiſſime perſpicitur.

53. Reliquis caſibus ad hanc claſſem pertinentibus non immoror, verum potius illuſtrationis cauſſa

Tab. II. Fig. 1. inſigne adferam exemplum, quo curuae elaſticae inveſtigari ſolent. Scilicet ſi littera ϱ denotet radium oſculi curuae quaeſitae in puncto M, omnes has curuae hac gaudent proprietate, vt in iis haec formula $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\varrho\varrho}$ ſit minimum, ideoque habeatur $Z = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\varrho\varrho}$, quum vero ſit $\varrho = \frac{(1+pp)^{3:2}}{q}$ habebimus $Z = \frac{qq}{(1+pp)^{5:2}}$ vnde fit

$$M = o,\ N = o,\ P = \frac{-5pqq}{(1+pp)^{7:2}} \text{ et } Q = \frac{+2q}{(1+pp)^{5:2}}$$

quare quum ob $N = o$, aequatio pro curuis quaeſitis ſit:

$$o = -\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2},$$

eius

eius integrale ſtatim praebet

$$P - \frac{dQ}{dx} = A,$$

quae adhuc eſt differentialis tertii gradus.

54. Verum haec aequatio adhuc in genere integrari poteſt, multiplicetur enim per $q\,dx = dp$, vt habeatur haec aequatio

$P\,dp - q\,dQ = A\,dq$, quum vero ſit $dZ = P\,dp + Q\,dq$ erit $P\,dp = dZ - Q\,dq$, quo valore ſubſtituto aequatio reſultat haec: $dZ - Q\,dq - q\,dQ = A\,dp$, cuius integrale manifeſto eſt $Z - Qq = Ap + B$, nunc igitur pro Z et Q valores ſupra dati ſubſtituantur atque nanciſcemur ſequentem aequationem:

$$\frac{-qq}{(1+pp)^{5:2}} = Ap + B$$

mutatis igitur ſignis conſtantium colligemus

$$qq = (Ap + B)(1 + pp)^{5:2} \text{ ideoque}$$

$$q = (1 + pp)^{5:4} \sqrt{(Ap + B)} = \frac{dp}{dx},$$

ſicque concludimus

$$dx = \frac{dp}{(1 + pp)^{\frac{5}{4}} \sqrt{(Ap + B)}},$$

hincque porro

$$dy = \frac{p\,dp}{(1 + pp)^{\frac{5}{4}} \sqrt{(Ap + B)}}$$

quibus duabus aequationibus conſtructio curuae abſoluitur.

55. Cum olim haec Methodus maximorum et minimorum tractari eſt coepta, non ſolum eiusmodi curuae ſunt inueſtigatae in quibus formula quaepiam integralis $\int Z\,dx$ eſſet vel maximum vel minimum; ſed etiam eiusmodi quaeſtiones proponebantur, vt non inter omnes plane curuas, ſed inter eas tantum, quae habeant eandem longitudinem ea quaeratur, in qua illa formula fiat maxima vel minima, ex quo ipſo caſu nomen Problematis Iſoperimetrici eſt natum hoc autem nomen non impediuit, quo minus eiusmodi quaeſtiones generaliores proponerentur, vt inter omnes eas curuas quibus valor certae cuiuspiam formulae integralis $\int V\,dx$ aeque conueniat, ea definiatur in qua formula $\int Z\,dx$ maximum minimumve ſortiatur valorem, quin etiam conditiones adhuc fuerunt multiplicatae in hunc modum, vt tantum inter omnes eas curuas, quibus non ſolum formula $\int V\,dx$, ſed etiam hae quotcunque $\int V'\,dx$, $\int V''\,dx$ etc. aequaliter competant, ea definiatur in qua $\int Z\,dx$ ſit maximum vel minimum, cuiusmodi problemata tum temporis ſummopere ardua ſunt viſa. Poſtquam vero in *tractatu meo de hoc argumento* oſtendiſſem huiusmodi problemata ſemper reduci poſſe ad hoc problema ſimplex, quo inter omnes plane lineas, ea inueſtigetur, in qua haec formula integralis

$$\int dx\,(Z + \alpha V + \beta V' + \gamma V'' \text{ etc.})$$

fiat maximum vel minimum, huius generis problemata nullam amplius habent difficultatem.

DE

DE SVMMATIONIBVS SERIERVM QVARVNDAM INCONGRVE VERIS EARVMQVE INTERPRETATIONE ATQVE VSV.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Seriebus potiſſimum recurrentibus hoc commune eſt, vt in infinitum continuatae aliquando ſummam indicent manifeſte falſam *in concreto*, nec tamen abſurdam *in abſtracto*: ſola quippe ſumma, quam analyſis docet, ſufficiente quadam ratione ſuffulta eſt, quae efficit, vt ſic nec aliter determinetur, haec ratio ſufficiens, cum in vera quaeſtionis natura poſita ſit, non ſinit ſolutionem eſſe falſam in abſtracto; hinc fit vt ſi diuerſos ſolutionis modos adhibeamus, in eundem vsque valorem conſtantiſſime incidamus: imo ſi ſolutione paradoxa vtamur ceu termino medio ad alias quantitates inde determinandas, nulli amphiboliae ſubiectas, determinatio obtinetur manifeſte vera non ſecus ac quantitates reales deducuntur ex quantitatibus imaginariis.

§. 2. Proponatur, exempli gratia, ſimpliciſſima ſeries iam olim agitata $1 - 1 + 1 - 1 + 1 -$ etc. cuius

cuius ſumma dicitur $= \frac{1}{2}$. Vera atque ſufficiens huius determinationis ratio in hoc poſita eſt, quod ſumma ſit vel $= 1$ vel $= 0$ prouti numerus terminorum fuerit ſiue impar ſiue par: ſed quia ſeries nusquam finitur, vtraque ſumma aequali vtique iure gaudet; nulla militat ratio pro numero terminorum pari potius quam impari; ergo ſumma ſtatuenda eſt, quae aequaliter diſtat ab 1 et ab nihilo, id eſt, $= \frac{1}{2}$. Iam vero hanc ſummam, ex primo artis coniectandi lemmate deductam, aliis modis confirmemus.

Si quantitas $\frac{1}{1+x}$ in ſeriem conuertatur per diuiſionem infinitam, fiet

$$1 - x + xx - x^3 + x^4 - \text{etc.} = \frac{1}{1+x}.$$

Sumatur $x = 1$ et habebitur iterum

$$1 - 1 + 1 - 1 - \text{etc.} = \frac{1}{2}.$$

Eandem nos docet ſummam theorema illud, quo demonſtratur pro quouis angulo x, quod ſit

$$\text{coſ.}\, x + \text{coſ.}\, 2x + \text{coſ.}\, 3x + \text{coſ.}\, 4x + \text{coſ.}\, 5x + \text{etc.} = -\frac{1}{2};$$

ſi enim ſumatur angulus x aequalis duobus rectis, orietur

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

atque proinde

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.} = \frac{1}{2}.$$

Inſuper ponatur

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.} = S;$$

ſubtra-

ſubtrahatur primus terminus et erit

$$-1+1-1+1-\text{etc.}=S-1$$

ſiue conuerſis ſignis

$$1-1+1-1+\text{etc.}=-S+1:$$

quia vero haec vltima ſeries eadem eſt cum ea quae propoſita eſt, habebitur $-S+1=S$ vnde $S=\frac{1}{2}$. Hic equidem opponi poteſt, ſeriem emerſam non eandem eſſe cum propoſita, quandoquidem vi conſtructionis altera alteram vno termino ſuperat; ſed quia terminus in ſerie emerſa deficiens aequo iure eſt vel $+1$ vel -1, adhibendus eſt medius inter vtrumque adeoque ſtatuendus $=0$; Ergo differentia inter vtramque ſeriem $=0$ ſicque omne oppoſitionis momentum euertitur.

Denique notetur quod pro quouis terminorum numero n ſit ſumma ſeriei propoſitae $=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n$ et quod, ob rationem modo dictam, pro caſu $n=\infty$, ſit $-\frac{1}{2}(-1)^n$ vel $=\frac{1}{2}$ vel $=-\frac{1}{2}$, inter quos ambos valores, cum medius iterum euaneſcit, ſumma ſeriei propoſitae ſimpliciter ſtatuenda erit $=\frac{1}{2}$.

§ 3. Apparet ergo, quod omnes et ſinguli modi, quibus ad ſummam quaeſitam peruenitur, eodem conſtantiſſime recidant ſimulque intelligimus omnem alium valorem, praeter ſummam inuentam, contradictionem inuoluere ideo, quod ſi ſumma dicatur $\frac{1}{2}+\alpha$, eadem ſit ratio vt ſtatuatur $=\frac{1}{2}-\alpha$: igitur, vt contradictio euitetur, oportet vt ſit $\alpha=0$ atque adeo ſumma ſeriei propoſitae $=\frac{1}{2}$. Attamen

 ſeries

ſeries nullo modo ad hanc ſummam conuergit, nec vnquam fieri poteſt, vt cum illa congruat. Summa *proprie* nec vera eſt nec falſa; prius per ſe manifeſtum, poſterius liquet ex eo, quod ex falſo verum nunquam legitime deduci poſſit; id vero fieri poſſe videbimus in ſequentibus.

§. 4. Sed et ſeries diuergentes, quarum termini alternant in ſignis, ſimilem agnoſcunt legem: proponatur, exempli gratia, ſeries $1 - 2 + 3 - 4 + 5 -$ etc. dico ſummam eius eſſe $= \frac{1}{4}$: hoc autem aſſertum pluribus iterum modis demonſtratur, qui omnes egregie inter ſe conſpirant, vtcunque proprio ſenſu falſum ſit.

Primo. Conſideretur ſeries tanquam recurrens ſecundi ordinis, cuius ſcilicet indices ſunt -2 et -1, ita vt quiuis terminus compoſitus ſit ex duplo praecedenti negatiue ſumto et ex antepraecedente pariter negatiue ſumto; huius ſeriei, ſi termini cuiusvis index dicatur n, terminus generalis eſt $-n(-1)^n$. Sequitur etiam ex theoria ſerierum recurrentium, pro quouis terminorum numero n, eſſe ſummam omnium terminorum generaliter $= -\frac{1}{2}n(-1)^n - \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{4}$; iam vero, cum numerus terminorum eſt infinitus, aequum ius competit in numerum parem et imparem: in priori caſu fit ſumma $= -\frac{1}{2}n$, in poſteriori $= \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$: ergo valor medius inter vtramque ſummam $= \frac{1}{4}$, cui vtique ſumma ſeriei propoſitae infinitae, ſecundum regulam fundamentalem probabilitatum, cenſenda eſt aequalis. Haec ad mentem inter-

interpretationis noſtrae: videamus an idem valor ex aliis principiis oriatur.

Secundo. Conſideretur ſeries propoſita ſub forma generaliori $1 - 2x + 3xx - 4x^3 + 5x^4 - \text{etc.}$ notum autem eſt ſummam huius ſeriei infinitae eſſe $= \frac{1}{(1+x)^2}$, quicunque fuerit valor x: ponatur nunc $x = 1$ et habebitur ſeries propoſita $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \text{etc.} = \frac{1}{4}$.

Tertio. Ponatur $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \text{etc.} = S$; ſubtrahatur aequatio $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.} = \frac{1}{2}$ paragrapho ſecundo demonſtrata et habebitur $0 - 1 + 2 - 3 + 4 - \text{etc.} = S - \frac{1}{2}$. Conuerſis ſignis neglectoque primo termino, nihilo aequali, fit $1 - 2 + 3 - 4 + \text{etc.} = - S + \frac{1}{2}$; haec vltima vero ſeries nihil differt a ſerie propoſita, cuius ſummam ponimus $= S$; erit itaque $S = - S + \frac{1}{2}$ ſiue $S = \frac{1}{4}$. Alias huiuſcemodi ſiue ſolutiones ſiue demonſtrationes quisque ſibi haud difficulter formabit. Dico autem non poſſe non eſſe concordantes cum noſtris etiamſi aſſertum in *concreto* manifeſte falſum fuerit. Scio interim quid vbique obiici poſſit, imo obiectionibus aſſentior: at hoc ipſum eſt, quo tendo. Verane ſunt allata an falſa? vtrumque aequo affirmabitur iure: ſecabo nodum ſubſidiario vocabulo vtcunque hybrido *incongruenter vera.* Caeterum me non monente per ſe patet formari poſſe huiuſcemodi ſeries innumeras altiorum generum quas ſignorum alternatio ſummabiles reddat. Sufficient autem allata exempla ſimpliciora pro inſtituto noſtro.

§. 5. In praecedente paragrapho, articulo ſecundo, conſideraui ſub forma generaliori aequationem $1 - 2x + 3xx - 4x^3 + 5x^4 - \text{etc.} = \frac{1}{(1+x)^2}$ pro quocunque numero x. In quemcunque nunc cenſum referatur haec aequatio, pro caſu $x = 1$, certum eſt legitimo inde modo deduci poſſe valores, ab omni dubio liberos; ſcilicet multiplicetur aequatio per dx, conſiderando x tanquam quantitatem variabilem, poſteaque integretur aequatio cum additione debitae conſtantis: hoc modo peruenitur ad hanc aliam aequationem $x - xx + x^3 - x^4 + x^5 - \text{etc.} = \frac{x}{1+x}$, quae cum nondum clara ſit in caſu $x = 1$, poterit vlterius deprimi, ſi multiplicetur per $\frac{dx}{x}$, quo facto obtinebitur $dx - xdx + xxdx - x^3dx + x^4dx - \text{etc.} = \frac{dx}{1+x}$, cuius integralis dat $x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \text{etc.} = \log. 1 + x$. Iam vero iſta aequatio nulli porro controuerſiae ſubiecta eſt cum ſumitur $x = 1$: ergo etiam antecedentes aequationes, ex quibus legitime deducta fuit poſtrema, peculiari ſuo iure veris erunt annumerandae.

§. 6. In prima noſtra ſerie ſimpliciſſima (A) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.}$ quaeuis periodus ex duobus ſaltem terminis conſtat, poſt quos ſeries eadem reſurgit; conſideremus iam ſeries periodicas trium terminorum, atque conſtanter tales vt ſumma terminorum pro quauis periodo ſit $= 0$, ad quam claſſem pertinent ſeries ſinuum aut coſinuum, quorum anguli formant progreſſionem arithmeticam. Sit, verbi gratia, ſeries infinita (B) $1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - \text{etc.}$ cuius

cuius ſcilicet quaeuis periodus conſtat ex tribus terminis $1, -1$ et 0; haec ſeries recurrens formatur ſi ſumma duorum quorumuis terminorum, ſe inuicem ſubſequentium ſumatur ſub ſigno contrario pro termino proxime ſequente habetque, pro quocunque indice n, terminum generalem $\frac{1}{\sqrt{-3}}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{-3}}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n$. Pertinet quoque haec ſeries ad ſeriem ſinuum: ſumatur nempe $\text{ſin.}\,120° + \text{ſin.}\,2.\,120° + \text{ſin.}\,3.\,120° + \text{ſin.}\,4.\,120° +$ etc. atque ſinguli termini multiplicentur per $\frac{2}{\sqrt{3}}$ atque ſic formabitur rurſus ſeries propoſita (B). Quaeritur nunc ſumma huius ſeriei (B): an ſumma eadem erit quae in ſerie (A), ideo quod ſinguli termini ſuperabundantes in ſerie (B) ſint nihilo aequales? minime erit eadem: vera enim aeſtimatio ſic eſt formanda.

Cum numerus periodorum nihil ad ſummam faciat, omne quaeſtionis momentum in hoc conſiſtet an ſeries in eadem periodo abrumpatur vel a primo, vel a ſecundo vel a tertio periodi termino: in primo caſu fit ſumma ſeriei (B) $= 1$: in duobus poſterioribus fit $= 0$: quoniam autem ſinguli caſus, ſi ſeries infinita cenſeatur, aequo inter ſe gaudent iure, ponenda erit ſumma $= \frac{1}{3}$ ad normam regulae fundamentalis in aeſtimanda ſorte, mutato autem ſolo ordine trium terminorum cuiusuis periodi, alia oritur ſumma; ſic ſi, verbi gratia, formetur ſeries (C) $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 -$ etc. habebimus duos caſus pro ſumma 1 et vnum caſum pro 0; vnde nunc ſumma facienda eſt $= \frac{2}{3}$.

 §. 7.

§. 7. Vndecunque principium noſtrum contemplemur, mirificum manifeſtat conſenſum. Addantur ſeries (A) cuius ſummam inuenimus $= \frac{1}{2}$ et ſeries (B) $= \frac{1}{3}$, oportet vt ſumma ab additione oriatur $= \frac{5}{6}$. Nempe oritur:

$$
\begin{array}{ll}
(A) & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.} = \frac{1}{2} \\
(B) & 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \text{etc.} = \frac{1}{3} \\
\hline
(A)+(B) & 2 - 2 + 1 + 0 + 0 - 1 + 2 - 2 + 1 + \text{etc.} = \frac{5}{6}.
\end{array}
$$

Notetur nunc aggregatum ex vtraque ſerie novam formare ſeriem recurrentem, in qua quaeuis periodus conſtat ex ſex terminis, poſt quos conſtanter eadem reſurgit. Iam vero ſi ſeries in primo periodi termino terminari cenſeatur, erit ſumma $= 2$; ſi in ſecundo ſit ſumma $= 0$; ſi in tertio, erit ſumma $= 1$ eademque erit ſumma ſi in quarto vel in quinto termino ſeries terminetur atque tandem ſumma erit $= 0$, ſi in vltimo periodi termino ſeries abrupta putetur; ſunt igitur duo caſus, quibus ſumma ſit $= 0$; dein tres caſus, quibus ſit $= 1$ et vnus caſus, qui ſummam facit $= 2$; hinc docemur, ex lege probabilitatum, ſummam ſeriei $2 - 2 + 1 + 0 + 0 - 1 + 2 - 2 + 1 +$ etc. ſtatuendam eſſe $= \frac{5}{6}$ plane vt prouidebatur.

Simili modo, ſi ſeries (B) ab ſerie A ſubtrahatur, ſeries noua ſexti ordinis oritur, cuius ſingulae periodi conſtant ex terminis $0 - 0 + 1 - 2 + 2 - 1$ et cuius ſumma prouidetur $= \frac{1}{6}$. Reuera ſumma eſt vel 0 vel 0 vel 1 vel $- 1$ vel 0, prouti ſeries vel

vel in primo, vel in ſecundo, tertio, quarto, quinto vel ſexto periodi termino abrumpi cenſeatur: igitur in tribus caſibus fit ſumma ſeriei $= 0$, in duobus fit ſumma $= 1$ et in vnico caſu $= -1$: ergo valor ſummae *in abſtracto* ſtatuendus $= \frac{1}{6}$.

Si lubeat inſuper combinationem inſtituere inter ſeries (A), (B) et (C), qualiscunque illa fuerit, noua inde proueniens ſeries ſummam habebit principio noſtro exacte conformem. Id quidem principium iam ante hos quadraginta annos, cum in contemplandis ſeriebus recurrentibus me occuparem, perſpexeram, nunc autem in lucem ponere volui, vt inde genuina huiusmodi ſummationum interpretatio pateret, ſine qua facile nubes pro Iunone accipi poſſet. Si concipiamus punctum aliquod fixum in linea recta et ſingulas ſummas poſſibiles repraeſentemus per diſtantiam puncti a praefato puncto fixo, principium noſtrum exhibet diſtantiam centri grauitatis, quae omnibus iſtis diſtantiis conuenit. Quotcunque interim termini ſibi inuicem addantur, ſummae reales nunquam conuergunt verſus determinatum centrum grauitatis, ſed potius circa illud a puncto ad punctum tranſiliunt: igitur huiusmodi ſeries hoc nomine inutiles fiunt ad problemata phyſico-mechanica appropinquatione ſoluenda, niſi ſumma vniuscuiusuis periodi diminuatur, id quod mediante ipſa ſerie primitiua infinita, etiamſi *incongruenter vera*, ſaepe fieri poteſt, vti in anteceſſum monui §. 5; vbi dixi quod poſito $x = 1$ aequatio

$$1 - 2x + 3xx - 4x^3 + 5x^4 - \text{etc.} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

equidem

equidem ſit incongrue vera, ſed quod tamen legitimo modo inde deducatur aequatio nulli dubio ſubiecta

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.} = \log. 2.$$

Mihi quidem principium, de quo ſermo eſt, antequam vllum vlterius examen de illo inſtituerem fuit per ſe clarum, ſimul autem intelligo alios aliter ſentire poſſe: quoniam autem demonſtrationem directam principii non video, multiplici inductione argumentum ſtabiliendum eſſe cenſui.

§. 8. Quod ad vnam quamuis ſeriei periodum attinet, poteſt illa ex quotcunque imo innumeris compoſita eſſe terminis; fuerit primus periodi terminus a, ſumma ex duobus primis terminis b, ſumma ex tribus primis terminis c et ſic porro donec periodus integra fuerit exhauſta, ſitque n numerus terminorum quamuis periodum formantium, principium noſtrum dabit ſummam ſeriei recurrentis infinitae $= \frac{a + b + c + etc.}{n}$, ſi modo ſumma cuiusuis periodi integrae ponatur $= 0$ et quacunque methodo alia, ſeries ſummata fuerit, nunquam ſumma ab iſto valore differet, etiamſi ſumma non aliter quam incongrue vera ſit nec vllam admittat ſeries appropinquationem quantuscunque terminorum numerus aggregetur: Haec ideo notari merentur, quod omnes ſeries ſinuum atque coſinuum, quorum anguli arithmeticam formant progreſſionem, perfecte pertineant ad ſeries recurrentes de quibus hic ſermonem facio: etſi enim in ſerie generaliter expreſſa nulla appareat periodus, apparebit tamen in quouis caſu pecu-

peculiari; imo ſimpliciſſima ſeries ſinuum aut coſinuum, omnes ordines in ſe comprehendit pro ratione, quam primus angulus habet ad quatuor rectos, ſiue ſemel ſiue quotiescunque ſumtos.

§. 9. Si ſumatur in circulo, vnitatem pro radio habente arcus qualiscunque x, animaduertit Illuſtris de la Grange, quod ſit ſeries infinita

$$\text{coſ.}\, x + \text{coſ.}\, 2x + \text{coſ.}\, 3x + \text{coſ.}\, 4x + \text{coſ.}\, 5x + \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}$$

ſiue aequalis coſ. 60°. negatiue ſumto. Hoc theorema inter incongrue vera pono, nec aliter interpretandum eſt, quam quod valor ſeriei medius ſit inter omnes cuiusuis periodi valores reales poſſibiles. Iam vero apparet ſolam hanc ſeriem in ſe comprehendere omnes ordines ſerierum recurrentium: nam ſi quadrans circuli ſiue angulus rectus dicatur q et ponatur ſucceſſiue

$$x = 2q;\quad x = \tfrac{4}{3}q;\quad x = q;\quad x = \tfrac{2}{3}q \text{ etc.}$$

obtinebimus ſeries recurrentes, quae ſequuntur pro ordine ſecundo, tertio, quarto, ſexto

$$-1 + 1) - 1 + 1 - 1 + 1 + \text{etc.}$$

$$-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + 1) - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + 1 - \text{etc.}$$

$$0 - 1 - 0 + 1) + 0 - 1 - 0 + 1 + 0 - 1 - \text{etc.}$$

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 1) + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} - \text{etc.}$$

Summa ſingularum harum ſerierum, pro regula §. 8. ſemper dabit valorem $-\tfrac{1}{2}$ plane vt in-

dicat ipſum theorema generale. Sic vltima ſeries pro ſexto ordine ſummam habet

$$\frac{\frac{1}{2}+0-1-\frac{1}{2}-1+0}{6}=-\frac{1}{2}:$$

vnde intelligimus, quemadmodum huiusmodi theoremata ſint interpretanda et qualis inde vſus in ſoluendis problematis ſperari poſſit; nihil vnquam ſtatuendum, quod cum vera infiniti idea conſiſtere nequeat.

§. 10. Si ex duabus pluribusue ſeriebus recurrentibus, additione terminorum analogorum, noua formetur ſeries haec quoque recurrens erit, vt vidimus §. 7. Index autem ordinis pro noua ſerie ſemper erit minimus communis diuiduus omnium indicum, qui conueniunt ordinibus ſerierum ex quibus noua formata fuit. Sic aggregatum quatuor ſerierum numericarum in praecedente paragrapho expoſitarum et ad ordinem ſecundum, tertium, quartum et ſextum pertinentium, ſeriem formabit recurrentem de ordine duodecimo, cuius ſumma, ſi in infinitum continuetur, neceſſario erit $=-2$. Id vero ſequens confirmabit ſchema

$$-1+1)-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\text{etc.}=-\tfrac{1}{2}$$
$$-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1)-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1-\text{etc.}=-\tfrac{1}{2}$$
$$0-1-0+1)+0-1-0+1+0-1-0+1+0-1-0+\text{etc.}=-\tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}-1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+1)+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}-1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}-1-\text{etc.}=-\tfrac{1}{2}$$

ſumma $(-1-1-1+1-1+2-1+1-1-1-1+4)-1-1-1+\text{etc}=-2.$

Quae-

Quaeratur nunc ad normam paragraphi octaui ſumma ſeriei vltimae in infinitum continuatae et erit haec ſumma

$$= \frac{-1-2-3-2-3-1-2-1-2-3-4+0}{12} = -2.$$

Scilicet inter duodecim caſus aeque faciles vnus eſt, qui ſummam dat $= 0$; tres caſus quibus ſumma obtinetur -1; quatuor quibus ſumma fit -2, tres quibus -3 et vnus quo ſumma prodit -4; ergo regula probabilitatum exigit vt ſtatuatur ſumma $= -2$ nec vsquam principium fallit.

§. 11. Elegantiſſimum vtique theorema eſt, cuius mentionem feci ab initio paragraphi noni; mirum nempe eſt, quod qualiscunque fuerit arcus x, ſumma omnium coſinuum in infinitum, conſtanter eadem prodeat. Incipiatur ſeries ab arculo vtcunque paruo vel vtcunque magno; imo excedat primus arcus x integram circuli peripheriam, non fallet theorema, quod ſummam facit $= -\frac{1}{2}$. Tanto minus reticendos eſſe puto caſus ſolitarios, quibus aſſumitur $x = 4nq$ intelligendo per n numerum integrum qualemcunque, non excepta nullitate: In his nimirum caſibus naſcitur ex theoremate ſeries vnitatum

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.}$$

de qua non apparet, quod vllo ſenſu dici poſſit $= -\frac{1}{2}$, cum ſit aperte infinita nullique dubio incertaeue interpretationi ſubmiſſa. Ergo hi caſus reuera a regula generali erunt excipiendi, an vero

 theore-

theorema, quod calculus vniuerſaliter verum indicat, in aliquibus caſibus falſum eſſe poterit? imo poterit, ſi caſus iſti eius ſint indolis ac hic ſunt. Paradoxum ſic explico.

Notetur quod, ſi ponatur $x = 4nq + \alpha$, theorema totam ſuam vim retineat, vtcunque parua fuerit quantitas α, ſola enim nullitas eius abſoluta excludenda eſt, quia ſcilicet in theoremate ſeries conſideratur non *relatiue* ſed *abſolute* infinita; Dico igitur non dari arculum α, qui vllam falſitatis ſuſpicionem mouere poſſit; quicquid exiſtit, ſi abſolute infinities replicari ponatur, in infinitum tranſire poteſt. Ergo in arcu x non excluduntur arculi; excluduntur ſaltem puncta vere mathematica, quorum exiſtentiam et poſitionem analyſis abſtracta indicare nequit. Sic methodus tangentium indicare non poteſt puncta regreſſuum (points de rebrouſſement) ſi quae ſint in curua propoſita, nec tamen propterea methodus tangentium infringitur aut vllius falſitatis argui poteſt. Sic igitur theorema, de quo agimus, valet de omni magnitudine arcus aſſumti x, a nihilo vsque ad finem integrae primae reuolutionis, ab initio ſecundae reuolutionis vsque ad finem, et ſic de reuolutione quauis quoties libuerit repetita; excipiuntur ſaltem puncta vere mathematica cuiusuis tranſitionis vna cum ipſo puncto initiali.

§. 12. Praemiſſam vrgere explicationem volui, quia ſeries infinitae ſinuum atque coſinuum egregie illuſtrant abſtruſiſſimum aeque ac vtiliſſimum argumentum de

de minimis chordarum vibrationibus. Diſputatum diu eſt inter primos huius ſaeculi mathematicos, an ſingula chordae puncta ad quamcunque ab axe diſtantiam minimam deduci poſſint, vt vibrationes ſuas forment regulares, mihi autem nunc videtur id affirmari non poſſe, niſi per vibrationes minimas intelligantur vibrationes vere nullae; equidem et tunc ratio qualiscunque inter ſingulas applicatas concipi poteſt; reuera autem curuatura qualiscunque quaeritur in linea perfecte recta et motus vibratorius in quiete abſoluta. Verum haec diſcuſſio nimis adhuc a propoſito noſtro remota eſt, quam vt illi in praeſentia rerum inſiſtam. Notetur autem dari progreſſiones ſinuum atque coſinuum innumeras, ſi diuerſae coefficientes terminis ſeriei praefigantur, quarum aliae praefato incommodo ſubiectae ſint aliae non ſint. Caeterum theoremati, quod de progreſſione coſinuum infinita allegatum fuit, mutatis mutandis ſimile inquiram de progreſſione ſinuum, ideo quod maxime ad praeſens inſtitutum noſtrum pertinet nec meminerim an ab aliis iam expoſitum fuerit, imo fortaſſe a me ipſomet.

§. 13. Proponatur ergo indaganda ſeries infinita $\text{ſin.}\,x + \text{ſin.}\,2x + \text{ſin.}\,3x + \text{ſin.}\,4x +$ etc. Dico ſummam huius ſeriei ſtatuendam eſſe $= \frac{\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,x}{\text{ſin. vers.}\,x}$.
En demonſtrationis ſummarium.

Pertinet ſeries propoſita ad ſeries recurrentes ſecundi ordinis, cuius ambo indices ſunt $2\,\text{coſ.}\,x$ et -1,

 ſic

ſic vt quiuis terminus ſit aequalis termino praecedenti multiplicato per $2\cos. x$ demto termino antepraecedente. Igitur, ſecundum theoriam ſerierum recurrentium, formanda eſt aequatio ſecundi ordinis

$$ss = 2s\cos. x - 1,$$

cuius ambae radices ſunt

$$s = \cos. x + \sqrt{(\square \cos. x - 1)} \text{ et } s = \cos. x - \sqrt{(\square \cos. x - 1)}$$

ſiue paullo contractius

$$s = \cos. x + \sin. x\sqrt{-1} \text{ et } s = \cos. x - \sin. x\sqrt{-1}.$$

Sic nunc, poſito indice termini $= n$, in anteceſſum innoteſcit fore terminum generalem in ſerie propoſita $= \alpha(\cos. x + \sin. x\sqrt{-1})^n + \beta(\cos. x - \sin. x\sqrt{-1})^n$, vbi coefficientes α et β ex cognitis duobus primis ſeriei propoſitae terminis ſunt determinandae vel compendioſius ex primo et ex eo qui primum praecederet quique foret $= 0$: hoc modo inuenitur $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{-1}$ et $\beta = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}$, ipſeque tandem terminus generalis $\frac{(\cos. x + \sin. x\sqrt{-1})^n - (\cos. x - \sin. x\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$.

Hoc modo intelligitur, ſeriem propoſitam aggregatam eſſe ex duabus ſeriebus geometricis, quae ſummationem admittunt. Notetur autem hanc ipſam ſummationem pertinere ad theoremata *incongruenter vera*. Sit igitur n numerus abſolute infinitus, erit ſumma ſeriei geometricae, termino generali $(\cos. x + \sin. x\sqrt{-1})^n$ expreſſae, $= \frac{(\cos. x + \sin. x\sqrt{-1})}{1-(\cos. x + \sin. x\sqrt{-1})}$ pariterque ſumma ſeriei geometricae, termino generali $(\cos. x - \sin. x\sqrt{-1})^n$ expreſſae, $\frac{(\cos. x - \sin. x\sqrt{-1})}{1-(\cos. x - \sin. x\sqrt{-1})}$. Exinde

inde ſequitur, eſſe ſummam quaeſitam ſeriei propoſitae infinitae $= \left[\frac{(\text{coſ}.x + \text{ſin}.x\sqrt{-1})}{1-(\text{coſ}.x + \text{ſin}.x\sqrt{-1})} - \frac{(\text{coſ}.x - \text{ſin}.x\sqrt{-1})}{1-(\text{coſ}.x - \text{ſin}.x\sqrt{-1})} \right]$ $2\sqrt{-1}$, quae, ſi recte reducta fuerit, abit in ſimplicem formulam $\frac{\text{ſin}.\,x}{2 - 2\,\text{coſ}.\,x}$ ſiue $\frac{\frac{1}{2}\,\text{ſin}.\,x}{\text{ſin. vers.}\,x}$. Q. E. I.

§. 14. Patet ex praemiſſa ſolut'one, ſeries ſinuum atque coſinuum proprie pertinere ad ſecundum ordinem recurrentium, quia quiuis terminus ex duobus praecedentibus formatur. Sed quod iam monui, numerus terminorum, poſt quos ſeries numerica eadem recurrit, vnice pendet a ratione quae intercedit inter arcum aſſumptum x et peripheriam circuli quod ſi iſta ratio ſit incommenſurabilis, infiniti requiruntur termini pro vnica formanda periodo, ſimulque infinitae periodi ſupponi debent, vt valor ſeriei, quem modo determinauimus, locum habere poſſit. Licebit autem ordinem cuiusuis ſeriei numericae etiam determinare ex numero terminorum vnamquamuis periodum componentium. Ex iſtis notationibus facile erit mente concipere ſolutionem caſus ſingularis, qui contradictionem manifeſtam atque maxime abſurdam inuoluere prima fronte videtur.

§. 15. Ponamus $x = 0$; ſic erit $\text{ſin}.x + \text{ſin}.2x + \text{ſin}.3x + \text{ſin}.4x + \text{ſin}.5x + \text{etc.} = 0$, quia quiuis terminus eſt $= 0$: valor autem ſeriei, quem inuenimus §. 13. $\frac{\frac{1}{2}\,\text{ſin}.\,x}{\text{ſin. vers.}\,x}$ eſt infinitus. An quid ab-

ſurdius

ſurdius, dicent aliqui, excogitari poteſt, quam vt eadem res ſimul ſit nihilo aequalis ſimulque omni quantitate poſitiua aſſignabili maior? ſimilem caſum iam ſupra expoſui. §. 11. Reſponſio iterum in eo conſiſtit, vt diſtinguamus inter vere nihilum idemque abſolutum et inter primum quantitatis naſcentis elementum; In theoria noſtra nihilum abſolutum excluditur, quia non poſſunt tunc ſtatui periodi infinitae numero, cum nec prima periodus vsquam terminari poſſit, ne quidem cogitatione; aliter vero ſe res habet, quamprimum naſcens aliquod quantitatis elementum, etiamſi omni quantitate aſſignabili minus, arculo x ineſſe putamus, ſic enim ſubito valor ſeriei a vero nihilo ad vere infinitum tranſilit. Dein creſcente x ſtatim enormiter decreſcit ſeries ſinuum haecque plane euaneſcit cum ſumitur $x = 2q$: tum vero creſcente adhucdum arcu x, fit ſumma ſeriei negatiua, tandemque, facto $x = 4q$, ſumma ſeriei prodit negatiue infinita. Superato hoc puncto ſeries ab infinito negatiuo ad infinitum affirmatiuum tranſilit variationesque eaedem perfecte recurrunt ac repetuntur in infinitum haec omnia vlteriori commentatione non indigna forent; dabitur fortaſſe occaſio vt argumentum reſumam. Nunc quidem non aliud conſtitui, quam vt veram ſummationum omnino inſolitarum atque incongruarum interpretationem darem vna cum vſu quem permittunt ſimulque oſtenderem perpetuum conſenſum inter ſummam, analytice pro ſerie infinita determinatam et inter ſummam mediam vniuscuiusuis periodi diuiſam per numerum

merum terminorum quamuis periodum formantium (conf. §. 8.) Igitur ſupereſt vt conſenſum etiam oſtendam aliquibus exemplis in ſerie ſinuum §. 13. generaliter ſummata.

§. 16. Inuenimus nempe generaliter

$$\text{ſin.}\,x+\text{ſin.}\,2x+\text{ſin.}\,3x+\text{ſin.}\,4x+\text{ſin.}\,5x+\text{etc.}=\frac{\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,x}{\text{ſin. vers}\,x}$$

ponatur $x=\frac{2}{3}q$ ſiue 120°. prodit ſeries

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+0)+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\text{etc}=\tfrac{1}{6}\sqrt{3}:$$

hic periodus quaeuis conſtat ex tribus terminis

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+0$$

atque regula noſtra paragraphi octaui indicat eandem ſummam

$$=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}+0+0}{3}=\frac{1}{6}\sqrt{3}.$$

Sumatur porro $x=\frac{1}{2}q$ ſiue 45°. atque obtinebitur ſeries

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}}+1+\sqrt{\tfrac{1}{2}}+0-\sqrt{\tfrac{1}{2}}-1-\sqrt{\tfrac{1}{2}}-0)+\sqrt{\tfrac{1}{2}}+1+\text{etc.}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Hic quaeuis periodus conſtat ex octo prioribus terminis, quae ad legem noſtram §. 8. facit ſummam ſeriei

$$=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}+(1+\sqrt{\frac{1}{2}})+(1+2\sqrt{\frac{1}{2}})+(1+2\sqrt{\frac{1}{2}})+(1+\sqrt{\frac{1}{2}})+\sqrt{\frac{1}{2}}+0+0}{8}$$

$$=\frac{8\sqrt{\frac{1}{2}}+4}{8}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

 Quan-

Quando minus concinna eſt expreſſio ſinuum in quauis periodo occurentium, in vſum vocare licebit tabulas ſinuum, quam operationem vnico illuſtrabo exemplo Fuerit $x = \frac{4}{9} q$ ſiue $= 40°$. Erit, ad legem §. 13, ſumma ſeriei ſiue

$$\frac{\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,x}{\text{ſin. vers}\,x} = \frac{0.\,3213938}{0.\,2339556} = 1.\,37373.$$

Iſte vero idem valor obtinebitur vi regulae paragrapho octauo expoſitae, ſi ex tabulis ſinuum excerpantur ſucceſſiue ſinus 40°. 80°. 120°. 160°. 200°. 240°. 280° 320°. et 360°. qui nempe ſinus efformant terminos vniuscuiusuis periodi; quod ſi deinde ſucceſſiue ſumatur ſinus primus, ſumma ex duobus ſinubus primis, ſumma ex tribus ſinubus primis et ſic porro donec omnes fuerint exhauſti atque hae omnes ſummae ſibi inuicem addantur idque aggregatum diuidatur per numerum ſinuum primitiuorum, reperitur

$$\frac{0.\,64278 + 1.\,62758 + 2.\,49360 + 2.\,83562 + 2.\,49360 + 1.\,62758 + 0.\,64278 + 0 + 0}{9}$$

$$= \frac{12.\,36354}{9} = 1.\,37373.$$

qui valor rurſus idem eſt cum praecedente. Mirabilis profecto eſt iſte conſenſus ideo potiſſimum, quod ambae methodi nihil commune inter ſe habere prima fronte videantur: mihi ſaltem etiamnum mirabilis eſt quamuis iam diutiſſime detecta.

EVO-

EVOLVTIO FORMVLAE INTEGRALIS

$$\int x^{f-1} dx (lx)^{\frac{m}{n}}$$

INTEGRATIONE A VALORE $x=0$ AD $x=1$ EXTENSA.

Auctore

L. EVLERO.

Theorema 1.

1.

Si n denotat numerum integrum poſitiuum quemcunque et formulae $\int x^{f-1} dx (1-x^g)^n$ integratio a valore $x=0$ vsque ad $x=1$ extendatur, erit eius valor:

$$= \frac{g^n}{f} \cdot \frac{1. \quad 2. \quad 3. \ldots\ldots\ldots n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\ldots\ldots(f+ng)}.$$

Demonſtratio.

Notum eſt in genere integrationem formulae $\int x^{f-1} dx (1-x^g)^m$ reduci poſſe ad integrationem huius $\int x^{f-1} dx (1-x^g)^{m-1}$ quoniam quantitates conſtantes A et B ita definire licet, vt fiat

$$\int x^{f-1} dx (1-x^g)^m = A \int x^{f-1} dx (1-x^g)^{m-1} + B x^f (1-x^g)^m$$

ſumtis enim differentialibus prodit haec aequatio:

$$x^{f-1}dx(1-x^g)^m = Ax^{f-1}dx(1-x^g)^{m-1} + Bfx^{f-1}dx(1-x^g)^m$$
$$- Bmgx^{f+g-1}dx(1-x^g)^{m-1}$$

quae per $x^{f-1}dx(1-x^g)^{m-1}$ diuiſa dat:

$$1 - x^g = A + Bf(1-x^g) - Bmg\,x^g \text{ ſeu}$$
$$1 - x^g = A - Bmg + B(f+mg)(1-x^g)$$

quae aequatio vt conſiſtere poſſit, neceſſe eſt ſit

$$1 = B(f+mg) \quad \text{et} \quad A = Bmg$$

vnde colligimus $B = \frac{1}{f+mg}$ et $A = \frac{mg}{f+mg}$.
Quocirca habebimus ſequentem reductionem generalem:

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^m = \frac{mg}{f+mg}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{m-1}$$
$$+ \frac{1}{f+mg}\cdot x^f(1-x^g)^m$$

quae cum euaneſcat poſito $x=0$, ſiquidem ſit $f>0$, conſtantis additione haud eſt opus. Quare extenſo vtroque integrali vsque ad $x=1$, pars integralis poſtrema ſponte euaneſcit, eritque pro caſu $x=1$

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^m = \frac{mg}{f+mg}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{m-1}.$$

Cum igitur ſumto $m=1$ ſit $\int x^{f-1}dx(1-x^g)^0 = \frac{1}{f}x^f = \frac{1}{f}$ poſito $x=1$, nanciſcimur pro eodem caſu $x=1$ ſequentes valores:

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^1 = \frac{g}{f}\cdot\frac{1}{f+g}$$
$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^2 = \frac{g^2}{f}\cdot\frac{1}{f+g}\cdot\frac{2}{f+2g}$$
$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^3 = \frac{g^3}{f}\cdot\frac{1}{f+g}\cdot\frac{2}{f+2g}\cdot\frac{3}{f+3g}$$

hinc-

hincque pro numero quocunque integro poſitiuo n concludimus fore

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^n = \frac{g^n}{f}\cdot\frac{1}{f+g}\cdot\frac{2}{f+2g}\cdot\frac{3}{f+3g}\cdots\cdots\frac{n}{f+ng}$$

ſi modo numeri f et g ſint poſitiui.

Coroll. 1.

2. Hinc ergo viciſſim valor huiusmodi producti ex quotcunque factoribus formati, per formulam integralem exprimi poteſt, ita vt ſit

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\ldots(f+ng)} = \frac{f}{g^n}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^n$$

integrali hoc a valore $x=0$ vsque ad $x=1$ extenſo.

Coroll. 2.

3. Quodſi ergo huiusmodi habeatur progreſſio:

$$\frac{1}{f+g};\ \frac{1.\ 2}{(f+g)(f+2g)};\ \frac{1.\ 2.\ 3}{(f+g)(f+2g)(f+3g)};\ \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{(f+g)(f+2g)(f+3g)(f+4g)};\ \text{etc.}$$

eius terminus generalis qui indici indefinito n conuenit commode hac forma integrali $\frac{f}{g^n}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^n$ repraeſentatur, cuius ope ea progreſſio interpolari, eiusque termini indicibus fractis reſpondentes exhiberi poterunt.

Coroll. 3.

4. Si loco n ſcribamus $n-1$, habebimus:

$$\frac{1.}{(f+g)}\frac{2.}{(f+2g)}\frac{3}{(f+3g)}\cdots\frac{(n-1)}{(f+(n-1)g)}=\frac{f}{g^{n-1}}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

quae per $\frac{n}{f+ng}$ multiplicata praebet

$$\frac{1.}{(f+g)}\frac{2.}{(f+2g)}\frac{3}{(f+3g)}\cdots\frac{n}{(f+ng)}=\frac{f.ng}{g^n(f+ng)}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}.$$

Scholion 1.

5. Hanc poſteriorem formam immediate ex praecedente deriuare licuiſſet, cum modo demonſtraverimus eſſe:

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^n=\frac{ng}{f+ng}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

ſiquidem vtrumque integrale a valore $x=0$ vsque ad $x=1$ extendatur; quam integralium determinationem in ſequentibus vbique ſubintelligi oportet. Deinde etiam perpetuo eſt tenendum, quantitates f et g eſſe poſitiuas, quippe quam conditionem demonſtratio allata abſolute poſtulat. Quod autem ad numerum n attinet, quatenus eo index cuiusque termini progreſſionis (§. 3.) deſignatur, nihil impedit, quominus eo numeri quicunque ſiue poſitiui ſive negatiui denotentur, quandoquidem eius progreſſionis omnes termini etiam indicibus negatiuis reſpondentes per formulam integralem datam exhiberi cenſentur. Interim tamen probe tenendum eſt hanc reductionem

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^m=\frac{mg}{f+mg}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{m-1}$$

non eſſe veritati conſentaneam, niſi ſit $m>0$; quia alioquin

alioquin pars algebraica $\frac{1}{f+mg}x^f(1-x^g)^m$ non euaneſceret poſito $x=1$.

Scholion 2.

6. Huiusmodi ſeries, quas tranſcendentes appellare licet, quia termini indicibus fractis reſpondentes ſunt quantitates tranſcendentes, iam olim in Comment. Petrop. Tomo V. fuſius ſum proſecutus; vnde hoc loco non tam iſtas progreſſiones, quam eximias formularum integralium comparationes, quae inde deriuantur, diligentius ſum ſcrutaturus. Cum ſcilicet oſtendiſſem huius producti indefiniti $1.2.3\ldots.n$ valorem hac formula integrali $\int dx\,(l\frac{1}{x})^n$ ab $x=0$ ad $x=1$ extenſa exprimi, quae res quoties n eſt numerus integer poſitiuus per ipſam integrationem eſt manifeſta, eos caſus examini ſubieci, quibus pro n numeri fracti accipiuntur; vbi quidem ex ipſa formula integrali neutiquam patet, ad quodnam genus quantitatum tranſcendentium hi termini referri debeant. Singulari autem artificio eosdem terminos ad quadraturas magis cognitas reduxi, quod propterea maxime dignum videtur, vt maiori ſtudio perpendatur.

Problema 1.

7. Cum demonſtratum ſit eſſe:

$$\frac{1.}{(f+g)}\cdot\frac{2.}{(f+2g)}\cdot\frac{3}{(f+3g)}\cdots\cdots\frac{n}{(f+ng)}=\frac{f}{g^n}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^n$$

inte-

integrali ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſo; eiusdem producti caſu quo $g = 0$ valorem per formulam integralem aſſignare.

Solutio.

Poſito $g = 0$ in formula integrali membrum $(1 - x^g)^n$ euaneſcit, ſimul vero etiam denominator g^n, vnde quaeſtio huc redit vt fractionis $\frac{(1 - x^g)^n}{g^n}$ valor definiatur caſu $g = 0$, quo tam numerator quam denominator euaneſcit. Hunc in finem ſpectetur g vt quantitas infinite parua, et cum ſit $x^g = e^{g\,l\,x}$ fiet $x^g = 1 + g\,l\,x$ ideoque $(1 - x^g)^n = g^n(-lx)^n = g^n(l\frac{1}{x})^n$; ex quo pro hoc caſu formula noſtra integralis abit in $f\int x^{f-1}dx\,(l\frac{1}{x})^n$ ita vt iam habeatur

$$\frac{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots n}{f^n} = f\int x^{f-1}dx\,(l\tfrac{1}{x})^n$$

ſeu $1.\ 2.\ 3\ldots\ldots n = f^{n+1}\int x^{f-1}dx\,(l\frac{1}{x})^n$.

Coroll. 1.

8. Quoties n eſt numerus integer poſitiuus, integratio formulae $\int x^{f-1}dx\,(l\frac{1}{x})^n$ ſuccedit, eaque ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſa reuera prodit id productum, cui iſtam formulam aequalem inuenimus. Sin autem pro n capiantur numeri fracti eadem formula integralis inſeruiet huic progreſſioni hypergeometricae interpolandae:

1; 1. 2; 1. 2. 3; 1. 2. 3. 4; 1. 2. 3 4. 5; etc.
ſeu 1; 2; 6; 24; 120; 720; 5040; etc.

Coroll.

Coroll. 2.

9 Si expreſſio modo inuenta per principalem diuidatur, orietur productum, cuius factores in progreſſione arithmetica quacunque progrediuntur:

$$(f+g)(f+2g)(f+3g)\ldots(f+ng)=f^n g^n \cdot \frac{\int x^{f-1}dx\,(l\frac{1}{x})^n}{\int x^{f-1}dx\,(1-x^g)^n}$$

cuius ergo etiam valores, ſi n ſit numerus fractus hinc aſſignare licebit.

Coroll. 3.

10. Cum ſit

$$\int x^{f-1}dx\,(1-x^g)^n=\frac{ng}{f+ng}\int x^{f-1}dx\,(1-x^g)^{n-1}$$

erit etiam ſimili modo pro caſu $g=0$.

$$\int x^{f-1}dx\,(l\tfrac{1}{x})^n=\frac{n}{f}\int x^{f-1}dx\,(l\tfrac{1}{x})^{n-1}$$

hincque per iſtas alteras formulas integrales:

$$1.\,2.\,3\ldots\ldots n=nf^n\int x^{f-1}dx\,(l\tfrac{1}{x})^{n-1} \text{ et}$$

$$(f+g)(f+2g)\ldots(f+ng)=f^{n-1}g^{n-1}(f+ng)\cdot\frac{\int x^{f-1}dx\,(l\frac{1}{x})^{n-1}}{\int x^{f-1}dx\,(1-x^g)^{n-1}}.$$

Scholion.

11. Cum inuenerimus eſſe:

$$1.\,2.\,3\ldots\ldots n=f^{n+1}\int x^{f-1}dx\,(l\tfrac{1}{x})^n$$

patet hanc formulam integralem non a valore quantitatis f pendere, quod etiam facile perſpicitur ponendo $x^f=y$, vnde fit $fx^{f-1}dx=dy$, et $l\frac{1}{x}=$

$-lx = -\frac{1}{f} ly = \frac{1}{f} l\frac{1}{y}$, ideoque $f^n (l\frac{1}{x})^n = (l\frac{1}{y})^n$, ita vt ſit

$$1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots n = \int dy\, (l\tfrac{1}{y})^n$$

quae formula ex priori naſcitur ponendo $f=1$. Pro interpolatione ergo huiusmodi formarum totum negotium huc reducitur, vt iſtius formulae integralis $\int dx\,(l\frac{1}{x})^n$ valores definiantur, quando exponens n eſt numerus fractus. Veluti ſi n ſit $= \frac{1}{2}$, aſſignari oportet valorem huius formulae $\int dx \sqrt{l\frac{1}{x}}$, quem olim iam oſtendi eſſe $= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ denotante π circuli peripheriam cuius diameter $= 1$: pro aliis autem numeris fractis eius valorem ad quadraturas curuarum algebraicarum altioris ordinis reuocare docui. Quae reductio cum minime ſit obuia, atque tum ſolum locum habeat, quando formulae $\int dx\,(l\frac{1}{x})^n$ integratio a valore $x=0$ ad $x=1$ extenditur, ſingulari attentione digna videtur. Etſi autem iam olim hoc argumentum tractaui, tamen quia per plures ambages eo ſum perductus, idem hic reſumere et concinnius euoluere conſtitui.

Theorema 2.

12. Si formulae integrales a valore $x=0$ vsque ad $x=1$ extendantur et n denotet numerum integrum poſitiuum erit:

$$\frac{1.}{(n+1)}\frac{2.}{(n+2)}\frac{3 \ldots\ldots}{(n+3)\ldots}\frac{n}{2n} = \tfrac{1}{2} ng \int x^{f+ng-1} dx\,(1-x^g)^{n-1} \cdot \frac{\int x^{f-1} dx\,(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1} dx\,(1-x^g)^{2n-1}}$$

quicunque numeri poſitiui loco f et g accipiantur.

Demon-

Demonſtratio.

Cum ſupra (§ 4.) oſtenderimus eſſe:

$$\frac{1.}{(f+g)}\frac{2.}{(f+2g)}\frac{3\ldots\ldots n}{\ldots(f+ng)}=\frac{f.\ ng}{g^n(f+ng)}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

habebimus ſi loco n ſcribamus $2n$

$$\frac{1.}{(f+g)}\frac{2.}{(f+2g)}\frac{3\ldots\ldots 2n}{\ldots(f+2ng)}=\frac{f.\ 2ng}{g^{2n}(f+2ng)}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}$$

Diuidatur nunc prima aequatio per ſecundam, ac prodibit iſta tertia:

$$\frac{(f+(n+1)g)(f+(n+2)g)\ldots(f+2ng)}{(n+1)(n+2)\ldots\ldots 2n}=\frac{g^n(f+2ng)}{2(f+ng)}\cdot\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}}$$

At ſi in prima aequatione loco f ſcribatur $f+ng$, orietur haec aequatio quarta:

$$\frac{1.}{(f+(n+1)g)}\frac{2.}{(f+(n+2)g)}\frac{3\ldots\ldots\ldots n}{\ldots(f+2ng)}=\frac{(f+ng)ng}{g^n(f+2ng)}\int x^{f+ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

Multiplicetur haec quarta aequatio per illam tertiam ac reperietur ipſa aequatio demonſtranda:

$$\frac{1.}{(n+1)}\frac{2.}{(n+2)}\frac{3\ldots\ldots n}{(n+3)\ldots 2n}=\tfrac{1}{2}ng\int x^{f+ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}\cdot\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}}.$$

Coroll. 1.

13. Si in prima aequatione ſtatuatur $f=n$ et $g=1$ orietur idem productum:

$$\frac{1.}{(n+1)}\frac{2.}{(n+2)}\frac{3\ldots\ldots n}{\ldots 2n}=\tfrac{1}{2}n\int x^{n-1}dx(1-x)^{n-1}$$

qua aequatione cum illa collata adipiſcimur:

$$\frac{\int x^{n-1}dx(1-x)^{n-1}}{g\int x^{f+ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}}=\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}}.$$

Coroll. 2.

14. Si in illa aequatione loco x ſcribamus x^g, fiet

$$\frac{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}=\tfrac{1}{2}ng\int x^{ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

ita vt iam conſequamur iſtam comparationem inter ſequentes formulas integrales:

$$\int x^{ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}=\int x^{f+ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}.\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}}.$$

Coroll. 3.

15. Si in aequatione theorematis ponamus $g=0$ ob $(1-x^g)^m=g^m(l\tfrac{1}{x})^m$, poteſtates ipſius g ſe deſtruent, orieturque haec aequatio:

$$\frac{1.\quad 2.\quad 3\ldots n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}=\tfrac{1}{2}n\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{n-1}.\frac{\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{n-1}}{\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{2n-1}}$$

vnde colligimus

$$\frac{(\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{n-1})^2}{\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{2n-1}}=g\int x^{ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

ſeu ob

$$\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{n-1}=\frac{f}{n}\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{n}\ \text{hanc}$$

$$\frac{2f}{n}.\frac{(\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{n})^2}{\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{2n}}=g\int x^{ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}.$$

Coroll.

Coroll. 4.

16. Ponamus hic $f=1$, $g=2$ et $n=\frac{m}{2}$ vt m ſit numerus integer poſitiuus, et ob $\int dx(l\frac{1}{x})^m = 1.\ 2.\ 3\ \ldots\ m$ erit

$$\frac{4}{m}\cdot\frac{(\int dx(l\frac{1}{x})^{\frac{m}{2}})^2}{1.\ 2.\ 3\ldots m} = 2\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}$$

hincque

$$\int dx(l\tfrac{1}{x})^{\frac{m}{2}} = \sqrt{1.\ 2.\ 3\ldots m.\ \tfrac{m}{2}\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}}$$

et ſumendo $m=1$ ob $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{\pi}{2}$ habebitur

$$\int dx\sqrt{l\tfrac{1}{x}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Scholion.

17. En ergo ſuccinctam demonſtrationem theorematis olim a me prolati, quod ſit $\int dx\sqrt{l\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, eamque ab interpolationis ratione, qua tum vſus fueram, libera. Deducta ſcilicet hic ea ex hoc theoremate quo inueni eſſe:

$$\frac{(\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{n-1})^2}{\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{2n-1}} = g\int x^{ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

Principale autem theorema, vnde hoc eſt deductum ita ſe habet

$$\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}\cdot\int x^{f+ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}} = \int x^{n-1}dx(1-x)^{n-1}$$

vtrumque enim membrum per integrationem ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſam euoluitur in hoc productum numericum:

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots (n-1)}{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(2n-1)}$$

Ac ſi alteri membro ſpeciem latius patentem tribuere velimus, theorema ita proponi poterit vt ſit:

$$g. \frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}. \int x^{f+ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}}$$
$$= k\int x^{nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}$$

hicque ſi capiatur $g = 0$, fit

$$\frac{(\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{n-1})^2}{\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{2n-1}} = k\int x^{nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}.$$

Imprimis igitur notandum eſt, quod illa aequalitas ſubſiſtat, quicunque numeri loco f et g accipiantur caſu quidem $f = g$, ea eſt manifeſta, cum ſit

$$\int x^{g-1}dx(1-x^g)^{n-1} = \frac{1-(1-x^g)^n}{ng} = \frac{1}{ng}$$

fiet enim

$$2g\int x^{ng+g-1}dx(1-x^g)^{n-1} = k\int x^{nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}$$

et quia

$$\int x^{ng+g-1}dx(1-x^g)^{n-1} = \tfrac{1}{2}\int x^{ng-1}dx(1-x^g)^{n-1},$$

aequalitas eſt perſpicua, quia k pro lubitu accipere licet. Eodem autem modo, quo ad hoc theorema perueni, ad alia ſimilia pertingere licet.

Theo-

Theorema. 3.

18. Si ſequentes formulae integrales a valore $x=0$ ad $x=1$ extendantur et n denotet numerum integrum poſitiuum quemcunque, erit

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots n}{(2n+1)(2n+2)\ldots 3n}=\tfrac{2}{3}ng\int x^{f+2ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}\cdot\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{3n-1}}$$

quicunque numeri poſitiui pro f et g accipiantur.

Demonſtratio.

In praecedente Theoremate iam vidimus eſſe:

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots 2n}{(f+g)(f+2g)\ldots(f+2ng)}=\frac{f.\ 2ng}{g^{2n}(f+2ng)}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}$$

ſimili autem modo, ſi in forma principali loco n ſcribamus $3n$ habebimus:

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ 3n}{(f+g)(f+2g)\ldots(f+3ng)}=\frac{f.\ 3ng}{g^{3n}(f+3ng)}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{3n-1}$$

ex quo illa aequatio per hanc diuiſa producit:

$$\frac{(f+(2n+1)g)(f+(2n+2)g)\ldots\ldots(f+3ng)}{(2n+1)(2n+2)\ \ldots\ldots\ldots\ 3n}=\frac{2g^n(f+3ng)}{3(f+2ng)}\cdot\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{3n-1}}.$$

Verum ſi in aequatione principali (§. 4.) loco f ſcribamus $f+2gn$ adipiſcimur hanc aequationem:

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots\ldots\ n}{(f+(2n+1)g)(f+(2n+2)g)\ldots\ldots(f+3ng)} = \frac{(f+2ng).ng}{g^n(f+3ng)}.$$
$$\int x^{f+2ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}.$$

Multiplicetur nunc haec aequatio per praecedentem, et orietur ipſa aequatio, quam demonſtrari oportet:

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n}{(2n+1)(2n+2)\ldots\ldots 3n} = \tfrac{2}{3}ng.\int x^{f+2ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}.$$
$$\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{3n-1}}.$$

Coroll. 1.

18. Eundem valorem ex aequatione principali nanciſcimur ponendo $f = 2n$ et $g = 1$, ita vt ſit:

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots\ n}{(2n+1)(2n+2)\ldots 3n} = \tfrac{2}{3}n\int x^{2n-1}dx(1-x)^{n-1}$$

quae formula integralis loco x ſcribendo x^k transformatur in hanc $\frac{2}{3}nk\int x^{2nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}$, ita vt ſit

$$g\int x^{f+2ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}.\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{3n-1}}$$
$$= k\int x^{2nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}.$$

Coroll. 2.

20. Si hic ſtatuamus $g = 0$, ob $1 - x^g = g\,l\frac{1}{x}$ habebimus hanc aequationem:

$$\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{n-1}.\frac{\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{2n-1}}{\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{3n-1}} = k\int x^{nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}$$

cum

cum igitur ante inueniſſemus

$$\frac{(\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{n-1})^2}{\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{2n-1}} = k\int x^{nk-1}\,dx\,(1-x^k)^{n-1}$$

habebimus has aequationes in ſe multiplicando:

$$\frac{(\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{n-1})^3}{\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{3n-1}} = k^2\int x^{nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}.\int x^{2nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}.$$

Coroll. 3.

21. Sine vlla reſtrictione hic ponere licet $f=1$; tum ergo ſumto $n=\frac{1}{3}$ et $k=3$ erit

$$\frac{(\int dx(l\tfrac{1}{x})^{-\frac{2}{3}})^3}{\int dx(l\tfrac{1}{x})^0} = 9\int dx(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}.\int xdx(1-x^3)^{-3}$$

et ob $\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{-\frac{2}{3}} = 3\int dx(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{3}}$ et $\int dx(l\tfrac{1}{x})^0 = 1$,

$$(\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{3}})^3 = \int dx\,(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}.\int xdx\,(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}$$

tum vero ſumto $n=\frac{2}{3}$ et $k=3$ erit

$$\frac{(\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{-\frac{1}{3}})^3}{\int dx\,(l\tfrac{1}{x})} = 9\int xdx(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}.\int x^3dx(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}$$

ſeu $(\int dx(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{3}})^3 = 4\int xdx(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}\int x^3dx(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}$.

Theorema generale.

22. Si ſequentes formulae integrales a valore $x=0$ vſque ad $x=1$ extendantur et n denotet numerum integrum poſitiuum quemcunque, erit

$$\frac{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots n}{(\lambda n+1)(\lambda n+2)\ldots(\lambda+1)n} = \frac{\lambda}{\lambda+1} ng \int x^{f+\lambda ng-1} dx (1-x^g)^{n-1}. \frac{\int x^{f-1} dx (1-x^g)^{\lambda n-1}}{\int x^{f-1} dx (1-x^g)^{(\lambda+1)n-1}}$$

quicunque numeri poſitiui pro litteris f et g accipiantur.

Demonſtratio.

Cum ſit vti ſupra oſtendimus:

$$\frac{1.\ 2\ \ldots\ldots\ n}{(f+g)(f+2g)\ldots\ldots(f+ng)} = \frac{f.\ ng}{g^n(f+ng)} \int x^{f-1} dx (1-x^g)^{n-1}$$

ſi hic loco n ſcribamus primo λn tum vero $(\lambda+1)n$ nanciſcemur has duas aequationes

$$\frac{1.\ 2\ \ldots\ldots\ \lambda n}{(f+g)(f+2g)\ldots\ldots(f+\lambda ng)} = \frac{f.\ \lambda ng}{g^{\lambda n}(f+\lambda ng)} \int x^{f-1} dx (1-x^g)^{\lambda n-1}$$

$$\frac{1.\ 2\ \ldots\ldots\ (\lambda+1)n}{(f+g)(f+2g)\ldots(f+(\lambda+1)ng)} = \frac{f.\ (\lambda+1)ng}{g^{(\lambda+1)n}(f+(\lambda+1)ng)} \int x^{f-1} dx (1-x^g)^{(\lambda+1)n-1}$$

quarum illa per hanc diuiſa praebet:

$$\frac{(f+\lambda ng+g)(f+\lambda ng+2g)\ldots.(f+\lambda ng+ng)}{(\lambda n+1)(\lambda n+2)\ \ldots\ldots\ldots\ (\lambda n+n)} = g^n \frac{\lambda(f+\lambda ng+ng)}{(\lambda+1)(f+\lambda ng)} \cdot \frac{\int x^{f-1} dx (1-x^g)^{\lambda n-1}}{\int x^{f-1} dx (1-x^g)^{(\lambda+1)n-1}}.$$

At ſi in aequatione prima loco f ſcribamus $f+\lambda ng$ obtinebimus:

$$\frac{1.}{(f+\lambda ng+g)}\frac{2.........}{(f+\lambda ng+2g)\ldots}\frac{n}{(f+\lambda ng+ng)}=\frac{(f+\lambda ng)ng}{g^n(f+\lambda ng+ng)}$$
$$\int x^{f+\lambda ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

quae duae aequationes in ſe ductae producunt ipſam aequalitatem demonſtrandam:

$$\frac{1.}{(\lambda n+1)}\frac{2.....}{(\lambda n+2)\ldots}\frac{n}{(\lambda n+n)}=\frac{\lambda ng}{\lambda+1}\int x^{f+\lambda ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$
$$\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{\lambda n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{(\lambda+1)n-1}}.$$

Coroll. 1.

23. Si in aequatione principali ſtatuamus $f=\lambda n$ et $g=1$ reperiemus etiam:

$$\frac{1.}{(\lambda n+1)}\frac{2........}{(\lambda n+2)\ldots}\frac{n}{(\lambda n+n)}=\frac{\lambda n}{\lambda+1}\int x^{\lambda n-1}dx(1-x)^{n-1}$$

quae forma loco x ſcribendo x^k abit in hanc:

$$\frac{\lambda nk}{\lambda+1}\int x^{\lambda nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}$$

ita vt habeamus hoc theorema latiſſime patens:

$$g\int x^{f+\lambda ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}.\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{\lambda n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{\lambda n+n-1}}$$
$$=k\int x^{\lambda nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}.$$

Coroll. 2.

24. Hoc iam theorema locum habet, etiamſi n non ſit numerus integer, quin etiam cum nume-

rum λ pro lubitu accipere liceat, loco λn ſcribamus m, et perueniemus ad hoc theorema:

$$\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{m-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{m+n-1}} = \frac{k\int x^{mk-1}dx(1-x^k)^{n-1}}{g\int x^{f+mg-1}dx(1-x^g)^{n-1}}.$$

Coroll. 3.

25. Si ponamus $g=0$; ob $1-x^g = g\,l\frac{1}{x}$, hoc theorema iſtam induet formam:

$$\frac{\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{m-1}}{\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{m+n-1}} = \frac{k\int x^{mk-1}dx(1-x^k)^{n-1}}{\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{n-1}}$$

quae commodius ita repraeſentatur:

$$\frac{\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{n-1}.\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{m-1}}{\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{m+n-1}} = k\int x^{mk-1}dx(1-x^k)^{n-1}$$

vbi euidens eſt numeros m et n inter ſe permutari poſſe.

Scholion.

26. Duplicem ergo deteximus fontem, vnde innumerabiles formularum integralium comparationes haurire licet; alter fons §. 24. patefactus complectitur huiusmodi formulas integrales

$$\int x^{p-1}dx(1-x^g)^{q-1},$$

quas iam ante aliquod tempus pertractaui in obſeruationibus circa integralia formularum

$$\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$$

a va-

a valore $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſa, vbi oſtendi primo litteras p et q inter ſe permutari poſſe, vt ſit

$$\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \int x^{q-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}$$

tum vero etiam eſſe

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{p}{m}}} = \frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\,\frac{p\pi}{n}}$$

imprimis autem demonſtraui eſſe:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \cdot \int \frac{x^{p+q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}} = \int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}} \cdot \int \frac{x^{p+r-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

in qua aequatione comparatio in §. 24. inuenta iam continetur; ita vt hinc nihil noui, quod non iam euolui, deduci queat. Alterum igitur fontem §. 25 indicatum hic potiſſimum inueſtigandum ſuſcipio, vbi cum ſine vlla reſtrictione ſumi queat $f = 1$, aequatio noſtra primaria erit:

$$\frac{\int dx(l\frac{1}{x})^{n-1} \cdot \int dx(l\frac{1}{x})^{m-1}}{\int dx(l\frac{1}{x})^{m+n-1}} = k\int x^{mk-1}dx(1-x^k)^{n-1}$$

cuius beneficio valores formulae integralis $\int dx(l\frac{1}{x})^{\lambda}$ quando λ non eſt numerus integer ad quadraturas curuarum algebraicarum reuocare licebit; quandoquidem quoties λ eſt numerus integer, integratio habetur abſoluta, quoniam eſt

$$\int dx(l\frac{1}{x})^{\lambda} = 1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots \lambda.$$

Maximi autem momenti quaeſtio verſatur circa eos

 caſus,

caſus, quibus λ eſt numerus fractus, quos ergo pro ratione denominationis hic ſucceſſiue ſum definiturus.

Problema 2.

27. Denotante i numerum integrum poſitiuum definire valorem formulae integralis $\int dx\,(l\,\frac{1}{x})^{\frac{i}{2}}$ integratione ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſa.

Solutio.

In aequatione noſtra generali faciamus $m = n$ eritque

$$\frac{(\int dx(l\,\frac{1}{x})^{n-1})^2}{\int dx\,(l\,\frac{1}{x})^{n-1}} = k\int x^{nk-1}\,dx\,(1-x^k)^{n-1}$$

Sit iam $n - 1 = \frac{i}{2}$, et ob $2n - 1 = i + 1$ erit

$$\int dx\,(l\,\tfrac{1}{x})^{2n-1} = 1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots (i+1)$$

ſumatur porro $k = 2$ vt ſit $nk - 1 = i + 1$, fietque

$$\frac{(\int dx\,\sqrt{(l\,\frac{1}{x})^i})^2}{1.\ 2.\ 3 \ldots (i+1)} = 2\int x^{i+1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{i}{2}}$$

ideoque

$$\frac{\int dx\,\sqrt{(l\,\frac{1}{x})^i}}{\sqrt{(1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots (i+1))}} = \sqrt{2\int x^{i+1}\,dx\,\sqrt{(1-x^2)^i}}$$

vbi euidens eſt pro i numeros tantum impares ſumi conuenire, quoniam pro paribus euolutio per ſe eſt manifeſta.

Coroll. 1.

28. Omnes autem caſus facile reducuntur ad $i = 1$, vel adeo ad $i = -1$, dummodo enim $i + 1$, non

non ſit numerus negatiuus reductio inuenta locum habet. Pro hoc ergo caſu erit:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{l\frac{1}{x}}} = \sqrt{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \sqrt{\pi} \text{ ob } \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}.$$

Coroll. 2.

29 Hoc autem caſu principali expedito ob $\int dx(l\frac{1}{x})^n = n\int dx(l\frac{1}{x})^{n-1}$ habebimus,

$$\int dx\sqrt{l\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,;\quad \int dx(l\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}} = \frac{1.3}{2.2}\sqrt{\pi}$$

atque in genere

$$\int dx(l\frac{1}{x})^{\frac{2n+1}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\ldots\ldots\frac{(2n+1)}{2}\sqrt{\pi}.$$

Problema 3.

30. Denotante i numerum integrum poſitiuum definire valorem formulae integralis $\int dx(l\frac{1}{x})^{\frac{i}{3}-1}$ integratione ab $x=0$ ad $x=1$ extenſa.

Solutio.

Inchoemus ab aequatione praecedentis problematis:

$$\frac{(\int dx(l\frac{1}{x})^{n-1})^2}{\int dx(l\frac{1}{x})^{2n-1}} = k\int x^{nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}$$

atque in forma generali ſtatuamus $m=2n$, vt habeatur:

$$\frac{\int dx(l\frac{1}{x})^{n-1}.\int dx(l\frac{1}{x})^{2n-1}}{\int dx(l\frac{1}{x})^{3n-1}} = k\int x^{2nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}$$

ac

ac multiplicando has duas aequalitates adipiſcimur:

$$\frac{(\int dx(l\tfrac{1}{x})^{n-1})^3}{\int dx(l\tfrac{1}{x})^{3n-1}}=kk\int x^{nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}.\int x^{2nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}.$$

Hic iam ponatur $n=\frac{i}{3}$ vt ſit

$$\int dx(l\tfrac{1}{x})^{i-1}=1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots.(i-1)$$

ſumaturque $k=3$ ac prodibit

$$\frac{(\int dx\sqrt[3]{(l\tfrac{1}{x})^{i-3}})^3}{1.2.3\ldots(i-1)}=9\int x^{i-1}dx\sqrt[3]{(1-x^3)^{i-3}}.\int x^{2i-1}dx\sqrt[3]{(1-x^3)^{i-3}}$$

vnde concludimus

$$\frac{\int dx\sqrt[3]{(l\tfrac{1}{x})^{i-3}}}{\sqrt[3]{1.\ 2.\ 3\ldots(i-1)}}=\sqrt[3]{9\int\frac{x^{i-1}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-i}}}.\int\frac{x^{2i-1}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-i}}}}.$$

Coroll. 1.

31. Bini hic occurrunt caſus principales, a quibus reliqui omnes pendent, ponendo ſcilicet vel $i=1$ vel $i=2$, qui ſunt:

$$\text{I.}\ \int\frac{dx}{\sqrt[3]{(l\tfrac{1}{x})^2}}=\sqrt[3]{9\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}}$$

$$\text{II.}\ \int\frac{dx}{\sqrt[3]{l\tfrac{1}{x}}}=\sqrt[3]{9\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}.\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}}$$

quae poſterior forma ob $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$

abit

abit in

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{l\frac{1}{x}}} = \sqrt[3]{3} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}.$$

Coroll. 2.

32. Si vti in obſeruationibus meis ante allegatis breuitatis gratia ponamus $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-q}}} = (\frac{p}{q})$, atque vt ibi pro hac claſſe $(\frac{2}{1}) = \frac{\pi}{3 \sin. \frac{\pi}{3}} = \alpha$, tum vero $(\frac{1}{1}) = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = A$, erit

$$\text{I. } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(l\frac{1}{x})^2}} = \sqrt[3]{9 (\tfrac{1}{1})(\tfrac{2}{1})} = \sqrt[3]{9\alpha A}$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(l\frac{1}{x})}} = \sqrt[3]{3 (\tfrac{1}{2})(\tfrac{2}{2})} = \sqrt[3]{\tfrac{3\alpha\alpha}{A}}.$$

Coroll. 3.

33. Pro caſu ergo priori habebimus,

$$\int dx \sqrt[3]{(l\tfrac{1}{x})^{-2}} = \sqrt[3]{9\alpha A}; \int dx \sqrt[3]{l\tfrac{1}{x}} = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{9\alpha A} \text{ et}$$

$$\int dx \sqrt[3]{(l\tfrac{1}{x})^{3n+1}} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{7}{3} \cdots \tfrac{3n+1}{3} \sqrt[3]{9\alpha A}$$

pro altero vero caſu

$$\int dx \sqrt[3]{(l\tfrac{1}{x})^{-1}} = \sqrt[3]{\tfrac{3\alpha\alpha}{A}}; \int dx \sqrt[3]{(l\tfrac{1}{x})^2} = \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{\tfrac{3\alpha\alpha}{A}} \text{ et}$$

$$\int dx \sqrt[3]{(l\tfrac{1}{x})^{3n-1}} = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{8}{3} \cdots \tfrac{3n-1}{3} \sqrt[3]{\tfrac{3\alpha\alpha}{A}}.$$

Problema 4.

34. Denotante i numerum integrum poſitiuum definire valorem formulae integralis $\int dx(l\frac{1}{x})^{\frac{i}{4}-1}$ integratione ab $x=0$ ad $x=1$ extenſa.

Solutio.

In ſolutione problematis praecedentis perducti ſumus ad hanc aequationem

$$\frac{(\int dx(l\frac{1}{x})^{n-1})^3}{\int dx(l\frac{1}{x})^{3n-1}}=kk\int\frac{x^{nk-1}dx}{(1-x^k)^{1-n}}.\int\frac{x^{2nk-1}dx}{(1-x^k)^{1-n}}$$

forma generalis autem ſumendo $m=3n$ praebet

$$\frac{\int dx(l\frac{1}{x})^{n-1}\int dx(l\frac{1}{x})^{3n-1}}{\int dx(l\frac{1}{x})^{4n-1}}=k\int\frac{x^{3nk-1}dx}{(1-x^k)^{1-n}}$$

quibus coniungendis adipiſcimur,

$$\frac{(\int dx(l\frac{1}{x})^{n-1})^4}{\int dx(l\frac{1}{x})^{4n-1}}=k^3\int\frac{x^{nk-1}dx}{(1-x^k)^{1-n}}.\int\frac{x^{2nk-1}dx}{(1-x^k)^{1-n}}.\int\frac{x^{3nk-1}dx}{(1-x^k)^{1-n}}$$

Sit nunc $n=\frac{i}{4}$ et ſumatur $k=4$ fietque

$$\frac{\int dx(l\frac{1}{x})^{\frac{i}{4}-1}}{\sqrt[4]{1.2.3\ldots(i-1)}}=\sqrt[4]{4^3}\int\frac{x^{i-1}dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-i}}}.\int\frac{x^{2i-1}dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-i}}}.\int\frac{x^{3i-1}dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-i}}}.$$

Coroll.

Coroll 1.

35. Si igitur ſit $i = 1$, habebimus

$$\int dx \sqrt[4]{(l\tfrac{1}{x})^{-3}} = \sqrt[4]{4^3} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} \cdot \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}$$

quae expreſſio ſi littera P deſignetur erit in genere

$$\int dx \sqrt[4]{(l\tfrac{1}{x})^{4n-3}} = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{9}{4} \ldots\ldots\ldots \tfrac{4n-3}{4} \cdot P.$$

Coroll 2.

36. Pro altero caſu principali ſumamus $i = 3$ eritque

$$\int dx \sqrt[4]{(l\tfrac{1}{x})^{-1}} = \sqrt[4]{2 \cdot 4^3} \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{x^8\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}$$

ſeu facta reductione ad ſimpliciores formas

$$\int dx \sqrt[4]{(l\tfrac{1}{x})^{-1}} = \sqrt[4]{8} \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}$$

quae expreſio ſi littera Q deſignetur erit generatim

$$\int dx \sqrt[4]{(l\tfrac{1}{x})^{4n-1}} = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{7}{4} \cdot \tfrac{11}{4} \ldots\ldots\ldots \tfrac{4n-1}{4} \cdot Q.$$

Scholion.

37. Si formulam integralem $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-q}}}$ hoc ſigno $(\frac{p}{q})$ indicemus, ſolutio problematis ita ſe habebit

$$\int dx \sqrt[4]{(l\tfrac{1}{x})^{i-4}} = \sqrt[4]{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (i-1) \cdot 4^3 (\tfrac{i}{i})(\tfrac{2i}{i})(\tfrac{3i}{i})}$$

et pro binis caſibus euolutis fit:

$$P = \sqrt[4]{4^3 \left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right)} \text{ et } Q = \sqrt[4]{8 \left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)}.$$

Statuamus nunc pro iis formulis quae a circulo pendent:

$$\left(\tfrac{3}{1}\right) = \frac{\pi}{4 \,\text{ſin.}\, \frac{\pi}{4}} = \alpha \text{ et } \left(\tfrac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4 \,\text{ſin.}\, \frac{2\pi}{4}} = \beta$$

pro tranſcendentibus autem altioris ordinis

$$\left(\tfrac{2}{1}\right) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt[2]{(1 - x^4)}} = A.$$

quippe a qua omnes reliquae pendent ac reperimus,

$$P = \sqrt[4]{4^3 \tfrac{\alpha\alpha}{\beta}.\, AA} \text{ et } Q = \sqrt[4]{4.\, \alpha\alpha\beta.\, \tfrac{1}{AA}}$$

vnde patet eſſe $PQ = 4\alpha = \frac{\pi}{\text{ſin.}\, \frac{\pi}{4}}$. Cum autem ſit $\alpha = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$ erit $P = \sqrt[4]{32\,\pi AA}$ et $Q = \sqrt[4]{\frac{\pi^3}{8AA}}$ et $\frac{P}{Q} = \frac{4A}{\sqrt{\pi}}$.

Problema 5.

38. Denotante i numerum integrum poſitiuum definire valorem formulae integralis $\int dx \sqrt[5]{(l\frac{1}{x})^{i-5}}$ integratione ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſa.

Solutio.

Ex praecedentibus ſolutionibus iam ſatis eſt perſpicuum pro hoc caſu tandem peruentum iri ad hanc formam

$\int dx$

$$\frac{\int dx \sqrt[5]{(l\frac{1}{x})^{i-5}}}{\sqrt[5]{1.\,2.\,3.\ldots(i-1)}} = \sqrt[5]{5^4} \int \frac{x^{i-1}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-i}}} \cdot \int \frac{x^{2i-1}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-i}}} \cdot \int \frac{x^{3i-1}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-i}}} \cdot \int \frac{x^{4i-1}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-i}}}$$

quae formulae integrales ad claſſem quintam diſſertationis meae ſupra allegatae ſunt referendae. Quare ſi modo ibi recepto ſignum $(\frac{p}{q})$ denotet hanc formulam $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-q}}}$, valorem quaeſitum ita commodius exprimere licebit, vt ſit:

$$\int dx \sqrt[5]{(l\tfrac{1}{x})^{i-5}} = \sqrt[5]{1.\,2.\,3.\ldots(i-1)\,5^4 (\tfrac{i}{i})(\tfrac{2i}{i})(\tfrac{3i}{i})(\tfrac{4i}{i})}$$

vbi quidem ſufficit ipſi i valores quinario minores tribuiſſe: quando autem numeratores quinarium ſuperant tenendum eſt eſſe:

$$(\tfrac{5+m}{i}) = \frac{m}{m+i}(\tfrac{m}{i}) \text{ tum vero porro}$$

$$(\tfrac{10+m}{i}) = \frac{m}{m+i} \cdot \frac{m+5}{m+i+5}(\tfrac{m}{i})$$

$$(\tfrac{15+m}{i}) = \frac{m}{m+i} \cdot \frac{m+5}{m+i+5} \cdot \frac{m+10}{m+i+10} \cdot (\tfrac{m}{i})$$

Deinde vero pro hac claſſe binae formulae quadraturam circuli inuoluunt quae ſint.

$$(\tfrac{4}{1}) = \frac{\pi}{5\,\text{ſin.}\,\frac{\pi}{5}} = \alpha \text{ et } (\tfrac{3}{2}) = \frac{\pi}{5\,\text{ſin.}\,\frac{2\pi}{5}} = \beta$$

duae autem quadraturas altiores continent quae ponantur:

$$\left(\tfrac{3}{1}\right) = \int \frac{x\,x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = \text{A et}$$

$$\left(\tfrac{2}{2}\right) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = \text{B}$$

atque ex his valores omnium reliquarum formularum huius claſſis aſſignaui ſcilicet:

$$\left(\tfrac{5}{1}\right) = 1;\ \left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{1}{2};\ \left(\tfrac{5}{3}\right) = \tfrac{1}{3};\ \left(\tfrac{5}{4}\right) = \tfrac{1}{4};\ \left(\tfrac{5}{5}\right) = \tfrac{1}{5}$$

$$\left(\tfrac{4}{1}\right) = \alpha;\ \left(\tfrac{4}{2}\right) = \tfrac{\beta}{A};\ \left(\tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{\beta}{2\,B};\ \left(\tfrac{4}{4}\right) = \tfrac{\alpha}{3\,A}$$

$$\left(\tfrac{3}{1}\right) = A;\ \left(\tfrac{3}{2}\right) = \beta;\ \left(\tfrac{3}{3}\right) = \tfrac{\beta\beta}{\alpha B}$$

$$\left(\tfrac{2}{1}\right) = \tfrac{\alpha B}{\beta};\ \left(\tfrac{2}{2}\right) = B;$$

$$\left(\tfrac{1}{1}\right) = \tfrac{\alpha A}{\beta}.$$

Coroll. 1.

39. Sumto exponente $i = 1$ erit:

$$\int dx \sqrt[5]{\left(l\tfrac{1}{x}\right)^{-4}} = \sqrt[5]{5^4 \left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right)} = \sqrt[5]{5^4 \cdot \tfrac{\alpha^3}{\beta^2} A^2 B}$$

vnde in genere concludimus fore denotante n numerum integrum quemcunque

$$\int dx \sqrt[5]{\left(l\tfrac{1}{x}\right)^{5n-4}} = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{6}{5} \cdot \tfrac{11}{5} \ldots \tfrac{5n-4}{5} \cdot \sqrt[5]{5^4 \cdot \tfrac{\alpha^3}{\beta^2} A^2 B}.$$

Coroll. 2.

40. Sit nunc $i = 2$ et cum prodeat:

$$\int dx \sqrt[5]{\left(l\tfrac{1}{x}\right)^{-2}} = \sqrt[5]{1 \cdot 5^4 \left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{6}{2}\right)\left(\tfrac{8}{2}\right)}$$

ob $\left(\tfrac{6}{2}\right) = \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{2}{1}\right)$ et $\left(\tfrac{8}{2}\right) = \tfrac{3}{5}\left(\tfrac{3}{2}\right)$

erit

erit hacc expreſſio

$$\sqrt[5]{5^3\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right)} = \sqrt[5]{5^3.\,\alpha\beta.\,\tfrac{BB}{A}} \text{ et in genere}$$

$$\int dx\,\sqrt[5]{(l\tfrac{1}{x})}^{\,5n-3} = \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{7}{5}\cdot\tfrac{12}{5}\ldots\tfrac{5n-3}{5}\sqrt[5]{5^3.\,\alpha\beta.\,\tfrac{BB}{A}}.$$

Coroll 3.

51. Sit $i = 3$ et forma inuenta:

$$\int dx\,\sqrt[5]{(l\tfrac{1}{x})}^{\,-2} = \sqrt[5]{2.\,5^4\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{9}{3}\right)\left(\tfrac{12}{3}\right)} \text{ ob}$$

$$\left(\tfrac{6}{3}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{1}\right);\ \left(\tfrac{9}{3}\right) = \tfrac{4}{7}\left(\tfrac{4}{3}\right);\ \left(\tfrac{12}{3}\right) = \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{7}{15}\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

abit in $\sqrt[5]{2.\,5^2\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right)} = \sqrt[5]{5^2.\,\tfrac{\beta^4}{\alpha}.\,\tfrac{A}{BB}}$

vnde in genere colligitur:

$$\int dx\,\sqrt[5]{(l\tfrac{1}{x})}^{\,5n-2} = \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{8}{5}\cdot\tfrac{13}{5}\ldots\tfrac{5n-2}{5}\sqrt[5]{5^3.\,\tfrac{\beta^4}{\alpha}.\,\tfrac{A}{BB}}.$$

Coroll. 4.

42. Poſito denique $i = 4$ forma noſtra:

$$\int dx\,\sqrt[5]{(l\tfrac{1}{x})}^{\,-1} = \sqrt[5]{6.\,5^4\left(\tfrac{4}{4}\right)\left(\tfrac{8}{4}\right)\left(\tfrac{12}{4}\right)\left(\tfrac{16}{4}\right)} \text{ ob}$$

$$\left(\tfrac{8}{4}\right) = \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{4}{3}\right);\ \left(\tfrac{12}{4}\right) = \tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{7}{11}\left(\tfrac{4}{2}\right);\ \left(\tfrac{16}{4}\right) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{6}{13}\cdot\tfrac{11}{15}\left(\tfrac{4}{1}\right)$$

transformabitur in hanc:

$$\sqrt[5]{6.\,5\left(\tfrac{4}{4}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right)} = \sqrt[5]{5.\,\tfrac{\alpha\alpha\beta\beta}{AAB}}$$

ita vt ſit in genere

$$\int dx\,\sqrt[5]{(l\tfrac{1}{x})}^{\,5n-1} = \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{9}{5}\cdot\tfrac{24}{5}\ldots\tfrac{5n-1}{5}\sqrt[5]{5.\,\alpha\alpha\beta\beta.\,\tfrac{1}{AAB}}.$$

Scho-

Scholion.

43. Si valorem formulae integralis $\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\lambda}$ hoc ſigno $[\lambda]$ repraeſentemus, caſus hactenus euoluti praebent:

$$[-\tfrac{4}{5}] = \sqrt[5]{5^4 \cdot \tfrac{\alpha^3}{\beta^2} \cdot A^3 B}\,; \quad [+\tfrac{1}{5}] = \tfrac{1}{5}\sqrt[5]{5^4 \cdot \tfrac{\alpha^3}{\beta^2} \cdot A^3 B}$$

$$[-\tfrac{3}{5}] = \sqrt[5]{5^3 \cdot \alpha\beta \cdot \tfrac{BB}{A}}\,; \quad [+\tfrac{2}{5}] = \tfrac{2}{5}\sqrt[5]{5^3 \cdot \alpha\beta \cdot \tfrac{BB}{A}}$$

$$[-\tfrac{2}{5}] = \sqrt[5]{5^2 \cdot \tfrac{\beta^4}{\alpha} \cdot \tfrac{A}{BB}}\,; \quad [+\tfrac{3}{5}] = \tfrac{3}{5}\sqrt[5]{5^2 \cdot \tfrac{\beta^4}{\alpha} \cdot \tfrac{A}{BB}}$$

$$[-\tfrac{1}{5}] = \sqrt[5]{5 \cdot \alpha^2\beta^2 \cdot \tfrac{1}{AAB}}\,; \quad [+\tfrac{4}{5}] = \tfrac{4}{5}\sqrt[5]{5 \cdot \alpha^2\beta^2 \cdot \tfrac{1}{AAB}}$$

vnde binis, quarum indices ſimul ſumti fiunt $= 0$ coniungendis colligimus.

$$[+\tfrac{1}{5}] \cdot [-\tfrac{1}{5}] = \alpha = \frac{\pi}{5\,\text{ſin.}\,\frac{\pi}{5}}$$

$$[+\tfrac{2}{5}] \cdot [-\tfrac{2}{5}] = 2\beta = \frac{2\pi}{5\,\text{ſin.}\,\frac{2\pi}{5}}$$

$$[+\tfrac{3}{5}] \cdot [-\tfrac{3}{5}] = 3\beta = \frac{3\pi}{5\,\text{ſin.}\,\frac{3\pi}{5}}$$

$$[+\tfrac{4}{5}] \cdot [-\tfrac{4}{5}] = 4\alpha = \frac{4\pi}{5\,\text{ſin.}\,\frac{4\pi}{5}}$$

Ex antecedente autem problemate ſimili modo deducimus:

$$[-\tfrac{3}{4}] = P = \sqrt[4]{4^3 \cdot \tfrac{\alpha\alpha}{\beta} \cdot AA}\,; \quad [+\tfrac{1}{4}] = \tfrac{1}{4}\sqrt[4]{4^3 \cdot \tfrac{\alpha\alpha}{\beta} \cdot AA}$$

$$[-\tfrac{1}{4}] = Q = \sqrt[4]{4 \cdot \alpha\alpha\beta \cdot \tfrac{1}{AA}}\,; \quad [+\tfrac{3}{4}] = \tfrac{3}{4}\sqrt[4]{4 \cdot \alpha\alpha\beta \cdot \tfrac{1}{AA}}$$

hinc-

hincque

$$[+\tfrac{1}{4}].\ [-\tfrac{1}{4}] = \alpha = \frac{\pi}{4\ \text{ſin.}\ \frac{\pi}{4}}$$

$$[+\tfrac{3}{4}].\ [-\tfrac{3}{4}] = 3\alpha = \frac{3\ \pi}{4\ \text{ſin.}\ \frac{3\pi}{4}}$$

vnde in genere hoc Theorema adipiſcimur quod ſit

$$[\lambda].\ [-\lambda] = \frac{\lambda\pi}{\text{ſin.}\ \lambda\pi}$$

cuius ratio ex methodo interpolandi olim expoſita ita reddi poteſt:

$$\text{cum ſit } [\lambda] = \frac{1^{1-\lambda}.\ 2^{\lambda}}{1+\lambda}.\ \frac{2^{1-\lambda}.\ 3^{\lambda}}{2+\lambda}.\ \frac{3^{1-\lambda}.\ 4^{\lambda}}{3+\lambda}\ \text{etc.}$$

$$\text{erit } [-\lambda] = \frac{1^{1+\lambda}.\ 2^{-\lambda}}{1-\lambda}.\ \frac{2^{1+\lambda}.\ 3^{-\lambda}}{2-\lambda}.\ \frac{3^{1+\lambda}.\ 4^{-\lambda}}{3-\lambda}\ \text{etc.}$$

hincque

$$[\lambda].\ [-\lambda] = \frac{1.\ 1}{1-\lambda\lambda}.\ \frac{2.\ 2}{4-\lambda\lambda}.\ \frac{3.\ 3}{9-\lambda\lambda}\ \text{etc.} = \frac{\lambda\pi}{\text{ſin.}\ \lambda\pi}$$

vti alibi demonſtraui.

Problema 6 generale.

44. Si litterae i et n denotent numeros integros poſitiuos definire valorem formulae integralis $\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{i-n}{n}}$ ſeu $\int dx \sqrt[n]{(l\tfrac{1}{x})^{i-n}}$, integratione ab $x=0$ ad $x=1$ extenſa.

Solutio.

Methodus hactenus vſitata quaeſitum valorem ſequenti modo per quadraturas curuarum algebraicarum expreſſum exhibebit:

$$\frac{\int dx \sqrt[n]{(l\frac{1}{x})^{i-n}}}{\sqrt[n]{1.2.3.(i-1)}} = \sqrt[n]{n^{n-1}} \int \frac{x^{i-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-i}}} . \int \frac{x^{2i-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-i}}} \ldots . \int \frac{x^{(n-1)i-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-i}}} .$$

Quod ſi iam breuitatis gratia formulam integralem $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ hoc charactere $(\frac{p}{q})$, formulam vero $\int dx \sqrt[n]{(l\frac{1}{x})^m}$ iſthoc $[\frac{m}{n}]$ deſignemus, ita vt $[\frac{m}{n}]$ valorem huius producti indefiniti $1.\ 2.\ 3 \ldots . z$ denotet exiſtente $z = \frac{m}{n}$, ſuccinctius valor quaeſitus hoc modo expreſſus prodibit:

$$[\tfrac{i-n}{n}] = \sqrt[n]{1.2.3 \ldots (i-1)\, n^{n-1}} . (\tfrac{i}{i})(\tfrac{2i}{i})(\tfrac{3i}{i}) \ldots . (\tfrac{ni-i}{i})$$

vnde etiam colligitur

$$[\tfrac{i}{n}] = \tfrac{i}{n} \sqrt[n]{1.\ 2.\ 3 \ldots (i-1)\, n^{n-1}} . (\tfrac{i}{i})(\tfrac{2i}{i})(\tfrac{3i}{i}) \ldots (\tfrac{ni-i}{i}).$$

Hic ſemper numerum i ipſo n minorem accepiſſe ſufficiet quoniam pro maioribus notum eſt eſſe:

$$[\tfrac{i+n}{n}] = \tfrac{i+n}{n} [\tfrac{i}{n}]; \text{ item } [\tfrac{i+2n}{n}] = \tfrac{i+n}{n} . \tfrac{i+2n}{n} [\tfrac{i}{n}] \text{ etc.}$$

hocque modo tota inueſtigatio ad eos tantum caſus reducitur, quibus fractionis $\frac{i}{n}$ numerator i denominatore n eſt minor. Praeterea vero de formulis integra-

tegralibus $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = (\frac{p}{q})$, ſequentia notaſſe iuvabit:

I. Litteras p et q inter ſe eſſe permutabiles vt ſit $(\frac{p}{q}) = (\frac{q}{p})$.

II. Si alteruter numerorum p vel q ipſi exponenti n aequetur, valorem formulae integralis fore algebraicum ſcilicet:

$$(\frac{n}{p}) = (\frac{p}{n}) = \frac{1}{p}. \text{ ſeu } (\frac{n}{q}) = (\frac{q}{n}) = \frac{1}{q}.$$

III. Si ſumma numerorum $p+q$ ipſi exponenti n aequatur, formulae integralis $(\frac{p}{q})$ valorem per circulum exhiberi poſſe, cum ſit:

$$(\frac{p}{n-p}) = (\frac{n-p}{p}) = \frac{\pi}{n \sin. \frac{p\pi}{n}} \text{ et } (\frac{q}{n-q}) = (\frac{n-q}{q}) = \frac{\pi}{n \sin. \frac{q\pi}{n}}.$$

IV. Si alteruter numerorum p vel q maior ſit exponente n, formulam integralem $(\frac{p}{q})$ ad aliam revocari poſſe, cuius termini ſint ipſo n minores, quod fit ope huius reductionis

$$(\frac{p+n}{q}) = \frac{p}{p+q}(\frac{p}{q}).$$

V. Inter plures huiusmodi formulas integrales talem relationem intercedere vt ſit:

$$(\frac{p}{q})(\frac{p+q}{r}) = (\frac{p}{r})(\frac{p+r}{q}) = (\frac{q}{r})(\frac{q+r}{p})$$

cuius ope omnes reductiones reperiuntur quas in obſeruationibus circa has formulas expoſui.

Coroll. 1.

45. Si hoc modo ope reductionis n°. IV. indicatae formam inuentam ad ſingulos caſus accommodemus, eos ſequenti ratione ſimpliciſſime exhibere poterimus. Ac primo quidem pro caſu $n = 2$, quo nulla opus eſt reductione habebimus:

$$\left[\tfrac{1}{2}\right] = \tfrac{1}{2}\sqrt[2]{2\left(\tfrac{1}{1}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{\pi}{\text{ſin.}\,\frac{\pi}{2}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Coroll. 2.

46. Pro caſu $n = 3$ habebimus has reductiones:

$$\left[\tfrac{1}{3}\right] = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{3^2.\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)}$$

$$\left[\tfrac{2}{3}\right] = \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{3.\ 1.\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)}.$$

Coroll. 3.

47. Pro caſu $n = 4$ hae tres reductiones obtinentur:

$$\left[\tfrac{1}{4}\right] = \tfrac{1}{4}\sqrt[4]{4^3\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right)}$$

$$\left[\tfrac{2}{4}\right] = \tfrac{2}{4}\sqrt[4]{4^2.\ 2.\left(\tfrac{2}{2}\right)^2\left(\tfrac{4}{2}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt[2]{4\left(\tfrac{2}{2}\right)} \text{ ob } \left(\tfrac{4}{2}\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$\left[\tfrac{3}{4}\right] = \tfrac{3}{4}\sqrt[4]{4.\ 1.\ 2\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)}$$

cum in media ſit $\left(\tfrac{2}{2}\right) = \left(\frac{2}{4-2}\right) = \frac{\pi}{4}$ erit vtique vt ante

$$\left[\tfrac{2}{4}\right] = \left[\tfrac{1}{2}\right] = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Coroll.

Coroll. 4.

48. Sit nunc $n = 5$, et prodeunt hae quatuor reductiones:

$$\left[\tfrac{1}{5}\right] = \tfrac{1}{5}\sqrt[5]{5^4\,.\,(\tfrac{1}{1})(\tfrac{2}{1})(\tfrac{3}{1})(\tfrac{4}{1})}$$

$$\left[\tfrac{2}{5}\right] = \tfrac{2}{5}\sqrt[5]{5^3\,.\,1\,(\tfrac{2}{2})(\tfrac{4}{2})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{3}{2})}$$

$$\left[\tfrac{3}{5}\right] = \tfrac{3}{5}\sqrt[5]{5^2\,.\,1\,.\,2\,(\tfrac{3}{3})(\tfrac{1}{3})(\tfrac{4}{3})(\tfrac{2}{3})}$$

$$\left[\tfrac{4}{5}\right] = \tfrac{4}{5}\sqrt[5]{5\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,(\tfrac{4}{4})(\tfrac{3}{4})(\tfrac{2}{4})(\tfrac{1}{4})}.$$

Coroll. 5.

49. Sit $n = 6$, et habebimus has reductiones:

$$\left[\tfrac{1}{6}\right] = \tfrac{1}{6}\sqrt[6]{6^5\,.\,(\tfrac{1}{1})(\tfrac{2}{1})(\tfrac{3}{1})(\tfrac{4}{1})(\tfrac{5}{1})}$$

$$\left[\tfrac{2}{6}\right] = \tfrac{2}{6}\sqrt[6]{6^4\,.\,2\,(\tfrac{2}{2})^2(\tfrac{4}{2})^2(\tfrac{6}{2})} = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{6^2\,(\tfrac{2}{2})(\tfrac{4}{2})}$$

$$\left[\tfrac{3}{6}\right] = \tfrac{3}{6}\sqrt[6]{6^3\,.\,3\,.\,3\,(\tfrac{3}{3})^3(\tfrac{6}{3})^3} = \tfrac{1}{2}\sqrt[2]{6\,(\tfrac{3}{3})}$$

$$\left[\tfrac{4}{6}\right] = \tfrac{4}{6}\sqrt[6]{6^2\,.\,2\,.\,4\,.\,2\,(\tfrac{4}{4})^2(\tfrac{2}{4})^2(\tfrac{6}{4})} = \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{6\,.\,2\,(\tfrac{4}{4})(\tfrac{2}{4})}$$

$$\left[\tfrac{5}{6}\right] = \tfrac{5}{6}\sqrt[6]{6\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,(\tfrac{5}{5})(\tfrac{4}{5})(\tfrac{3}{5})(\tfrac{2}{5})(\tfrac{1}{5})}.$$

Coroll. 6.

50. Poſito $n = 7$ ſequentes ſex prodeunt aequationes:

$$\left[\tfrac{1}{7}\right] = \tfrac{1}{7}\sqrt[7]{7^6\,(\tfrac{1}{1})(\tfrac{2}{1})(\tfrac{3}{1})(\tfrac{4}{1})(\tfrac{5}{1})(\tfrac{6}{1})}$$

$$\left[\tfrac{2}{7}\right] = \tfrac{2}{7}\sqrt[7]{7^5\,.\,1\,(\tfrac{2}{2})(\tfrac{4}{2})(\tfrac{6}{2})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{3}{2})(\tfrac{5}{2})}.$$

$$\left[\tfrac{3}{7}\right] = \tfrac{3}{7}\sqrt[7]{7^4.1.2\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)}$$

$$\left[\tfrac{4}{7}\right] = \tfrac{4}{7}\sqrt[7]{7^3.1.2.3\left(\tfrac{4}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{5}{4}\right)\left(\tfrac{2}{4}\right)\left(\tfrac{6}{4}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)}$$

$$\left[\tfrac{5}{7}\right] = \tfrac{5}{7}\sqrt[7]{7^2.1.2.3.4\left(\tfrac{5}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right)\left(\tfrac{1}{5}\right)\left(\tfrac{6}{5}\right)\left(\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{2}{5}\right)}$$

$$\left[\tfrac{6}{7}\right] = \tfrac{6}{7}\sqrt[7]{7.1.2.3.4.5\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)\left(\tfrac{4}{6}\right)\left(\tfrac{3}{6}\right)\left(\tfrac{2}{6}\right)\left(\tfrac{1}{6}\right)}.$$

Coroll. 7.

51. Sit $n = 8$, et ſeptem hae reductiones impetrabuntur.

$$\left[\tfrac{1}{8}\right] = \tfrac{1}{8}\sqrt[8]{8^7\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{1}\right)}$$

$$\left[\tfrac{2}{8}\right] = \tfrac{2}{8}\sqrt[8]{8^6.2\left(\tfrac{2}{2}\right)^2\left(\tfrac{4}{2}\right)^2\left(\tfrac{6}{2}\right)^2\left(\tfrac{8}{2}\right)} = \tfrac{1}{4}\sqrt[4]{8^3\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{6}{2}\right)}$$

$$\left[\tfrac{3}{8}\right] = \tfrac{3}{8}\sqrt[8]{8^5.1.2\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)}$$

$$\left[\tfrac{4}{8}\right] = \tfrac{4}{8}\sqrt[8]{8^4.4.4.4\left(\tfrac{4}{4}\right)^4\left(\tfrac{8}{4}\right)^3} = \tfrac{1}{2}\sqrt[2]{8\left(\tfrac{4}{4}\right)}$$

$$\left[\tfrac{5}{8}\right] = \tfrac{5}{8}\sqrt[8]{8^3.1.2.3.4\left(\tfrac{5}{5}\right)\left(\tfrac{2}{5}\right)\left(\tfrac{7}{5}\right)\left(\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{1}{5}\right)\left(\tfrac{6}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right)}$$

$$\left[\tfrac{6}{8}\right] = \tfrac{6}{8}\sqrt[8]{8^2.4.2.6.4.2\left(\tfrac{6}{6}\right)^2\left(\tfrac{4}{6}\right)^2\left(\tfrac{2}{6}\right)^2\left(\tfrac{8}{6}\right)} = \tfrac{3}{4}\sqrt[4]{8.2.4\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{4}{6}\right)\left(\tfrac{2}{6}\right)}$$

$$\left[\tfrac{7}{8}\right] = \tfrac{7}{8}\sqrt[8]{8.1.2.3.4.5.6\left(\tfrac{7}{7}\right)\left(\tfrac{6}{7}\right)\left(\tfrac{5}{7}\right)\left(\tfrac{4}{7}\right)\left(\tfrac{3}{7}\right)\left(\tfrac{2}{7}\right)\left(\tfrac{1}{7}\right)}.$$

Scholion.

52. Superfluum foret hos caſus vlterius euolvere cum ex allatis ordo iſtarum formularum ſatis perſpiciatur. Si enim in formula propoſita $\left[\frac{m}{n}\right]$ numeri m et n ſint inter ſe primi lex eſt manifeſta, cum fiat

$$\left[\tfrac{m}{n}\right] = \tfrac{m}{n}\sqrt[n]{n^{n-m}.1.2\ldots(m-1).\left(\tfrac{1}{m}\right)\left(\tfrac{2}{m}\right)\left(\tfrac{3}{m}\right)\ldots\left(\tfrac{n-1}{m}\right)}$$

ſin

ſin autem hi numeri m et n communem habeant diuiſorem expediet quidem fractionem $\frac{m}{n}$ ad minimam formam reduci et ex caſibus praecedentibus quaeſitum valorem peti, interim tamen etiam operatio hoc modo inſtitui poterit. Cum expreſſio quaeſita certe hanc habeat formam

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n} \sqrt[n]{n^{n-m}}\, P.\, Q$$

vbi Q eſt productum ex $n-1$ formulis integralibus P vero productum ex aliquot numeris abſolutis, primum pro illo producto Q inueniendo, continuetur haec formularum ſeries $\left(\frac{m}{m}\right)\left(\frac{2m}{m}\right)\left(\frac{3m}{m}\right)$ donec numerator ſuperet exponentem n, eiusque loco exceſſus ſupra n ſcribatur, qui ſi ponatur $= \alpha$, vt iam formula noſtra ſit $\left(\frac{\alpha}{m}\right)$, hic ipſe numerator α dabit factorem producti P tum hinc formularum ſeries porro ſtatuatur $\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{\alpha+m}{m}\right)\left(\frac{\alpha+2m}{m}\right)$ etc. donec iterum ad numeratorem exponente n maiorem perueniatur, formulaque prodeat $\left(\frac{n+\beta}{m}\right)$ cuius loco ſcribi oportet $\left(\frac{\beta}{m}\right)$, ſimulque hinc factor β in productum P inferatur, ſicque progredi conueniet, donec pro Q prodierint $n-1$ formulae. Quae operationes quo facilius intelligantur, caſum formulae $\left[\frac{9}{12}\right] = \frac{9}{12}\sqrt[12]{12^3}\, P.\, Q$ hoc modo euoluamus, vbi inueſtigatio litterarum Q et P ita inſtituetur.

Pro Q. . . . $\left(\frac{9}{9}\right)\left(\frac{6}{9}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{12}{9}\right)\left(\frac{9}{9}\right)\left(\frac{6}{9}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{12}{9}\right)\left(\frac{9}{9}\right)\left(\frac{6}{9}\right)\left(\frac{3}{9}\right)$

Pro P 6. 3   9. 6. 3   9. 6. 3

ſicque

ſicque reperitur:

$$Q = (\tfrac{9}{9})^3 (\tfrac{6}{9})^3 (\tfrac{3}{9})^3 (\tfrac{12}{9})^2 \quad \text{et}$$

$$P = 6^3 .\ 3^3 .\ 9^2 .$$

Cum igitur ſit $(\frac{12}{9}) = \frac{1}{9}$ ſit $PQ = 6^3 . 3^3 (\frac{9}{9})\ (\frac{6}{9})^3 (\frac{3}{9})^3$ ideoque

$$[\tfrac{9}{12}] = \tfrac{3}{4} \sqrt[4]{12 .\ 6 .\ 3 . (\tfrac{9}{9})(\tfrac{6}{9})(\tfrac{3}{9})}.$$

Theorema.

53. Quicunque numeri integri poſitiui litteris m et n indicentur, erit ſemper ſignandi modo ante expoſito:

$$[\tfrac{m}{n}] = \tfrac{m}{n} \sqrt[n]{n^{n-m} . 1 . 2 . 3 \ldots (m-1)(\tfrac{1}{m})(\tfrac{2}{m})(\tfrac{3}{m}) \ldots (\tfrac{n-1}{m})}.$$

Demonſtratio.

Pro caſu, quo m et n ſunt numeri inter ſe primi, veritas theorematis in antecedentibus eſt euicta, quod autem etiam locum habeat, ſi illi numeri m et n commune diuiſore gaudeant, inde quidem non liquet: verum ex hoc ipſo, quod pro caſibus, quibus m et n ſunt numeri primi, veritas conſtat, tuto concludere licet, theorema in genere eſſe verum. Minime quidem diffiteor hoc concludendi genus prorſus eſſe ſingulare, ac plerisque ſuſpectum videri debere. Quare quo nullum dubium relinquatur quoniam pro caſibus, quibus numeri m et n inter ſe ſunt compoſiti, geminam expreſſionem ſumus nacti, vtriusque conſenſum pro caſibus ante euolutis oſtendiſſe iuuabit. Inſigne autem iam ſuppeditat

peditat firmamentum caſus $m = n$, quo forma noſtra manifeſto vnitatem producit.

Coroll. 1.

54. Primus caſus conſenſus demonſtrationem poſtulans eſt quo $m = 2$ et $n = 4$, pro quo ſupra §. 47. inuenimus

$[\frac{2}{4}] = \frac{2}{4}\sqrt[4]{4^2.(\frac{2}{2})^2}$ nunc autem vi theorematis eſt

$[\frac{2}{4}] = \frac{2}{4}\sqrt[4]{4^2.\, 1(\frac{1}{2})(\frac{2}{2})(\frac{3}{2})}$

vnde comparatione inſtituta fit $(\frac{2}{2}) = (\frac{1}{2})(\frac{3}{2})$ cuius veritas in Obſeruationibus ſupra allegatis eſt confirmata.

Coroll. 2.

55. Si $m = 2$ et $n = 6$, ex ſuperioribus (49) eſt

$[\frac{2}{6}] = \frac{2}{6}\sqrt[6]{6^4.(\frac{2}{2})^2(\frac{4}{2})^2}$ nunc vero per theorema

$[\frac{2}{6}] = \frac{2}{6}\sqrt[6]{6^4.\, 1(\frac{1}{2})(\frac{2}{2})(\frac{3}{2})(\frac{4}{2})(\frac{5}{2})}$

ideoque neceſſe eſt ſit

$(\frac{2}{2})(\frac{4}{2}) = (\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})$

cuius veritas indidem patet.

Coroll. 3.

56. Si $m = 3$ et $n = 6$, peruenitur ad hanc aequationem:

$(\frac{3}{3})^2 = 1.\, 2(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})(\frac{4}{3})(\frac{5}{3})$

at ſi $m = 4$ et $n = 6$ fit ſimili modo:

$$2^2 \left(\tfrac{4}{4}\right)\left(\tfrac{2}{4}\right) = 1.\ 2.\ 3 \left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{5}{4}\right)$$

ſeu $\left(\tfrac{4}{4}\right)\left(\tfrac{2}{4}\right) = \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{5}{4}\right)$

quod etiam verum deprehenditur.

Coroll. 4.

57. Caſus $m = 2$ et $n = 8$ praebet hanc aequalitatem:

$$\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{6}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{5}{2}\right)\left(\tfrac{7}{2}\right)$$

at caſus $m = 4$ et $n = 8$ hanc:

$$\left(\tfrac{4}{4}\right)^3 = 1.\ 2.\ 3 \left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{2}{4}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{5}{4}\right)\left(\tfrac{6}{4}\right)\left(\tfrac{7}{4}\right)$$

caſus denique $m = 6$ et $n = 8$ iſtam

$$2.\ 4 \left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{4}{6}\right)\left(\tfrac{2}{6}\right) = 1.\ 3.\ 5 \left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{3}{6}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)\left(\tfrac{7}{6}\right)$$

quae etiam veritati ſunt conſentaneae.

Scholion.

58. In genere autem ſi numeri m et n communem habeant factorem 2, et formula propoſita ſit $\left[\frac{2m}{2n}\right] = \left[\frac{m}{n}\right]$ quia eſt;

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n}\sqrt[n]{n^{n-m}}.\ 1.\ 2.\ 3 \ldots (m-1)\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{m}\right)$$

erit eadem ad exponentem $2n$ reducta:

$$\frac{m}{n}\sqrt[2n]{2n^{2n-2m}.\ 2^2.\ 4^2.\ 6^2 \ldots (2m-2)^2 \left(\frac{2}{2m}\right)^2\left(\frac{4}{2m}\right)^2\left(\frac{6}{2m}\right)^2 \ldots \left(\frac{2n-2}{m}\right)^2}$$

Per theorema vero eadem expreſſio fit

$$\frac{m}{n}\sqrt[2n]{2n^{2n-2m}.\ 1.\ 2.\ 3 \ldots (2m-1)\left(\frac{1}{2m}\right)\left(\frac{2}{2m}\right)\left(\frac{3}{2m}\right)\ldots\left(\frac{2n-1}{2m}\right)}$$

vnde

vnde pro exponente $2n$ erit

$$2.\,4.\,6\ldots(2m-2)\left(\tfrac{2}{2m}\right)\left(\tfrac{4}{2m}\right)\left(\tfrac{6}{2m}\right)\ldots\left(\tfrac{2n-2}{2m}\right)=$$
$$1.\,3.\,5\ldots(2m-1)\left(\tfrac{1}{2m}\right)\left(\tfrac{3}{2m}\right)\left(\tfrac{5}{2m}\right)\ldots\left(\tfrac{2n-1}{2m}\right)$$

Simili modo ſi communis diuiſor ſit 3 pro exponente $3n$ reperietur

$$3^2.\,6^2.\,9^2\ldots\ldots(3m-3)^2\left(\tfrac{3}{3m}\right)^2\left(\tfrac{6}{3m}\right)^2\left(\tfrac{9}{3m}\right)^2\ldots\left(\tfrac{3n-3}{3m}\right)^2=$$
$$1.\,2.\,4.\,5\,..(3m-2)(3m-1)\left(\tfrac{1}{3m}\right)\left(\tfrac{2}{3m}\right)\left(\tfrac{4}{3m}\right)\left(\tfrac{5}{3m}\right)\ldots\left(\tfrac{3n-1}{3m}\right)$$

quae aequatio concinnius ita exhiberi poteſt:

$$\frac{1.\,2}{3^2}.\,\frac{4.\,5}{6^2}.\,\frac{7.\,8}{9^2}\ldots\ldots\ldots\frac{10\ldots\ldots\ldots(3m-2)(3m-1)}{(3m-3)^2}=$$
$$\frac{\left(\tfrac{3}{3m}\right)^2}{\left(\tfrac{1}{3m}\right)\left(\tfrac{2}{3m}\right)}\,\frac{\left(\tfrac{6}{3m}\right)^2}{\left(\tfrac{4}{3m}\right)\left(\tfrac{5}{3m}\right)\left(\tfrac{7}{3m}\right)}\ldots\ldots\ldots\frac{\left(\tfrac{3n-3}{3m}\right)^2}{\left(\tfrac{3n-2}{3m}\right)\left(\tfrac{3n-1}{3m}\right)}.$$

In genere autem ſi communis diuiſor ſit d et exponens dn habebitur.

$$\left[d.\,2d.\,3d\ldots(dm-d)\left(\tfrac{d}{dm}\right)\left(\tfrac{2d}{dm}\right)\left(\tfrac{3d}{dm}\right)\ldots\left(\tfrac{dn-d}{dm}\right)\right]^d=$$
$$1.\,2.\,3.\,4\ldots(dm-1)\left(\tfrac{1}{dm}\right)\left(\tfrac{2}{dm}\right)\left(\tfrac{3}{dm}\right)\ldots\left(\tfrac{dn-1}{dm}\right)$$

quae aequatio facile ad quosuis caſus accommodari poteſt vnde ſequens Theorema notari meretur.

Theorema.

59. Si α fuerit diuiſor communis numerorum m et n haecque formula $\left(\frac{p}{q}\right)$ denotet valorem inte-

gralis $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſi, erit

$$[\alpha . 2\alpha . 3\alpha \ldots (m-\alpha)(\tfrac{\alpha}{m})(\tfrac{2\alpha}{m})(\tfrac{3\alpha}{m})\ldots(\tfrac{n-\alpha}{m})]^{\alpha} =$$

$$1 . 2 . 3 \ldots (m-1)(\tfrac{1}{m})(\tfrac{2}{m})(\tfrac{3}{m})\ldots(\tfrac{n-1}{m}).$$

Demonſtratio.

Ex praecedente ſcholio veritas huius theorematis perſpicitur, cum enim ibi diuiſor communis eſſet $= d$, binique numeri propoſiti dm et dn horum loco hic ſcripſi m et n loco diuiſoris eorum autem d litteram α quam diuiſoris rationem aequalitas enunciata ita complectitur, vt in progreſſione arithmetica α, 2α, 3α, etc. continuata occurrere aſſumantur ipſi numeri m et n ideoque etiam $m-\alpha$ et $n-\alpha$. Ceterum fateri cogor hanc demonſtrationem vtpote inductioni potiſſimum innixam, neutiquam pro rigoroſa haberi poſſe: cum autem nihilominus de eius veritate ſimus conuicti, hoc theorema eo maiori attentione dignum videtur, interim tamen nullum eſt dubium, quin vberior huiusmodi formularum integralium euolutio tandem perfectam demonſtrationem ſit largitura quod autem iam ante nobis hanc veritatem perſpicere licuerit, inſigne hinc ſpecimen analyticae inueſtigationis elucet.

Coroll.

Coroll. 1.

69. Si loco ſignorum adhibitorum ipſas formulas integrales ſubſtituamus, theorema noſtrum ita ſe habebit vt ſit:

$$\alpha . 2\alpha . 3\alpha \ldots (m-\alpha) \int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}} . \int \frac{x^{2\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}} \ldots\ldots \int \frac{x^{n-\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}} =$$

$$\sqrt[\alpha]{}\, 1 . 2 . 3 \ldots (m-1) \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}} . \int \frac{x\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}} \ldots\ldots \int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}.$$

Coroll. 2.

61 Vel ſi ad abbreuiandum ſtatuamus $\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}} = X$ erit

$$\alpha\, 2\alpha . 3\alpha \ldots (m-\alpha) \int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{X} . \int \frac{x^{2\alpha-1}\,dx}{X} \ldots\ldots \int \frac{x^{n-\alpha-1}\,dx}{X} =$$

$$\sqrt[\alpha]{}\, 1 . 2 . 3 \ldots (m-1) \int \frac{dx}{X} . \int \frac{x\,dx}{X} . \int \frac{x^2\,dx}{X} \ldots\ldots \int \frac{x^{n-2}\,dx}{X}.$$

Theorema generale.

62. Si binorum numerorum m et n diuiſores communes ſint α, β, γ etc. formulaque $\left(\frac{p}{q}\right)$ denotet valorem integralis $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſi ſequentes expreſſiones ex huiusmodi formulis integralibus formatae inter ſe erunt aequales:

$$[\alpha.\ 2\alpha.\ 3\alpha \ldots\ldots (m-\alpha)(\tfrac{\alpha}{m})(\tfrac{2\alpha}{m})(\tfrac{3\alpha}{m})\ldots\ldots(\tfrac{n-\alpha}{m})]^{\alpha} =$$

$$[\beta.\ 2\beta.\ 3\beta \ldots\ldots (m-\beta)(\tfrac{\beta}{m})(\tfrac{2\beta}{m})(\tfrac{3\beta}{m})\ldots\ldots(\tfrac{n-\beta}{m})]^{\beta} =$$

$$[\gamma.\ 2\gamma.\ 3\gamma \ldots\ldots (m-\gamma)(\tfrac{\gamma}{m})(\tfrac{2\gamma}{m})(\tfrac{3\gamma}{m})\ldots\ldots(\tfrac{n-\gamma}{m})]^{\gamma} \text{ etc.}$$

Demonſtratio.

Ex praecedente Theoremate huius veritas manifeſto ſequitur cum quaelibet harum expreſſionum ſeorſim aequetur huic:

$$1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots (m-1)(\tfrac{1}{m})(\tfrac{2}{m})(\tfrac{3}{m})\ldots\ldots\ldots(\tfrac{n-1}{m})$$

quae vnitati vtpote minimo communi diuiſori numerorum m et n conuenit. Tot igitur huiusmodi expreſſiones inter ſe aequales exhiberi poſſunt, quot fuerint diuiſores communes binorum numerorum m et n.

Coroll. 1.

63. Cum ſit haec formula $(\frac{n}{m}) = \frac{1}{m}$, ideoque: $m(\frac{n}{m}) = 1$; expreſſiones noſtrae aequales ſuccinctius hoc modo repraeſentari poſſunt:

$$[\alpha.\ 2\alpha.\ 3\alpha \ldots\ldots m(\tfrac{\alpha}{m})(\tfrac{2\alpha}{m})(\tfrac{3\alpha}{m})\ldots\ldots(\tfrac{n}{m})]^{\alpha} =$$

$$[\beta.\ 2\beta.\ 3\beta \ldots\ldots m(\tfrac{\beta}{m})(\tfrac{2\beta}{m})(\tfrac{3\beta}{m})\ldots\ldots(\tfrac{n}{m})]^{\beta} =$$

$$[\gamma.\ 2\gamma.\ 3\gamma \ldots\ldots m(\tfrac{\gamma}{m})(\tfrac{2\gamma}{m})(\tfrac{3\gamma}{m})\ldots\ldots(\tfrac{n}{m})]^{\gamma}.$$

Etſi enim hic factorum numerus eſt auctus, tamen ratio compoſitionis facilius in oculos incurrit.

Coroll. 2.

64. Si ergo ſit $m = 6$ et $n = 12$ ob horum numerorum diuiſores communes 6, 3, 2, 1 quatuor ſequentes formae inter ſe aequales habebuntur:

$$\left[6\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{12}{6}\right)\right]^6 = \left[3.\ 6\left(\tfrac{3}{6}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{9}{6}\right)\tfrac{12}{6})\right]^3 =$$

$$\left[2.\ 4.\ 6\left(\tfrac{2}{6}\right)\left(\tfrac{4}{6}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{8}{6}\right)\left(\tfrac{10}{6}\right)\left(\tfrac{12}{6}\right)\right]^2 =$$

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{2}{6}\right)\left(\tfrac{3}{6}\right)\ldots\left(\tfrac{12}{6}\right).$$

Coroll. 3.

65. Si vltima cum penultima combinetur, naſcetur haec aequatio:

$$\frac{1.\ 3.\ 5}{2.\ 4.\ 6} = \frac{\left(\tfrac{2}{6}\right)\left(\tfrac{4}{6}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{8}{6}\right)\left(\tfrac{10}{6}\right)\left(\tfrac{12}{6}\right)}{\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{3}{6}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)\left(\tfrac{7}{6}\right)\left(\tfrac{9}{6}\right)\left(\tfrac{11}{6}\right)}$$

vltima autem cum antepenultima comparata praebet:

$$\frac{1.\ 2.\ 4.\ 5}{3.\ 3.\ 6.\ 6} = \frac{\left(\tfrac{3}{6}\right)\left(\tfrac{3}{6}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{9}{6}\right)\left(\tfrac{9}{6}\right)\left(\tfrac{12}{6}\right)\left(\tfrac{12}{6}\right)}{\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{2}{6}\right)\left(\tfrac{4}{6}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)\left(\tfrac{7}{6}\right)\left(\tfrac{8}{6}\right)\left(\tfrac{10}{6}\right)\left(\tfrac{11}{6}\right)}.$$

Scholion.

66. Infinitae igitur hinc conſequuntur relationes inter formulas integrales formae:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \left(\tfrac{p}{q}\right)$$

quae eo magis ſunt notatu dignae, quod ſingulari prorſus methodo ad eas hic ſumus perducti. Ac ſi quis de earum veritate adhuc dubitet, obſeruationes meas circa has formulas integrales conſulat, indeque pro

pro quouis caſu oblato de veritate facile conuincetur. Etſi autem illa tractatio huic confirmandae inſeruit, tamen relationes hic erutae eo maioris ſunt momenti, quod in iis certus ordo cernitur, eaeque per omnes claſſes, quantumuis exponentem n accipere lubeat, facili negotio continuentur, in priori vero tractatione calculus pro claſſibus altioribus continuo fiat operoſior et intricatior.

SVPPLEMENTVM

continens demonſtrationem

Theorematis §. 53. propoſiti.

Demonſtrationem hanc altius peti conuenit; ſumatur ſcilicet aequatio §. 25. data, quae poſito $f = 1$ et mutatis litteris eſt:

$$\frac{\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\nu-1}.\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\mu-1}}{\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\mu+\nu-1}} = \varkappa\int\frac{x^{\varkappa\mu-1}\,dx}{(1-x^{\varkappa})^{1-\nu}}$$

eaque per reductiones notas hac forma repraeſentetur:

$$\frac{\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\nu}.\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\mu}}{\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\mu+\nu}} = \frac{\varkappa\mu\nu}{\mu+\nu}\int\frac{x^{\varkappa\mu-1}\,dx}{(1-x^{\varkappa})^{1-\nu}}.$$

Statuatur nunc $\nu = \frac{m}{n}$ et $\mu = \frac{\lambda}{n}$ tum vero $\varkappa = n$ vt habeamus:

$$\frac{\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{m}{n}}.\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{\lambda}{n}}}{\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{\lambda+m}{n}}} = \frac{\lambda m}{\lambda+m}\int\frac{x^{\lambda-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^{n})^{n-m}}}$$

qua

quae breuitatis gratia, more ſupra vſitato, ita concinne referatur:

$$\frac{[\frac{m}{n}].[\frac{\lambda}{n}]}{[\frac{\lambda+m}{m}]} = \frac{\lambda m}{\lambda+m}\cdot\left(\frac{\lambda}{m}\right)$$

Iam loco λ ſucceſſiue ſcribantur numeri $1, 2, 3, 4 \ldots n$ omnesque hae aequationes, quarum numerus eſt $= n$ in ſe inuicem ducantur, et aequatio reſultans erit:

$$[\tfrac{m}{n}]^n\cdot\frac{[\frac{1}{n}][\frac{2}{n}][\frac{3}{n}]\ldots\ldots\ldots[\frac{n}{n}]}{[\frac{m+1}{n}][\frac{m+2}{n}][\frac{m+3}{n}]\ldots[\frac{m+n}{n}]} =$$

$$m^n\cdot\frac{1}{m+1}\cdot\frac{2}{m+2}\cdot\frac{3}{m+3}\cdot\ldots\ldots\frac{n}{m+n}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right) =$$

$$m^n\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots m}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right).$$

Simili autem modo pars prior transformetur vt ſit

$$[\tfrac{m}{n}]^n\cdot\frac{[\frac{1}{n}][\frac{2}{n}][\frac{3}{n}]\ldots\ldots\ldots[\frac{m}{n}]}{[\frac{n+1}{n}][\frac{n+2}{n}][\frac{n+3}{n}]\ldots\ldots[\frac{n+m}{n}]}$$

cuius conuenientia cum forma praecedente multiplicando per crucem, vt aiunt, ſponte ſe prodit. Cum vero ex natura harum formularum ſit

$$[\tfrac{n+1}{n}] = \tfrac{n+1}{n}[\tfrac{1}{n}];\quad [\tfrac{n+2}{n}] = \tfrac{n+2}{n}[\tfrac{2}{n}];\quad [\tfrac{n+3}{n}] = \tfrac{n+3}{n}[\tfrac{3}{n}] \text{ etc.}$$

ob harum formularum numerum $= m$, euadet haec prior pars:

$$[\tfrac{m}{n}]^n\cdot\frac{n^m}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+m)}$$

quae cum aequalis ſit parti alteri ante exhibitae:

$$m^n\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots m}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\ldots\left(\frac{n}{m}\right)$$

 adipi-

adipiſcimur hanc aequationem:

$$\left[\frac{m}{n}\right]^n = \frac{m^n}{n^m} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m \left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\ldots\left(\frac{n}{m}\right)$$

ita vt ſit

$$\left[\frac{m}{n}\right] = m \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m}{n^m}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\ldots\left(\frac{n}{m}\right)}$$

quae cum propoſita in §. 53. ob $\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{1}{m}$ omnino congruit, ex quo eius veritas nunc quidem ex principiis certiſſimis eſt euicta.

Demonſtratio Theorematis

§. 59. propoſiti.

Etiam hoc Theorema firmiori demonſtratione indiget, quam ex aequalitate ante ſtabilita:

$$\frac{\left[\frac{m}{n}\right] \cdot \left[\frac{\lambda}{n}\right]}{\left[\frac{\lambda+m}{n}\right]} = \frac{\lambda m}{\lambda+m}\left(\frac{\lambda}{m}\right)$$

ita adorno. Exiſtente α communi diuiſore numerorum m et n, loco λ ſucceſſiue ſcribantur numeri α, 2α, 3α etc. vsque ad n, quorum multitudo eſt $= \frac{n}{\alpha}$ atque omnes aequalitates hoc modo reſultantes in ſe inuicem ducantur, vt prodeat haec aequatio

$$\left[\frac{m}{n}\right]^{\frac{n}{\alpha}} \cdot \frac{\left[\frac{\alpha}{n}\right]\left[\frac{2\alpha}{n}\right]\left[\frac{3\alpha}{n}\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\left[\frac{n}{n}\right]}{\left[\frac{m+\alpha}{n}\right]\left[\frac{m+2\alpha}{n}\right]\left[\frac{m+3\alpha}{n}\right]\ldots\ldots\left[\frac{m+n}{n}\right]} =$$

$$m^{\frac{n}{\alpha}} \cdot \frac{\alpha}{m+\alpha} \cdot \frac{2\alpha}{m+2\alpha} \cdot \frac{3\alpha}{m+3\alpha} \ldots \frac{n}{m+n}\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right).$$

Iam

Iam prior pars in hanc formam ipſi aequalem transmutetur:

$$\left[\frac{m}{n}\right]^{\frac{n}{\alpha}} \cdot \frac{\left[\frac{\alpha}{n}\right]\left[\frac{2\alpha}{n}\right]\left[\frac{3\alpha}{n}\right]\ldots\ldots\ldots\left[\frac{m}{n}\right]}{\left[\frac{n+\alpha}{n}\right]\left[\frac{n+2\alpha}{n}\right]\left[\frac{n+3\alpha}{n}\right]\ldots\left[\frac{n+m}{n}\right]}$$

quae ob $\left[\frac{n+\alpha}{n}\right] = \frac{n+\alpha}{n}\left[\frac{\alpha}{n}\right]$ ſicque de ceteris reducitur ad hanc:

$$\left[\frac{m}{n}\right]^{\frac{n}{\alpha}} \cdot \frac{n}{n+\alpha} \cdot \frac{n}{n+2\alpha} \cdot \frac{n}{n+3\alpha} \cdots\cdots \frac{n}{n+m}.$$

Poſterior vero aequationis pars ſimili modo transformatur in:

$$m^{\frac{n}{\alpha}} \cdot \frac{\alpha}{n+\alpha} \cdot \frac{2\alpha}{n+2\alpha} \cdot \frac{3\alpha}{n+3\alpha} \cdots \frac{m}{n+m}\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right)$$

vnde enaſcitur haec aequatio:

$$\left[\frac{m}{n}\right]^{\frac{n}{\alpha}} n^{\frac{m}{\alpha}} = m^{\frac{n}{\alpha}} \cdot \alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha \ldots m\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right)$$

hincque

$$\left[\frac{m}{n}\right] = m \sqrt[n]{\frac{1}{m^n}\left(\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha \ldots m\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{\alpha}}$$

quae expreſſio cum praecedente comparata praebet hanc aequationem:

$$\left(\alpha, 2\alpha, 3\alpha \ldots m\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{\alpha} =$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right)$$

quod de omnibus diuiſoribus communibus binorum numerorum *m* et *n* eſt intelligendum.

PROBLEMATIS CVIVSDAM GEOMETRICI PRORSVS SINGVLARIS EVOLVTIO.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quaeſtionem hic geometricam ad examen ſum revocaturus quae cum ad genus adhuc nondum tractatum pertineat eo maiore attentione digna videtur, quod ſolutio quam Analyſis ſuppeditat, ita ſit comparata, vt ex ea vix intelligi queat, vtrum illi vnica ſatisfaciat linea curua an plures ac fortaſſe innumerabiles. Neque vero memini alia huiusmodi problemata a Geometris eſſe conſiderata quae tali incertitudini ſint obnoxia, vt inuenta adeo ſolutione analytica ancipites haereamus, vtrum ad genus determinatarum quaeſtionum, an indeterminatarum ſint referenda. Quare non dubito, quin euolutio quaeſtionis, quam hic ſum inſtituturus, occaſionem ſit praebitura fines cognitionis noſtrae analyticae haud mediocriter proferendi.

2. Notiſſima autem circuli proprietas, qua recta angulum a binis tangentibus formatum biſecans circulum normaliter traiicit, quaeſtionem hic tractandam ſuppeditauit.

Pro-

Propoſita ſcilicet recta poſitione data A B *eiuſmodi quaeritur curua* A m M, *vt ducta ad eius punctum quodcunque* M *tangente* M T *rectae illi* A B *in* T *occurrente recta* T C *angulum* A T M *biſecans eandem curuam in* m *normaliter traiiciat.* Tab II. Fig. 2.

Manifeſtum igitur eſt huic quaeſtioni ſatisfacere circulum quemcunque rectam poſitione datam A B alicubi tangentem; et cum tam locus contactus quam magnitudo circuli arbitrio noſtro relinquatur, ſolutiones quidem innumerabiles inde naſcuntur, quae tamen omnes, quoniam eadem ſpecie continentur, vnicam quaſi ſolutionem conſtituere ſunt cenſendae. Ex quo praecipuum huius quaeſtionis momentum in hoc verſatur, num praeter circulos aliae dentur lineae curuae, in quas eadem proprietas competat.

3. Mentem ergo a circulo abſtrahentes quaeſtionem propoſitam ita aggrediamur, vt analytice generatim in eas lineas curuas inquiramus, quae proprietate memorata ſint praeditae. Methodus autem hoc problema reſoluendi ideo haud parum videtur recondita, quod bina puncta M et *m*, quorum nexus non ſatis definitur, ad eandem curuam ſint referenda, dum pro altero M recta tangens pro altero vero *m* normalis ad curuam conſiderari debent quas binas rectas M T et *m* T ita in recta data AB concurrere neceſſe eſt, vt iſta *m* T angulum A T M biſariam ſecet. Neque vero haec binorum punctorum M et *m* relatio eſt reciproca, vti in pleriſque aliis huiusmodi quaeſtionibus vſu venit, vbi ex

 certa

certa quadam binorum punctorum relatione naturam curuae inueſtigari oportet.

4. Quo igitur indolem binorum punctorum m et M ad ſimilitudinem perducamus, ad m quoque tangentem concipiamus $m\,t$ rectae datae A B in t occurrentem, ac iam manifeſtum eſt relationem inter lineas A t et $t\,m$ eadem aequatione exprimi oportere, ac relationem inter rectas A T et T M, vbi ergo videndum eſt, quomodo hae binae relationes inter ſe connectantur. Hunc in finem conſideretur angulus B $t\,m$, qui vocetur $= \omega$, et ob T $m\,t$ rectum habebimus angulum A T $m = 90° - \omega$, cui cum per conditionem problematis aequalis eſſe debeat angulus M T m, erit angulus M T B $= 2\,\omega$, vnde ſolutio eo reuocatur, vt curuae punctum M eodem modo ex angulo $2\,\omega$ determinetur, quo punctum m ex angulo ω determinatur.

5. Cum igitur poſito angulo B $t\,m = \omega$ ſit angulus B T M $= 2\,\omega$, vocemus rectas tangentes $m\,t = t$ et M T $=$ T, ac nunc perſpicuum eſt, qualis fuerit functio quantitas t ipſius ω, talem functionem eſſe debere quantitatem T ipſius $2\,\omega$; haecque eſt conditio ob legem continuitatis requiſita qua efficitur vt bina puncta m et M ad eandem lineam curuam continuam referantur. Simili vero modo cum etiam recta A t tanquam functio anguli B $t\,m = \omega$ ſpectari poſſit, neceſſe eſt vt recta A T ſimilis omnino ſit functio anguli dupli BTM $= 2\,\omega$. Harum autem rectarum A t et A T differentia T t,

quia

quia ob triangulum $t\,m\,T$ rectangulum eſſe debet $T\,t = \frac{t}{coſ.\,\omega}$, ex hac ipſa conditione ſolutio problematis erit deducenda. Ceterum hic notari conueniet angulum $B\,t\,m = \omega$ deſignare amplitudinem arcus $A\,m$, ita vt arcus $A\,M$ amplitudo illius ſit dupla.

6. Ad quaeſtionem itaque reſoluendam diſpiciamus, quomodo per angulum $B\,t\,m = \omega$ et tangentem $t\,m = t$ interuallum $A\,t$ in recta poſitione data $A\,B$ determinetur, vbi quidem perinde eſt vbi punctum fixum A accipiatur. Ducta igitur curuae tangente proxima $\mu\,\tau$, vt ſit angulus $B\,\tau\,\mu = \omega + d\omega$, ideoque angulus $t\,\mu\,\tau = d\,\omega$, vnde centro m vel μ deſcripto arculo elementari $t\,\theta$ radio $\mu\,\tau$ producto in θ occurrente, erit $t\,\theta = t\,d\,\omega$, hincque ob $\theta\,t\,\tau = 90° - \omega$ fit $t\,\tau = \frac{t\,d\,\omega}{ſin.\,\omega}$, quod eſt incrementum interualli At ita vt hinc concludamus $At = \int \frac{t\,d\,\omega}{ſin.\,\omega}$. Tab. II. Fig. 3.
Qua expreſſione ad priorem figuram translata, ſi pro t ſcribamus T et loco anguli ω eius duplum $2\,\omega$, lex continuitatis praebet

$$A\,T = \int \frac{2\,T\,d\,\omega}{ſin.\,2\,\omega} = \int \frac{T\,d\,\omega}{ſin.\,\omega\,coſ.\,\omega},$$

vnde elicitur interuallum

$$T\,t = \int \frac{T\,d\,\omega}{ſin.\,\omega\,coſ.\,\omega} - \int \frac{t\,d\,\omega}{ſin.\,\omega}$$

quantitati $\frac{t}{coſ.\,\omega}$ aequandum.

7. Sumtis ergo differentialibus hanc adipiſcimur aequationem:

$$\frac{T\,d\,\omega}{ſin.\,\omega\,coſ.\,\omega} - \frac{t\,d\,\omega}{ſin.\,\omega} = \frac{d\,t}{coſ.\,\omega} + \frac{t\,d\,\omega\,ſin.\,\omega}{coſ.\,\omega^2}$$

quae

quae reducitur ad hanc

$$\frac{T\,d\,\omega}{ſin.\,\omega\,coſ.\,\omega} = \frac{d\,t}{coſ.\,\omega} + \frac{t\,d\,\omega}{ſin.\,\omega\,coſ.\,\omega^2}$$

indeque ad iſtam:

$$T\,coſ.\,\omega = t + \frac{d\,t}{d\,\omega}\,ſin.\,\omega\,coſ.\,\omega.$$

Quocirca quaeſtio iam huc eſt perducta, vt pro t eiusmodi functio ipſius ω ſit inueſtiganda vt ſi pro T ſimilis functio ipſius $2\,\omega$ ſcribatur, aequationi modo inuentae ſatisfiat. Quemadmodum autem eiusmodi conditiones ſint adimplendae, methodus certa adhuc deſideratur, imprimis ſi ſolutiones generales poſtulentur. Quamobrem haud inutile erit aequationem inuentam in plurimas alias formas transfundere, ex quibus quae fuerit ſimpliciſſima, facillime quoque poterit tractari.

8. Angulum quidem ω perpetuo in calculo conſeruari oportet quia per eum quantitates ad bina puncta m et M referendae commodiſſime definiuntur. Ponamus igitur ipſa interualla $A\,t = x$ et $A\,T = X$, ita vt iam ſimili modo X talis debeat eſſe functio ipſius $2\,\omega$, qualis x fuerit ipſius ω. Quia ergo habemus $\int \frac{T\,d\,\omega}{ſin.\,\omega\,coſ.\,\omega} = X$ et $\int \frac{t\,d\,\omega}{ſin.\,\omega} = x$, hinc fit $t = \frac{d\,x\,ſin.\,\omega}{d\,\omega}$ et nunc ſolutio problematis perducitur ad hanc aequationem:

$$X - x = \frac{d\,x}{d\,\omega}\,tang.\,\omega \text{ ſeu}$$

$$X\,coſ.\,\omega = \frac{d\,x}{d\,\omega}\,ſin.\,\omega + x\,coſ.\,\omega.$$

Quodſi

Quodſi porro ponamus x ſin. $\omega = y$ ſimilique modo X ſin. $2\,\omega =$ Y vt ſit X coſ. $\omega = \frac{Y}{2\, ſin.\, \omega}$, haec aequatio prodit ſimplicior:

$$\frac{Y}{2\, ſin.\omega} = \frac{d\,y}{d\,\omega} \text{ ſeu } Y = \frac{2\,d\,y}{d\,\omega} \text{ ſin. } \omega$$

cui aequationi ita ſatisfieri oportet, vt qualis y fuerit functio ipſius ω, talis Y ſit functio ipſius $2\,\omega$.

9. Poſſumus quoque pro puncto m ipſam normalem m T in calculum introducere, poſita enim $m\,T = p$, et normali puncto M conueniente $=$ P, quia eſt $p = t$ tang. ω, erit ſimili modo $P = T$ tang. $2\,\omega$ et ob $t = \frac{p\, coſ.\omega}{ſin.\,\omega}$ et $T = \frac{P\, coſ.\, 2\,\omega}{ſin.\, 2\,\omega}$ aequatio ſolutionem continens abit in hanc formam:

$$\int \frac{2\,P\,d\,\omega\, coſ.\, 2\,\omega}{(ſin.\, 2\,\omega)^2} - \int \frac{p\,d\,\omega\, coſ.\,\omega}{(ſin.\,\omega)^2} = \frac{p}{ſin.\,\omega}$$

quae differentiata dat:

$$\frac{2\,P\,d\,\omega\, coſ.\, 2\,\omega}{(ſin.\, 2\,\omega)^2} - \frac{p\,d\,\omega\, coſ.\,\omega}{(ſin.\,\omega)^2} = \frac{d\,p}{ſin.\,\omega} - \frac{p\,d\,\omega\, coſ.\,\omega}{(ſin.\,\omega)^2}$$

ſeu $P\,d\,\omega$ coſ. $2\,\omega = 2\,dp$ ſin. ω coſ. $\omega^2 = dp$ coſ. ω ſin. 2ω

ita vt ſit $P = \frac{d\,p}{d\,\omega}$ coſ. ω tang. $2\,\omega$.

10. In computum etiam duci poteſt ipſe arcus curuae A m, qui ponatur $= s$, ita vt relatio inter hunc arcum A $m = s$ et amplitudinem eius ω ſit definienda. Ex figura autem 2, hoc facillime praeſtabitur, cum enim poſita tangente $m\,t = t$ ſit $\mu\,\tau = t + d\,t$ et $m\,\mu = d\,s$, ob $t\,\theta = t\,d\,\omega$ hincque $\tau\,\theta = \frac{t\,d\,\omega\, coſ.\,\omega}{ſin.\,\omega}$ erit $\mu\,\theta = t + d\,t + \frac{t\,d\,\omega\, coſ.\,\omega}{ſin.\,\omega}$, Tab. II. Fig. 3.

quae linea ipſi $\mu t = t + ds$ aequalis ſtatui debet vnde colligitur:

$$ds = dt + \frac{t\,d\omega\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega} = \frac{d.\,t\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega}$$

Tab. II. Fig. 2. ideoque $t = \frac{1}{\text{ſin.}\,\omega}\int ds\,\text{ſin.}\,\omega$. Quare ſi ſimili modo ponatur arcus $AM = S$ tangente exiſtente $MT = T$, habebimus

$$T = \frac{1}{\text{ſin.}\,2\,\omega}\int dS\,\text{ſin.}\,\omega = \frac{1}{\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega}\int dS\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega\,,$$

quos valores in aequatione ſupra inuenta $T\,\text{coſ.}\,\omega = t + \frac{dt}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega$ ſubſtitui oportet, ex quo conficitur

$$\frac{1}{\text{ſin.}\,\omega}\int dS\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega = \frac{1}{\text{ſin.}\,\omega}\int ds\,\text{ſin.}\,\omega + \frac{ds}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega - \frac{\text{coſ.}\,\omega^2}{\text{ſin.}\,\omega}\int ds\,\text{ſin.}\,\omega$$

ſeu $\int dS\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega = \text{ſin.}\,\omega^2 \int ds\,\text{ſin.}\,\omega + \frac{ds}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega^2\,\text{coſ.}\,\omega$.

11. Hac aequatione differentiata prodit

$$dS\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega = 2\,d\omega\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega\int ds\,\text{ſin.}\,\omega + ds\,\text{ſin.}\,\omega^3 + \frac{dds}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega^2\,\text{coſ.}\,\omega + 2\,ds\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega^2 - ds\,\text{ſin.}\,\omega^3$$

ac facta diuiſione per ſin. ω coſ. ω fit

$$dS = 2\,d\omega\int ds\,\text{ſin.}\,\omega + 2\,ds\,\text{coſ.}\,\omega + \frac{dds}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega$$

Denuo ergo differentiatione inſtituta nanciſcimur:

$$ddS = 2\,d\omega\,ds\,\text{ſin.}\,\omega + 2\,dds\,\text{coſ.}\,\omega - 2\,d\omega\,ds\,\text{ſin.}\,\omega + \frac{d^3s}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega + dds\,\text{coſ.}\,\omega$$

ideoque $ddS = 3\,dds\,\text{coſ.}\,\omega + \frac{d^3s}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega$

vbi quidem differentiale $d\omega$ pro conſtanti eſt ſumtum. Huic aequationi ſatisfieri ſtatim liquet, ſumendo $\frac{dds}{d\omega^2} = 0$ quia tum quoque fit $\frac{ddS}{d\omega^2} = 0$; hinc autem colli-

colligitur $s = a + b\,\omega$ ita vt arcus $A\,m = s$ ſit amplitudini proportionalis, quae eſt notiſſima circuli proprietas.

12. Quodſi porro radius oſculi curuae in m ſtatuatur $= r$, in M vero $= R$, quoniam tum fit $d\,s = r\,d\,\omega$ et $d\,S = 2\,R\,d\,\omega$, aequationem modo inuentam facile ad radios curuaturae traducimus, vnde reſultat

$$2\,d\,R = 3\,d\,r\,\text{coſ.}\,\omega + \frac{d\,d\,r}{d\,\omega}\,\text{ſin.}\,\omega$$

vbi multo magis perſpicuum eſt circulos ſatisfacere, cum ſumto radio oſculi conſtante conditio iſtius aequationis impleatur. Vlterius vero curuae $A\,m\,M$ euoluta induci poteſt, cuius radius oſculi pro puncto ex m nato ſi ponatur $= r'$, pro puncto autem ab M deriuato $= R'$, quia conſtat eſſe $d\,r = r'\,d\,\omega$ et $d\,R = 2\,R'\,d\,\omega$ prodit haec aequatio:

$$4\,R' = 3\,r'\,\text{coſ.}\,\omega + \frac{d\,r'}{d\,\omega}\,\text{ſin.}\,\omega.$$

Quaeſtio igitur noſtra iam huc eſt perducta vt iudicetur, num huic aequationi per alios valores praeter $r' = 0$ et $R' = 0$ ſatisfieri queat.

13. Cum ſit $d\,s = d\,t + \frac{t\,d\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega}$, erit radius oſculi curuae in m quem poſuimus

$$r = \frac{d\,s}{d\,\omega} = \frac{d\,t}{d\,\omega} + \frac{t\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega},$$

et radius oſculi in M

$$R = \frac{d\,T}{2\,d\,\omega} + \frac{T\,\text{coſ.}\,2\,\omega}{\text{ſin.}\,2\,\omega},$$

 quibus

quibuscum normales ad curuam in *m* et M ductas et in C concurrentes comparemus. Quia vero eſt angulus $MTC = ATC = 90° - \omega$, ob $MT = T$ erit

$$MC = \frac{T\, coſ.\, \omega}{ſin.\, \omega} = \frac{t}{ſin.\, \omega} + \frac{dt}{d\omega}\, coſ.\, \omega$$

in ſubſidium vocando relationem inter tangentes $mt = t$ et $MT = T$ ſupra inuentam. Tum vero hinc porro habetur:

$$CT = \frac{T}{ſin.\, \omega} = \frac{t}{ſin.\, \omega\, coſ.\, \omega} + \frac{dt}{d\omega}:$$

vnde auferatur interuallum

$$Tm = t\, tang.\, \omega = \frac{t\, ſin.\, \omega}{coſ.\, \omega},$$ vt remaneat

$$mC = \frac{t\, coſ.\, \omega}{ſin.\, \omega} + \frac{dt}{d\omega},$$

ex quo perſpicuum eſt hanc rectam *m* C ipſi radio oſculi in *m* aequari, ideoque punctum C reperiri in euoluta curuae quaeſitae.

14. Cum normalis *m* C vtpote radius oſculi euolutam curuae quaeſitae in C tangat, normalis vero M C per idem punctum tranſeat, ea hic euolutam ſecabit, niſi euoluta in vnicum punctum concentretur, vti euenit in circulo. Quare ſi praeter circulum aliae curuae noſtrae quaeſtioni ſatisfaciant, earum euolutas ita comparatas eſſe oportet, vt ſi normalis *m* C euolutam tangat in C, normalis M C eandem hic ſecet producta vero alibi tangat, ſicque neceſſe eſt, omnes euolutae tangentes eandem ſimul alicubi interſecare, quod quomodo in omnibus tangentibus contingere poſſit, haud perſpicitur, niſi forte

ſorte ſpirales lineae miris ſpiris contortae, ſint adhibendae. Summa autem difficultas huiusmodi mirabiles figuras concipiendi earum impoſſibilitatem minime arguit, neque hinc concludere licet praeter circulos nullas alias lineas curuas quaeſtioni ſatisfacere poſſe.

15. Quanquam autem vix vlla patet via aequationes inuentas reſoluendi, tamen ea, quae videtur ſimpliciſſima $Y = \frac{2\,dy}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega$, pro qua eſt $x = \frac{y}{\text{ſin.}\,\omega}$ et

$$mt = t = \frac{dx\,\text{ſin.}\,\omega}{d\omega} = \frac{dy}{d\omega} - \frac{y\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega}$$

vnde fit $ds = \frac{ddy}{d\omega} + y\,d\omega$ haud leue ſuppeditat argumentum, quo praeter circulos omnes aliae figurae excludi videntur. Si enim ſolutionem generalem quaerentes ſtatuamus:

$$y = A - B\omega^2 + C\omega^4 - D\omega^6 + E\omega^8 - \text{etc.}$$
$$+ \mathfrak{A}\omega - \mathfrak{B}\omega^3 + \mathfrak{C}\omega^5 - \mathfrak{D}\omega^7 + \mathfrak{E}\omega^9 - \text{etc.}$$

vt ſit ob principium continuitatis:

$$Y = A - 2^2 B\omega^2 + 2^4 C\omega^4 - 2^6 D\omega^6 + 2^8 E\omega^8 + \text{etc.}$$
$$+ 2\mathfrak{A}\omega - 2^3\mathfrak{B}\omega^3 + 2^5\mathfrak{C}\omega^5 - 2^7\mathfrak{D}\omega^7 + 2^9\mathfrak{E}\omega^9 - \text{etc.}$$

euidens eſt, tam poteſtates pares, quam impares ſeorſim definiri poſſe.

16. Ponamus breuitatis gratia

$\text{ſin.}\,\omega = \omega - \alpha\omega^3 + \beta\omega^5 - \gamma\omega^7 + \delta\omega^9 - \text{etc.}$ vt ſit

$\alpha = \frac{1}{1.2.3}$; $\beta = \frac{\alpha}{4.5}$; $\gamma = \frac{\beta}{6.7}$; $\delta = \frac{\gamma}{8.9}$; etc.

et pro poteſtatibus paribus, ob

$$\frac{dy}{d\omega} = -2B\omega + 4C\omega^3 - 6D\omega^5 + 8E\omega^7 - \text{etc.}$$

aequatio $\frac{2\,d\,y}{d\,\omega}$ ſin. $\omega - Y = 0$ praebet hanc aequationem

$$\begin{array}{rccccc}
0 = & -4B\omega^2 & +8C\omega^4 & -12D\omega^6 & +16E\omega^8 & -20F\omega^{10} \\
 & & +4\alpha B & -8\alpha C & +12\alpha D & -16\alpha E \\
 & & & -4\beta B & +8\beta C & -12\beta D \\
 & & & & +4\gamma B & -8\gamma C \\
 & & & & & -4\delta B \\
-A & +2^2 B & -2^4 C & +2^6 D & -2^8 E & +2^{10} F \text{ etc.}
\end{array}$$

vnde colligitur $A = 0$, tum vero per 4 diuidendo prodeunt hae aequalitates:

$$\begin{aligned}
(2^2 - 2)\,C &= \alpha B \\
(2^4 - 3)\,D &= 2\alpha C + \beta B \\
(2^6 - 4)\,E &= 3\alpha D + 2\beta C + \gamma B \\
(2^8 - 5)\,F &= 4\alpha E + 3\beta D + 2\gamma C + \delta B \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

17. Etſi hinc vix vllam legem progreſſionis concinnam ſperare licet, tamen praeter expectationem euenit, vt ſumto $B = \frac{a}{1.2}$ ſequentes eliciantur valores:

$$B = \frac{a}{1.2};\; C = \frac{a}{1.2.3.4};\; D = \frac{a}{1\ldots\ldots 6};\; E = \frac{a}{1\ldots\ldots 8} \text{ etc.}$$

ſimilique modo pro poteſtatibus imparibus reperitur:

$$\mathfrak{A} = b;\; \mathfrak{B} = \frac{b}{1.2.3};\; \mathfrak{C} = \frac{b}{1\ldots\ldots 5};\; \mathfrak{D} = \frac{b}{1\ldots\ldots 7} \text{ etc.}$$

quae ſeries cum per ſinus et coſinus ſint ſummabiles, colligitur fore $y = a$ coſ. $\omega - a + b$ ſin. ω; vnde concluditur

$$t = \frac{-a(1 - \text{coſ.}\,\omega)}{\text{ſin.}\,\omega} = -a \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\omega \text{ et } \frac{d\,t}{d\,\omega} = r = -a,$$

ita vt curuae quaeſitae radius oſculi vbique ſit eiusdem magnitudinis ideoque curua circulus.

18.

18. Cum autem haec lex progreſſionis ex calculo perquam operoſo et moleſto per inductionem ſit concluſa, ne huic concludendi generi ſaepenumero fallaci nimium confidere videar, idem alio adhuc modo facilius euinci poteſt. Statuatur enim

$$y = A + B\,\text{coſ.}\,\omega + C\,\text{coſ.}\,3\,\omega + D\,\text{coſ.}\,5\,\omega + E\,\text{coſ.}\,7\,\omega + \text{etc.}$$

vbi quidem multipla paria omitto, vt quantitas $\frac{2\,dy}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega$ tantum multipla ſimilia anguli ω complectatur, qualia valor:

$$Y = A + B\,\text{coſ.}\,2\omega + C\,\text{coſ.}\,6\omega + D\,\text{coſ.}\,10\omega + E\,\text{coſ.}\,14\,\omega\ \text{etc.}$$

continet. Cum igitur ſit

$$\frac{dy}{d\omega} = -B\,\text{ſin.}\,\omega - 3\,C\,\text{ſin.}\,3\,\omega - 5\,D\,\text{ſin.}\,5\,\omega - 7\,E\,\text{ſin.}\,7\omega - \text{etc.}$$

per $-2\,\text{ſin.}\,\omega$ multiplicando abit $Y - \frac{2\,dy}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega = 0$ in

$$\begin{array}{llllll} B - B\,\text{coſ.}\,2\,\omega & -3\,C\,\text{coſ.}\,4\omega & -5\,D\,\text{coſ.}\,6\omega & -7\,E\,\text{coſ.}\,8\omega & -9\,F\,\text{coſ.}\,10\,\omega\ \text{etc.} = 0 \\ \quad +3\,C & +5\,D & +7\,E & +9\,F & +11\,G \\ +A+B & & +C & & +D \end{array}$$

vnde primo patet eſſe $B = -A$, tum vero $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$, ſequentesque litteras omnes euaneſcere; ita vt ſit

$$y = A\,(1 - \text{coſ.}\,\omega).$$

19. Simili modo ſi ſtatuamus:

$$y = A + B\,\text{ſin.}\,\omega + C\,\text{ſin.}\,3\,\omega + D\,\text{ſin.}\,5\,\omega + E\,\text{ſin.}\,7\,\omega + F\,\text{ſin.}\,9\,\omega\ \text{etc.}$$

hincque

$$\frac{dy}{d\omega} = B\,\text{coſ.}\,\omega + 3\,C\,\text{coſ.}\,3\,\omega + 5\,D\,\text{coſ.}\,5\,\omega + 7\,E\,\text{coſ.}\,7\,\omega\ \text{etc.}$$

aequatio noſtra induet hanc formam:

$0 = B$

$$\begin{array}{lllllll} 0 = & B\,\sin.2\omega & +3C\,\sin.4\omega & +5D\,\sin.6\omega & +7E\,\sin.8\omega & +9F\,\sin.10\omega & + \text{etc.} \\ & -3C & -5D & -7E & -9F & -11G & \\ & -A-B & & -C & & -D & \end{array}$$

vbi ſit $A = 0$, tum vero vt ante $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$ etc. ita vt his valoribus coniunctis habeatur

$$y = a\,(1 - \cos.\,\omega) + b\,\sin.\,\omega$$

quae eſt ipſa ſolutio iam ante inuenta.

20. Haec autem ſolutio merito non ſatis generalis videtur, cum ex valoribus ipſius y multipla paria anguli ω praeter neceſſitatem reiecerimus; iis enim admiſſis ſi ſtatuamus:

$$y = A + B\cos.\omega + C\cos.2\omega + D\cos.3\omega + E\cos.4\omega + F\cos.5\omega \text{ etc.}$$

vt ſit

$$\frac{dy}{d\omega} = -B\sin.\omega - 2C\sin.2\omega - 3D\sin.3\omega - 4E\sin.4\omega - 5F\sin.5\omega - \text{etc.}$$

ſequens reſultat aequatio:

$$\begin{array}{llllllll} 0 = & B & +2C\cos.\omega & -B\cos.2\omega & -2C\cos.3\omega & -3D\cos.4\omega & -4E\cos.5\omega & -5F\cos.6\omega \\ & & & +3D & +4E & +5F & +6G & +7H \\ & +A & & +B & & +C & & +D \end{array}$$

vbi iterum eſt

$$B = -A;\ C = 0,\ D = 0,\ E = 0,\ F = 0,\ G = 0 \text{ etc.}$$

ita vt nunc quidem certum videatur, ſolutionem praecedentem latiſſime patere, neque praeter circulos vllas alias curuas quaeſtioni ſatisfacere poſſe. Quod enim hic de coſinibus eſt oſtenſum, idem ſimili modo de ſinibus demonſtratur.

21.

21. Cum igitur ſuperior inductio ſit penitus confirmata, illae determinationes eo magis ſunt notatu dignae quae huc redeunt, vt ſi fuerit:

$$2^2 C = 2C + \frac{B}{1.2.3}$$

$$2^4 D = 3D + \frac{2C}{1.2.3} + \frac{B}{1\ldots5}$$

$$2^6 E = 4E + \frac{3D}{1.2.3} + \frac{2C}{1\ldots5} + \frac{B}{1\ldots7}$$

$$2^8 F = 5F + \frac{4E}{1.2.3} + \frac{3D}{1\ldots5} + \frac{2C}{1\ldots7} + \frac{B}{1\ldots9}$$

etc.

tum iſtae quantitates ita determinentur, vt ſit

$$B = \frac{a}{1.2};\ C = \frac{a}{1\ldots4};\ D = \frac{a}{1\ldots6};\ E = \frac{a}{1\ldots8}\ \text{etc.}$$

qui valores, quemadmodum ex illis relationibus commode deriuentur, omnino accuratiorem disquiſitionem mereri videntur.

22. Simili vero modo ſi ibi §. 15. ſtatuatur:

$$y = \mathfrak{A}\omega - \mathfrak{B}\omega^3 + \mathfrak{C}\omega^5 - \mathfrak{D}\omega^7 + \mathfrak{E}\omega^9 - \text{etc. vt ſit}$$

$$\frac{dy}{d\omega} = \mathfrak{A} - 3\mathfrak{B}\omega^2 + 5\mathfrak{C}\omega^4 - 7\mathfrak{D}\omega^6 + 9\mathfrak{E}\omega^8 - \text{etc.}$$

obtinetur iſta aequatio

$$\begin{array}{rrrrrl} 0 = 2\mathfrak{A}\omega & -\,6\mathfrak{B}\omega^3 & +\,10\mathfrak{C}\omega^5 & -\,14\mathfrak{D}\omega^7 & +\,18\mathfrak{E}\omega^9 & -\ \text{etc.} \\ & -\,2\alpha\mathfrak{A} & +\,6\alpha\mathfrak{B} & -\,10\alpha\mathfrak{C} & +\,14\alpha\mathfrak{D} & \\ & & +\,2\beta\mathfrak{A} & -\,6\beta\mathfrak{B} & +\,10\beta\mathfrak{C} & \\ & & & -\,2\gamma\mathfrak{A} & +\,6\gamma\mathfrak{B} & \\ & & & & +\,2\delta\mathfrak{A} & \\ -\,2\mathfrak{A} & +\,2^3\mathfrak{B} & -\,2^5\mathfrak{C} & +\,2^7\mathfrak{D} & -\,2^9\mathfrak{E} & \text{etc.} \end{array}$$

vnde

vnde naſcuntur hae determinationes:

$$2^2\mathfrak{B} = 3\mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{A}}{1.\,2.\,3}$$

$$2^4\mathfrak{C} = 5\mathfrak{C} + \frac{3\mathfrak{B}}{1.\,2.\,3} + \frac{\mathfrak{A}}{1\ldots\ldots5}$$

$$2^6\mathfrak{D} = 7\mathfrak{D} + \frac{5\mathfrak{C}}{1.\,2.\,3} + \frac{3\mathfrak{B}}{1\ldots\ldots5} + \frac{\mathfrak{A}}{1\ldots\ldots7}$$

$$2^8\mathfrak{E} = 9\mathfrak{E} + \frac{7\mathfrak{D}}{1.\,2.\,3} + \frac{5\mathfrak{C}}{1\ldots\ldots5} + \frac{3\mathfrak{B}}{1\ldots\ldots7} + \frac{\mathfrak{A}}{1\ldots\ldots9}$$

etc.

quae euolutae ſequentes ſuppeditant valores:

$$\mathfrak{A} = b;\ \mathfrak{B} = \frac{b}{1.\,2.\,3};\ \mathfrak{C} = \frac{b}{1\ldots\ldots5};\ \mathfrak{D} = \frac{b}{1\ldots\ldots7}\ \text{etc.}$$

quae ſimplex progreſſionis lex nonniſi per multas ambages ex illis formulis deducitur, ideoque diſtinctior euolutio maxime deſideratur.

23. Neque vero hoc argumentum ſatis validum videtur ad euincendum praeter circulum nullas alias lineas curuas quaeſtioni noſtrae ſatisfacere. Cum enim aequationem $Y = \frac{2\,dy}{d\,\omega}$ ſin. ω ita reſolui oporteat, vt Y fiat talis functio ipſius $2\,\omega$, qualis y eſt ipſius ω, reſolutio hic adhibita naturam iſtius aequationis minime exhaurire videtur, propterea quod pro y eiusmodi ſeriem aſſumſimus, in qua nonniſi poteſtates ipſius ω, quarum exponentes ſunt numeri integri poſitiui, occurrunt; dum fortaſſe etiam exponentes vel fracti vel negatiui, vel etiam irrationales atque adeo imaginarii locum habere poſſent; imaginariis ſcilicet ſe mutuo deſtruentibus. Quod num fieri poſſit ſtatuamus:

$$y = A\,\omega^\alpha + B\,\omega^\beta + C\,\omega^\gamma\ \text{etc.}$$

quorum

quorum exponentium primus α ſit minimus. Erit ergo

$$\frac{dy}{d\omega} = \alpha A \omega^{\alpha - 1} + \beta B \omega^{\beta - 1} \text{ etc.}$$

quae ſeries per

$$2 \text{ ſin. } \omega = 2\omega - \frac{2}{1.2.3}\omega^3 + \frac{2}{1.2...5}\omega^5 - \text{etc.}$$

multiplicata praebet hanc formam

$$\begin{aligned} &2\alpha A \omega^{\alpha} + 2\beta B \omega^{\beta} \text{ etc.} \\ &\quad - \frac{2\alpha A}{1.2.3}\omega^{\alpha+2} - \frac{2\beta B}{1.2.3}\omega^{\beta+2} - \text{etc.} \\ &\qquad + \frac{2\alpha A}{1....5}\omega^{\alpha+4} + \text{etc.} \end{aligned}$$

ipſi $Y = 2^{\alpha} A \omega^{\alpha} + 2^{\beta} B \omega^{\beta} + 2^{\gamma} C \omega^{\gamma}$ etc. aequandam. Neceſſe ergo eſt, vt infimae poteſtates vtrinque ſint aequales, vnde fit $2^{\alpha} = 2\alpha$, quod realiter duobus tantum modis fieri poteſt ſumendo vel $\alpha = 1$ vel $\alpha = 2$, ex quo ſeries ſupra aſſumtae totum negotium conficere videntur.

24. Cum autem nullum ſit dubium, quin aequatio $2^{\alpha} = 2\alpha$ praeter has duas radices innumeras alias imaginarias complectatur, merito naſcitur ſuſpicio, ex iis quoque ſolutiones vtiles naſci poſſe. Neque igitur abs re fore arbitror methodum indicaſſe, qua etiam radices imaginarias huius aequationis proxime ſaltem definire liceat. Cum ergo α ſit numerus imaginarius, eius forma certo eſt huiusmodi

$$\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1},$$

vnde fit

$$2^{\alpha} = 2^{\mu} . 2^{\nu\sqrt{-1}} = 2^{\mu}(\text{coſ.}(\nu l 2) + \sqrt{-1}. \text{ ſin. } (\nu l 2)), \text{ cui}$$

$$2\alpha = 2\mu + 2\nu\sqrt{-1}$$

ita aequale ſtatui debet vt partes reales et imaginariae ſeorſim aequentur: hinc ergo fit

$$2\mu = 2^\mu \operatorname{coſ.}(\nu l 2) \quad \text{et} \quad 2\nu = 2^\mu \operatorname{ſin.}(\nu l 2)$$

ideoque

$$4(\mu\mu + \nu\nu) = 2^{2\mu} \quad \text{et} \quad \nu = \sqrt{(2^{2\mu-2} - \mu\mu)}.$$

Ponamus $\frac{\mu}{2^{\mu-1}} = \operatorname{coſ.}\Phi$, et oritur $\nu = 2^{\mu-1}\operatorname{ſin.}\Phi = \mu \operatorname{tang.}\Phi$.

Cum igitur ſit $\operatorname{coſ.}(\nu l 2) = \frac{\mu}{2^{\mu-1}} = \operatorname{coſ}\Phi$, ſequitur fore $\nu l 2 = 2n\pi \pm \Phi$, denotante $2n\pi$ multiplum quodcunque totius circumferentiae. Quare habetur $\mu l 2. \operatorname{tang.}\Phi = 2n\pi \pm \Phi$ et $\mu = \frac{2n\pi \pm \Phi}{l 2. \operatorname{tg.}\Phi}$, qui valor cum illo ex formula $\mu = 2^{\mu-1}\operatorname{coſ.}\Phi$ oriundo conuenire debet Hoc autem ob n numerum arbitrarium dummodo integrum infinitis modis obtineri poſſe euidens eſt. Scilicet ſumendo $n = 1$ et ponendo $\mu = \frac{2\pi - \Phi}{l 2. \operatorname{tang.}\Phi}$, approximationibus aliquot inſtitutis colligitur angulus $\Phi = 61^\circ, 24', 24''$, hincque

$$\mu = 4,0980836 \quad \text{et} \quad \nu = 7,51850, \text{ ita vt ſit}$$
$$\alpha = \mu \pm \nu\sqrt{-1} = 4,0980836 \pm 7,51850.\sqrt{-1}.$$

25. Inuentis ergo huiusmodi valoribus imaginariis pro α, vt ſit $2^\alpha = 2\alpha$, talis forma pro y fingi debet

$$y = A\omega^\alpha - B\omega^{\alpha+2} + C\omega^{\alpha+4} - D\omega^{\alpha+6} + \text{etc.}$$

vnde fit

$$Y = 2\alpha A\omega^\alpha - 2^3\alpha B\omega^{\alpha+2} + 2^5\alpha C\omega^{\alpha+4} - 2^7\alpha D\omega^{\alpha+6} + \text{etc.}$$

quae

quae ſeries ipſi

$$\frac{2\,dy}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega = \frac{dy}{d\omega}\left(2\,\omega - \frac{2}{1.2.3}\,\omega^3 + \frac{2}{1\ldots 5}\,\omega^5 - \text{etc.}\right)$$

aequalis eſt ſtatuenda, ſcilicet huic expreſſioni

$$\begin{array}{l} 2\,\alpha A\omega^{\alpha} - 2(\alpha+2)B\omega^{\alpha+2} + 2(\alpha+4)C\omega^{\alpha+4} - \text{etc.} \\ \qquad - \frac{2\,\alpha A}{1.2.3} \qquad\qquad\qquad + \frac{2(\alpha+2)B}{1.2.3} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{2\,\alpha A}{1\ldots 5} \end{array}$$

vnde ſequentes determinationes colliguntur:

$$2^2\alpha B = (\alpha+2)B + \frac{\alpha A}{1.2.3}$$

$$2^4\alpha C = (\alpha+4)C + \frac{(\alpha+2)B}{1.2.3} + \frac{\alpha A}{1\ldots 5}$$

$$2^6\alpha D = (\alpha+6)D + \frac{(\alpha+4)C}{1.2.3} + \frac{(\alpha+2)B}{1.2\ldots 5} + \frac{\alpha A}{1\ldots 7}$$

etc.

26. Hinc ergo ſine dubio coefficientes B, C, D etc. definire licet, at ne vllum dubium ſuperſit, an hoc modo pro y valores reales obtineri queant, notandum eſt binos valores idoneos pro y inuentos ſemper inter ſe coniungi poſſe. Hoc obſeruato ponamus ex valore $\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1}$ prodiiſſe $y = P$, ex valore autem $\alpha = \mu - \nu\sqrt{-1}$ fieri $y = Q$, quae binae expreſſiones vtcunque fuerint imaginariae certum eſt ex iis realem huiusmodi $y = mP + nQ$ conflari poſſe, idque duplici modo. Atque ex forma aſſumta quidem $\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1}$ ſeries pro y ita erunt comparatae:

$y = \omega^{\mu}\,\text{coſ.}(\nu l\omega).(A + B\omega^2 + C\omega^4 + D\omega^6 + \text{etc.})$ vel

$y = \omega^{\mu}\,\text{ſin.}(\nu l\omega).(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\omega^2 + \mathfrak{C}\omega^4 + \mathfrak{D}\omega^6 + \text{etc.})$

 quarum

quarum ſumma vel differentia itidem praebet valorem ſatisfacientem pro y. Euidens autem eſt hos valores minime in ſeries ſecundum poteſtates ſimplices ipſius ω progredientes conuerti poſſe. Huiusmodi autem formae ſtatim ab initio pro y fingi poſſunt; vbi cum in Y contineatur coſ. $(\nu l 2 \omega)$ notandum eſt eſſe:

$$\text{coſ.}(\nu l 2 \omega) = \text{coſ.}(\nu l \omega).\ \text{coſ.}(\nu l 2) - \text{ſin.}(\nu l \omega).\ \text{ſin.}(\nu l 2).$$

27. Ne autem hunc calculum nimis moleſtum quo infinitae aliae problematis ſolutiones declarari videntur ſuſcipiam idem ex relatione inter radios oſculi euolutae curuae quaeſitae facilius oſtendi poſſe videtur. Cum enim §. 12. inuenerimus

$$4 R' = 3 r' \text{coſ.}\omega + \frac{d r'}{d \omega} \text{ſin.}\omega ,$$ ſi fingamus:

$$r' = A \omega^n + B \omega^{n+2} + C \omega^{n+4} + \text{etc.}$$ vt ſit

$$R' = 2^n A \omega^n + 2^{n+2} B \omega^{n+2} + 2^{n+4} C \omega^{n+4} + \text{etc.}$$

pro poteſtate infima ω^n debet eſſe

$$4 . 2^n A = 3 A + n A \quad \text{ſeu} \quad 4 . 2^n = 3 + n = 2^{n+2}$$

cui conditioni duplici modo ſatisfit, altero $n = -2$, altero $n = -1$. Statuamus ergo

$$r' = \frac{A}{\omega} + B \omega + C \omega^3 + D \omega^5 + \text{etc.}$$ erit

$$\frac{d r'}{d \omega} = \frac{-A}{\omega^2} + B + 3 C \omega^2 + 5 D \omega^4 + \text{etc.}$$

$$R' = \frac{A}{2 \omega} + 2 B \omega + 8 C \omega^3 + 32 D \omega^5 + \text{etc.}$$

vnde

vnde colligitur eſſe debere:

$$\frac{2A}{\omega} + 8B\omega + 32C\omega^3 + 128D\omega^5 + \text{etc.} =$$

$$\begin{array}{llll}
\hline
3A & +3B & +3C & +3D \\
 & -\frac{3A}{1.2} & -\frac{3B}{1.2} & -\frac{3C}{1.2} \\
 & & +\frac{3A}{1\ldots4} & +\frac{3B}{1\ldots4} \\
 & & & -\frac{3A}{1\ldots6} \\
-A & +B & -3C & +5D \\
 & +\frac{A}{1\ldots3} & -\frac{B}{1\ldots3} & -\frac{3C}{1\ldots3} \\
 & & -\frac{A}{1\ldots5} & +\frac{B}{1\ldots5} \\
 & & & +\frac{A}{1\ldots7}
\end{array}$$

hincque eiusmodi eruuntur valores, qui vtique ſolutionem realem praebere videntur. Interim tamen deſideratur adhuc methodus hoc problema perfectius reſoluendi

---

CONSI-

CONSIDERATIONES CYCLOMETRICAE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Lunularum quadrabilium conſtructio ab inuentione binorum angulorum pendet, qui inter ſe rationem duplicatam ſinuum teneant, binos ſcilicet eiusmodi angulos m et n inueſtigari oportet, vt ſit

$$m : n = \text{ſin.}\, m^2 : \text{ſin.}\, n^2 \text{ ſeu } \frac{m}{\text{ſin.}\, m^2} = \frac{n}{\text{ſin.}\, n^2}$$

quam aequalitatem hic accuratius perpendere conſtitui.

2. Dato autem angulo quocunque m valorem expreſſionis inde natae $\frac{m}{\text{ſin.}\, m^2}$ haud difficulter aſſignare licet, idque duplici modo vel in gradibus, ſi angulus m ita detur, vel in partibus radii $= 1$, ſi arcus angulum metiens in partibus radii exprimatur facile autem altera expreſſio ad alteram reducitur.

3. De hac autem expreſſione $\frac{m}{\text{ſin.}\, m^2}$ obſeruo, eam primo, ſi angulus m euaneſcat, euadere infinitam, tum vero diminui ad certum vsque terminum, quo ſuperato denuo augetur ſiquidem angulo m ad duos rectos aucto ob ſin. $m = 0$, iterum fit infinita. Quod quo clarius appareat, ſit r nota anguli recti, et quia

$$\text{ſin.}\, \tfrac{1}{3} r = \tfrac{1}{2};\ \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} r = \tfrac{1}{\sqrt{2}};\ \text{ſin.}\, \tfrac{2}{3} r = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ et ſin.}\, r = 1$$

ſi fue-

ſi fuerit

$$m = 0r;\ \tfrac{1}{3}r;\ \tfrac{1}{2}r;\ \tfrac{2}{3}r;\ r;\ \tfrac{4}{3}r;\ \tfrac{3}{2}r;\ \tfrac{5}{3}r;\ 2r$$

erit

$$\frac{m}{\text{ſin.}\, m^2} = \infty r;\ \tfrac{4}{3}r;\ r;\ \tfrac{8}{9}r;\ r;\ \tfrac{16}{9}r;\ 3r;\ \tfrac{20}{3}r;\ \infty r.$$

4. Antequam igitur angulus m nonaginta gradus attingit formula $\frac{m}{\text{ſin.}\, m^2}$ fit minima; colligitur autem hoc euenire vbi ſit $m = \frac{1}{2}$ tang. m, ſeu arcus angulum metiens aequalis ſemiſſi tangentis. Hunc angulum nonniſi proxime aſſignare licet, qui calculo inſtituto reperitur $= 66°, 46', 54\frac{1}{4}''$ vnde prodit valor omnium minimus $\frac{m}{\text{ſin.}\, m^2} = 79, 07102$ grad.

5. Hunc angulum tam inſigni proprietate praeditum littera a denotabo, ita vt ſit $a = 66°, 46', 54\frac{1}{4}''$ in gradibus, in partibus radii autem $a = 1,165561$, vbi obſeruare licet hunc angulum neque ad peripheriam neque ad radium rationem commenſurabilem tenere, ſed vtriusque reſpectu pro tranſcendente eſſe habendum.

6. Interim tamen iuuabit praecipuas affectiones huius anguli perpendiſſe reperitur autem:

ſin. $a = 0,9190096$; coſ. $a = 0,3942360$; tang. $a = 2,331122$

tum vero

ſin. $2a = 0,7246132$ et coſec. $2a = 1,380050$

duplum angulum ideo conſidero, quia ob $a = \frac{1}{2}$ tang. a, fit formula noſtra $\frac{a}{\text{ſin.}\, a^2} = \frac{1}{\text{ſin.}\, 2a} =$ coſec. $2a$, ita vt $1,380050$ ſit valor minimus quem formula $\frac{m}{\text{ſin.}\, m^2}$

 aſſe-

aſſequi poteſt. Idem autem in gradibus expreſſus dat vt ante $79°, 07102$.

7. Vt ergo bini anguli m et n rationem teneant duplicatam ſinuum, ſeu vt ſit $\frac{m}{ſin. m^2} = \frac{n}{ſin. n^2}$, neceſſe eſt alterum eorum m infra a, alterum vero n ſupra a exiſtere, et quo magis angulus m infra a deprimitur, eo magis alter n ſuperabit, neque tamen ſimili ratione, cum ſumto $m = 0$, fiat $n = 180°$, neque vero angulus a in horum terminorum medium incidit.

8. Si igitur angulus m ſit minimus, ponatur $m = \mu$ in partibus radii, et denotante π ſemicircumferentiam ſeu menſuram duorum rectorum, angulus n quam minime a π deficiet, ſtatuatur ergo $n = \pi - \nu$, eritque

$\mu\, ſin.\, r^2 = (\pi - \nu)\, ſin.\, \mu^2$ ſeu $\mu (1 - coſ.\, 2\nu) = (\pi - \nu)(1 - coſ.\, 2\mu)$

Iam vero eſt

$$1 - coſ.\, \phi = \tfrac{1}{2}\phi^2 - \tfrac{1}{24}\phi^4 + \tfrac{1}{720}\phi^6 - etc.$$

Ergo

$$\mu (2\nu\nu - \tfrac{2}{3}\nu^4 + \tfrac{4}{45}\nu^6) = (\pi - \nu)(2\mu\mu - \tfrac{2}{3}\mu^4 + \tfrac{4}{45}\mu^6)$$

vnde colligitur proxime

$$\nu = \sqrt{\pi\mu} - \tfrac{1}{2}\mu + \frac{3 + 4\pi\pi}{24\sqrt{\pi}}\mu\mu.$$

9 Sin autem angulus m ſit parumper minor angulo a, alter n parumper erit maior. Satuatur ergo $m = a - \mu$ et $n = a + \nu$; atque formula $\frac{m}{ſin. m^2}$ abit in

$$\frac{2(a - \mu)}{1 - coſ.\, 2(a - \mu)} = \frac{2(a - \mu)}{1 - coſ.\, 2a\, coſ.\, 2\mu - ſin.\, 2a\, ſin.\, 2\mu.}$$

quae

quae ob angulum μ minimum in talem ſeriem euoluatur:

$$A - B\mu + C\mu^2 - D\mu^3 + E\mu^4 - \text{etc.}$$

vbi litterae A, B, C, D etc. hoc modo definiuntur

$$A\,\text{ſin.}\,a^2 - a = 0 \quad \text{hinc} \quad A = \frac{a}{\text{ſin.}\,a^2} = \frac{1}{\text{ſin.}\,2a}$$

$$B\,\text{ſin.}\,a^2 + A\,\text{ſin.}\,2a - 1 = 0 \quad \text{hinc} \quad B = 0 \quad \text{ob} \quad A = \frac{1}{\text{ſin.}\,2a}$$

$$C\,\text{ſin.}\,a^2 + B\,\text{ſin.}\,2a + A\,\text{coſ.}\,2a = 0$$

$$D\,\text{ſin.}\,a^2 + C\,\text{ſin.}\,2a + B\,\text{coſ.}\,2a - \tfrac{2}{3}A\,\text{ſin.}\,2a = 0$$

$$E\,\text{ſin.}\,a^2 + D\,\text{ſin.}\,2a + C\,\text{coſ.}\,2a - \tfrac{2}{3}B\,\text{ſin}\,2a - \tfrac{1}{3}A\,\text{coſ.}\,2a = 0$$

$$F\,\text{ſin.}\,a^2 + E\,\text{ſin.}\,2a + D\,\text{coſ.}\,2a - \tfrac{2}{3}C\,\text{ſin.}\,2a - \tfrac{1}{3}B\,\text{coſ.}\,2a + \tfrac{2}{15}A\,\text{ſin.}\,2a = 0$$

etc.

vbi coefficientes numerici continuo per fractiones $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$ etc. multiplicantur.

10. His litteris determinatis, erit

$$\frac{m}{\text{ſin.}\,m^2} = A - B\mu + C\mu^2 - D\mu^3 + F\mu^4 - F\mu^5 \text{ etc. et}$$

$$\frac{n}{\text{ſin.}\,n^2} = A + B\nu + C\nu^2 + D\nu^3 + E\nu^4 + F\nu^5 \text{ etc.}$$

quae ſeries cum inter ſe aequari debeant, ex dato angulo μ, alter ν ita definitur, vt quia $B = 0$ poſito

$$\nu = \mu + P\mu^2 + Q\mu^3 + R\mu^4 + S\mu^5 \text{ etc.}$$

ſit

$$P = \frac{-D}{C}; \quad Q = \frac{DD}{CC}; \quad R = \frac{-2D^3}{C^3} + \frac{2DE}{CC} - \frac{F}{C}$$

et

$$S = \frac{4D^4}{C^4} - \frac{6DDE}{C^3} + \frac{3DF}{CC}$$

X 2 Calculo

Calculo autem ſubducto reperitur

$A = 1,380050$; $C = 1,126090$; $P = 0,265937$
$B = 0$, $D = -0,299469$; $Q = 0,070722$.

11. At ſumto vtcunque angulo m, alter angulus n per cognitam appropinquandi methodum proxime ſaltem definiri poteſt; veluti ſi ſumatur $m = 60^\circ$, reperitur $n = 73^\circ, 41', 32'' \frac{22}{105}$ ac poſito $m = 30^\circ$, prodit $n = 108^\circ, 14', 30'' \frac{18}{100}$ tum vero ſi $n = 135^\circ$ fit $m = 12^\circ, 20', 54'' \frac{82}{100}$ ſin autem angulus m ita accipiatur, vt ſit tang. $m = \sqrt{2}$, ideoque $m = 54^\circ, 44', 8\frac{1}{5}''$, inuenitur $n = 79^\circ, 14', 23'' \frac{36}{105}$ nullo autem horum caſuum angulum alterum geometrice aſſignare licet.

12. Talis autem inueſtigatio ad lunularum quadrabilium conſtructionem nihil iuuat, cum neceſſe ſit, vt vterque angulus m et n geometrice aſſignari poſſit, quod euenit, ſi vtriusque ſinum vel tangentem geometrice exhibere licuerit. Magna ergo hinc exoritur quaeſtio, quomodo binos eiusmodi angulos m et n geometrice aſſignabiles inueſtigari oporteat vt fiat

$$\frac{m}{\text{ſin.}\, m^2} = \frac{n}{\text{ſin.}\, n^2}. \text{ ſeu } m(1 - \text{coſ.}\, 2n) = n(1 - \text{coſ.}\, 2m).$$

13. Ad hoc problema ſoluendum vulgo aſſumi ſolet, binos angulos m et n inter ſe commenſurabiles eſſe debere; nondum autem eſt demonſtratum nullo alio caſu ſolutionem obtineri non poſſe. Sinus certe horum angulorum rationem algebraicam tenere oportet, quia alioquin anguli geometrice aſſignari non

non poſſent, ex quo etiam ipſa angulorum ratio algebraice aſſignabilis eſſe debet; neque vero hinc conficitur, hanc rationem numeris integris contineri debere.

14. Infinitis certe modis anguli geometrice aſſignari poſſunt, qui inter ſe non ſint commenſurabiles, veluti anguli quorum ſinus ſunt $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$; num autem huiusmodi anguli non rationem quandam irrationalem tenere poſſint, neutiquam adhuc ſatis conſtat? Eximium autem foret inuentum ſi huiusmodi anguli quorum ratio eſſet exempli gratia vt $1 : \sqrt{2}$ geometrice exhiberi poſſent.

15. Quodſi inter angulos m et n ratio ſtatuatur $= 1 : \sqrt{2}$ reſolutio aequationis $\frac{m}{\textit{ſin.}\, m^2} = \frac{n}{\textit{ſin.}\, n^2}$ praebet hos valores.

$$m = 55^\circ, 28', 18'' \text{ et } n = 78^\circ, 27', 0''$$

qui autem anguli geometrice aſſignabiles non videntur. Cum autem hinc nihil concludi poſſit, methodum adhuc deeſſe cogimus fateri, cuius beneficio hoc problema per angulos etiam non commenſurabiles reſolui queat.

16. Videamus autem quot modis hos angulos inter ſe commenſurabiles ſtatuendo iſta quaeſtio per circulum et normam reſolui poſſit, ita vt problema pro plano haberi poſſit: Statuatur ergo $m = \frac{1}{2}\mu\,\omega$ et $n = \frac{1}{2}\nu\,\omega$, vt ſit $m : n = \mu : \nu$, fierique debet

$$\mu\,(1 - \text{coſ.}\, \nu\,\omega) = \nu\,(1 - \text{coſ.}\, \mu\,\omega).$$

 Sit

Sit coſ. $\omega = z$, ac notetur eſſe:

$$\begin{aligned}
\text{coſ. } 2\omega &= 2zz - 1 \\
\text{coſ. } 3\omega &= 4z^3 - 3z \\
\text{coſ. } 4\omega &= 8z^4 - 8zz + 1 \\
\text{coſ. } 5\omega &= 16z^5 - 20z^3 + 5z \\
\text{coſ. } 6\omega &= 32z^6 - 48z^4 + 18zz - 1
\end{aligned}$$

etc.

17. Hinc percurramus caſus praecipuos aequationis inuentae

$$\nu - \mu = \nu \text{ coſ. } \mu\omega - \mu \text{ coſ. } \nu\omega$$

I. $\mu = 1$ et $\nu = 2$ hinc $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \omega$ erit

$$1 = 2z - 2zz + 1, \text{ ſeu } zz - z = 0,$$

vnde per $z - 1$ diuidendo, id quod ſemper ſuccedit, fit $z = 0$; ideoque $\omega = 90°$, et $m = 45°$ et $n = 90°$, qui eſt caſus lunulae Hippocratis

II. $\mu = 1$, et $\nu = 3$, hinc $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$
Erit ergo $2 = 3z - 4z^3 + 3z$ ſeu

$$1 - 3z + 2z^3 = 0,$$

quae aequatio per $1 - z$ diuiſa dat

$$1 - 2z - 2zz = 0, \text{ hincque}$$

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} = \text{coſ. } \omega \text{ et coſ. } 2\omega = 1 - \sqrt{3};$$

problema planum.

III.

III. Sit $\mu = 2$ et $\nu = 3$ hinc $m = \omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$. Erit ergo $1 = 6zz - 3 - 8z^3 + 6z$ ſeu $4 - 6z - 6zz + 8z^3 = 0$ quae aequatio per $2(1-z)$ diuiſa dat $2 - z - 4zz = 0$ vnde colligitur $z = -\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} = \cos.\omega$ et $\cos. 2\omega = \frac{1 - \sqrt{33}}{16}$: problema planum.

IV. Sit $\mu = 1$ et $\nu = 4$ hinc $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = 2\omega$ Erit ergo $3 = 4z - 8z^4 + 8zz - 1$ ſeu $1 - z - 2zz + 2z^4 = 0$ quae aequatio per $1 - z$ diuiſa dat

$$1 - 2zz - 2z^3 = 0$$ problema ſolidum.

V. Sit $\mu = 3$ et $\nu = 4$ hinc $m = \frac{3}{2}\omega$ et $n = 2\omega$. Erit ergo $1 = 16z^3 - 12z - 24z^4 + 24zz - 3$ ſeu

$$1 + 3z - 6zz - 4z^3 + 6z^4 = 0$$

quae per $1 - z$ diuiſa dat

$$1 + 4z - 2zz - 6z^3 = 0$$ problema ſolidum.

VI. Sit $\mu = 1$ et $\nu = 5$ hinc $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$. Erit ergo $4 = 5z - 16z^5 + 20z^3 - 5z$ ſeu

$$1 - 5z^3 + 4z^5 = 0$$

quae per $1 - z$ diuiſa praebet

$$1 + z + zz - 4z^3 - 4z^4 = 0$$

et in hanc formam transfunditur:

$$(2zz + z - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{5}{4} \text{ ſeu } 2zz + z - \tfrac{1}{2} = \tfrac{\sqrt{5}}{2}$$

hinc $z = -\frac{1 + \sqrt{(5 + 4\sqrt{5})}}{4} = \cos.\omega$ et $\cos. 2\omega = \frac{2\sqrt{5} - 1 - \sqrt{(5 + 4\sqrt{5})}}{4}$ ita vt hic prodeat problema planum.

VII.

VII. Sit $\mu = 2$ et $\nu = 5$ hinc $m = \omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$. Erit ergo $3 = 10zz - 5 - 32z^5 + 40z^3 - 10z$ ſeu

$4 + 5z - 5zz - 20z^3 + 16z^5 = 0$ et per $1 - z$ diuidendo

$4 + 9z + 4zz - 16z^3 - 16z^4 = 0$ problema ſolidum

VIII. Sit $\mu = 3$ et $\nu = 5$ hinc $m = \frac{3}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$. Ergo $2 = 20z^3 - 15z - 48z^5 + 60z^3 - 15z$ ſeu

$1 + 15z - 40z^3 + 24z^5 = 0$ et per $1 - z$ diuidendo

$1 + 16z + 16zz - 24z^3 - 24z^4 = 0$

quae reducitur ad hanc formam

$$(1 + 8z + 6zz)^2 = 60(z + zz)^2$$

vnde fit, $zz\sqrt{60} + z\sqrt{60} = 6zz + 8z + 1$ ideoque

$z = \frac{4 - \sqrt{15} + \sqrt{(25 - 6\sqrt{15})}}{2\sqrt{15} - 6}$ ſeu $\frac{1}{z} = -4 + \sqrt{15} + \sqrt{(25 - 6\sqrt{15})}$

vel $z = \frac{\sqrt{15} - 3 + \sqrt{(60 + 6\sqrt{15})}}{12} = \cos.\,\omega$ et $\cos.\,2\omega = \frac{1 + \sqrt{(25 - 6\sqrt{15})}}{6}$

ſicque etiam hoc caſu problema eſt planum.

IX. Sit $\mu = 4$ et $\nu = 5$ hinc $m = 2\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$. Ergo $1 = 40z^4 - 40zz + 5 - 64z^5 + 80z^3 - 20z$ ſeu

$1 - 5z - 10zz + 20z^3 + 10z^4 - 16z^5 = 0$ et per $1 - z$ diuidendo

$1 - 4z - 14zz + 6z^3 + 16z^4 = 0$

at haec aequatio nonniſi conſtructionem ſolidam admittit.

18. Quinque ergo caſus ſumus adepti, quibus ope circuli et normae lunulas quadrabiles exhibere, vel hanc aequationem $\frac{m}{\sin. m^2} = \frac{n}{\sin. n^2}$ conſtruere licet:

I.

I. Caſus $m = 45°$ et $n = 90°$

II. Caſus $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$ exiſtente

$\cos\omega = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ vel $\cos 2\omega = 1 - \sqrt{3}$

III. Caſus $m = \omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$ exiſtente

$\cos\omega = \frac{\sqrt{33}-1}{8}$ vel $\cos 2\omega = \frac{1-\sqrt{33}}{16}$

IV. Caſus $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$ exiſtente

$\cos\omega = \frac{\sqrt{(5+4\sqrt{5})}-1}{4}$

V. Caſus $m = \frac{3}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$ exiſtente

$\cos\omega = \frac{\sqrt{15}-3+\sqrt{(60+6\sqrt{15})}}{12}$ vel $\cos 2\omega = \frac{1+\sqrt{(25-6\sqrt{15})}}{6}$.

19. Pro aliis rationibus inter arcus m et n aſſumtis conſtructio lunularum ad altiores locos geometricos aſſurgit, neque vero minus pro geometrica eſt habenda. Vtrum autem praeter hos caſus nullae aliae lunulae geometrice aſſignari queant, nec ne? in dubio relinquendum videtur. Neque contra valeret argumentum afferri vulgo ſolitum, quod inde circuli quadratura conſequeretur, etiamſi et id, niſi quadratura indefinita ſpectetur, parum roboris habere videatur. Etſi enim ſatis conſtet rationem peripheriae ad diametrum per numeros rationales exprimi non poſſe, minus tamen adhuc perſpicitur, numeros etiam irrationales ad hunc ſcopum eſſe ineptos. Verum etiamſi eſſet euictum, hanc rationem ne ſurdis quidem numeris vllo modo exhiberi poſſe, tamen inde vix quicquam pro arcubus ad totam circumferentiam incommenſurabilibus concludere liceret. Veluti ſi quis arcum circuli ſinu ver-

bi gratia $= \frac{2}{3} = 0,6666666$ determinatum geometrice aſſignare docuerit, inde minime adhuc quantitas peripheriae colligi poſſet; ex quo huiusmodi rectificatio impoſſibilitati quadraturae circuli aduerſari haud videatur; niſi forte ad ipſam methodum, qua quis ad valorem arcus, cuius ſinus eſt $= \frac{2}{3}$ peruenerit, reſpiciamus, cum enim eidem ſinui innumeri arcus conueniant, ob legem continuitatis methodus ſimul omnes iſtos arcus complecti deberet, ideoque algebraica expreſſione contineri non poſſet; praeterquam quod differentia vel ſumma horum arcuum etiam integram peripheriam eſſet oſtenſura. Hac igitur ratione demum confirmata pronunciare licebit, nullius prorſus arcus circularis, geometrice aſſignabilis, quantitatem geometrice definiri poſſe.

DE

DE CRITERIIS INTEGRABILITATIS FORMVLARVM DIFFERENTIALIVM, DISSERTATIO SECVNDA.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

In iis quae criteriis integrabilitatis, Tomo praecedenti horum Commentariorum perſcripſi, haud immerito deſiderari videtur, quod doctrina a me tunc expoſita, exemplis quibusdam illuſtretur, quorum ſcilicet vſus huiusmodi in re inſignis eſſe ſolet, ad ipſum argumentum non modo illuſtrandum, verum etiam confirmandum et ſtabiliendum. Et tunc temporis quidem, quamuis in animo haberem aliqua huiusmodi proponere exempla, a propoſito tamen deſiſtere coactus fui, ne in nimiam excreſceret molem diſſertatio ſupra commemorata; hac igitur occaſione, quod tum intermiſſum fuit, doctrinam ſcilicet traditam ſelectis quibusdam exemplis illuſtrare, leuiter adumbrare conſtitui, vbi tamen quaedam praemittere e re eſſe iudicaui, quibus ea, quae antea a me expoſita ſunt magis plana et perſpicua reddi poterunt.

2. Quod itaque *primum* demonſtrationem inſignis *Theorematis Euleriani* § 7. et ſeqq. diſſert. prioris allatam attinet, ingenue fateor eam adeo mihi non ſatisfeciſſe, ne aliqui adhuc in animo remanerent dubitationis ſcrupuli. Quum autem poſtmodum viam detexerim, qua hanc demonſtrationem ad ſummum certitudinis et euidentiae rigorem perducere mihi licuit, nonnulla ea de re monuiſſe haud pigebit.

Ex iis quae antea demonſtrata ſunt, ſequitur eſſe:

$$\mu = \int M\,dx;\ \nu = \int N\,dx;\ \pi = \int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx;\ \varkappa = \int Q\,dx; \\ - \int^{(2)} P\,dx + \int^{(3)} N\,dx \text{ etc.}$$

vnde deducitur

$$d\mu = M\,dx = dx\left(\frac{d\mu}{dx}\right) + dy\left(\frac{d\mu}{dy}\right) + dp\left(\frac{d\mu}{dp}\right) + dq\left(\frac{d\mu}{dq}\right) \ldots\ldots dt\left(\frac{d\mu}{dt}\right)$$

hincque

$$M = \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\mu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\mu}{dp}\right) + r\left(\frac{d\mu}{dq}\right) \ldots\ldots + u\left(\frac{d\mu}{dt}\right).$$

Simili ratione oſtenditur fore

$$N = \left(\frac{d\nu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + r\left(\frac{d\nu}{dq}\right) \ldots\ldots + u\left(\frac{d\nu}{dt}\right)$$

$$P = \left(\frac{d\pi}{dx}\right) + p\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + r\left(\frac{d\pi}{dq}\right) \ldots\ldots + u\left(\frac{d\pi}{dt}\right) + \nu$$

$$Q = \left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) + p\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) + q\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dq}\right) \ldots\ldots + u\left(\frac{d\varkappa}{dt}\right) + \pi$$

etc.

Atqui §. 7. Diſſert. 1. inuenimus

$$M = \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dx}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) \ldots\ldots + u\left(\frac{d\tau}{dx}\right)$$

$$N = \left(\frac{d\mu}{dy}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) \ldots\ldots + u\left(\frac{d\tau}{dy}\right)$$

etc.

Si

Si igitur hi valores ipſorum M, N, P etc. ita inter ſe comparentur, vt ſinguli termini ſingulis aequentur, inde ſequentes facile deducentur aequalitates:

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right)=\left(\frac{d\nu}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dp}\right)=\left(\frac{d\pi}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dq}\right)=\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right)\ldots\left(\frac{d\mu}{dt}\right)=\left(\frac{d\tau}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right)=\left(\frac{d\pi}{dy}\right);\ \left(\frac{d\nu}{dq}\right)=\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right)\ldots\left(\frac{d\nu}{dt}\right)=\left(\frac{d\tau}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d\pi}{dq}\right)=\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right)\ldots\left(\frac{d\pi}{dt}\right)=\left(\frac{d\tau}{dp}\right)\text{ etc.},$$

in quibus ipſum criterium integrabilitatis reſidere antea obſeruatum eſt. Verum quum excipere liceret ex aequalitate binorum valorum ex: gr. ipſius M non ſtatim ſequi in vtraque expreſſione ſingulos terminos, qui iisdem litteris p, q, r etc. afficiuntur, inter ſe eſſe aequandos, iam aliam adiiciamus demonſtrandi rationem huic obiectioni non obnoxiam.

3. Quum enim ſit:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right)=\left(\frac{dd\mu}{dxdy}\right)+p\left(\frac{dd\mu}{dydy}\right)+q\left(\frac{dd\mu}{dydp}\right)+r\left(\frac{dd\mu}{dydq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\mu}{dydt}\right)$$

$$\left(\frac{dM}{dp}\right)=\left(\frac{dd\mu}{dxdp}\right)+p\left(\frac{dd\mu}{dydp}\right)+q\left(\frac{dd\mu}{dpdp}\right)+r\left(\frac{dd\mu}{dpdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\mu}{dpdt}\right)+\left(\frac{d\mu}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{dM}{dq}\right)=\left(\frac{dd\mu}{dxdq}\right)+p\left(\frac{dd\mu}{dydq}\right)+q\left(\frac{dd\mu}{dpdq}\right)+r\left(\frac{dd\mu}{dqdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\mu}{dqdt}\right)+\left(\frac{d\mu}{dp}\right)\text{ etc.}$$

tum vero

$$\left(\frac{dN}{dx}\right)=\left(\frac{dd\nu}{dxdx}\right)+p\left(\frac{dd\nu}{dxdy}\right)+q\left(\frac{dd\nu}{dxdp}\right)+r\left(\frac{dd\nu}{dxdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\nu}{dxdt}\right)$$

$$\left(\frac{dN}{dp}\right)=\left(\frac{dd\nu}{dxdp}\right)+p\left(\frac{dd\nu}{dydp}\right)+q\left(\frac{dd\nu}{dpdp}\right)+r\left(\frac{dd\nu}{dpdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\nu}{dpdt}\right)+\left(\frac{d\nu}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{dN}{dq}\right)=\left(\frac{dd\nu}{dxdq}\right)+p\left(\frac{dd\nu}{dydq}\right)+q\left(\frac{dd\nu}{dpdq}\right)+r\left(\frac{dd\nu}{dqdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\nu}{dqdt}\right)+\left(\frac{d\nu}{dp}\right)\text{ etc.}$$

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)=\left(\frac{dd\pi}{dxdx}\right)+p\left(\frac{dd\pi}{dxdy}\right)+q\left(\frac{dd\pi}{dxdp}\right)+r\left(\frac{dd\pi}{dxdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\pi}{dxdt}\right)+\left(\frac{d\nu}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dd\pi}{dxdy}\right)+p\left(\frac{dd\pi}{dydy}\right)+q\left(\frac{dd\pi}{dydp}\right)+r\left(\frac{dd\pi}{dpdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\pi}{dydt}\right)+\left(\frac{d\nu}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{dP}{dq}\right)=\left(\frac{dd\pi}{dxdq}\right)+p\left(\frac{dd\pi}{dydq}\right)+q\left(\frac{dd\pi}{dpdq}\right)+r\left(\frac{dd\pi}{dqdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\pi}{dqdt}\right)+\left(\frac{d\nu}{dq}\right)+\left(\frac{d\pi}{dp}\right)$$

etc. etc.

 prae-

praeterea autem habeatur

$$d.\left(\frac{d\mu}{dy}\right)=dx\left(\frac{dd\mu}{dx\,dy}\right)+dy\left(\frac{dd\mu}{dy\,dy}\right)+dp\left(\frac{dd\mu}{dy\,dp}\right)\ldots\ldots+dt\left(\frac{dd\mu}{dy\,dt}\right)$$

$$d.\left(\frac{d\mu}{dp}\right)=dx\left(\frac{dd\mu}{dx\,dp}\right)+dy\left(\frac{dd\mu}{dy\,dp}\right)+dp\left(\frac{dd\mu}{dp\,dp}\right)\ldots\ldots+dt\left(\frac{dd\mu}{dp\,dt}\right)$$

$$d.\left(\frac{d\mu}{dq}\right)=dx\left(\frac{dd\mu}{dx\,dq}\right)+dy\left(\frac{dd\mu}{dy\,dq}\right)+dp\left(\frac{dd\mu}{dp\,dq}\right)\ldots\ldots+dt\left(\frac{dd\mu}{dq\,dt}\right) \text{ etc.}$$

fiet neceſſum eſt

$$d.\left(\frac{d\mu}{dy}\right)=dx\left(\frac{dM}{dy}\right), \text{ ſeu } \left(\frac{d\mu}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dy}\right)$$

$$d.\left(\frac{d\mu}{dp}\right)=dx\left(\frac{dM}{dp}\right)-dx\left(\frac{d\mu}{dy}\right), \text{ vnde } \left(\frac{d\mu}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dp}\right)-\int dx\left(\frac{d\mu}{dy}\right)$$

$$d.\left(\frac{d\mu}{dq}\right)=dx\left(\frac{dM}{dq}\right)-dx\left(\frac{d\mu}{dp}\right), \text{ hinc } \left(\frac{d\mu}{dq}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dq}\right)-\int dx\left(\frac{d\mu}{dp}\right).$$

Porro ex valoribus ipſorum

$$\left(\frac{dN}{dx}\right);\ \left(\frac{dN}{dp}\right) \text{ etc. } \left(\frac{dP}{dx}\right);\ \left(\frac{dP}{dy}\right) \text{ etc.}$$

ſupra allatis, ſequentes deducere licet aequationes:

$$\left(\frac{d\nu}{dx}\right)=\int dx\left(\frac{dN}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dN}{dp}\right)-\int dx\left(\frac{d\nu}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d\nu}{dq}\right)=\int dx\left(\frac{dN}{dq}\right)-\int dx\left(\frac{d\nu}{dp}\right) \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{d\pi}{dx}\right)=\int dx\left(\frac{dP}{dx}\right)-\int dx\left(\frac{d\nu}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d\pi}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)-\int dx\left(\frac{d\nu}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d\pi}{dq}\right)=\int dx\left(\frac{dP}{dq}\right)-\int dx\left(\frac{d\nu}{dq}\right)-\int dx\left(\frac{d\pi}{dp}\right) \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right)=\int dx\left(\frac{dQ}{dx}\right)-\int dx\left(\frac{d\pi}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dQ}{dy}\right)-\int dx\left(\frac{d\pi}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dQ}{dp}\right)-\int dx\left(\frac{d\pi}{dp}\right)-\int dx\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) \text{ etc.}$$

4. Ob integrabilitatem vero formulae:

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq \ldots + U\,du$$

quum eſſe debeat

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right);\ \left(\frac{dM}{dp}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right) \text{ etc.};$$

$$\left(\frac{dN}{dp}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right);\ \left(\frac{dN}{dq}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right) \text{ etc. etc.}$$

liquet omnino eſſe

$$\int dx \left(\frac{dM}{dy}\right) = \int dx \left(\frac{dN}{dx}\right), \text{ ideoque } \left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \left(\frac{d\nu}{dx}\right).$$

Simili modo ob

$$\int dx \left(\frac{dM}{dp}\right) = \int dx \left(\frac{dP}{dx}\right), \text{ nec non } \int dx \left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \int dx \left(\frac{d\nu}{dx}\right), \text{ erit}$$

$$\left(\frac{d\mu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dx}\right), \text{ tum vero ob } \int dx \left(\frac{d\mu}{dp}\right) = \int dx \left(\frac{d\pi}{dx}\right),$$

$$\text{fiet } \left(\frac{d\mu}{dq}\right) = \left(\frac{d\chi}{dx}\right) \text{ etc.}$$

Porro quoniam eſt

$$\left(\frac{dN}{dp}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right);\ \left(\frac{dN}{dq}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right) \text{ etc. habebitur}$$

$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \int dx \left(\frac{dN}{dp}\right) - \int dx \left(\frac{d\nu}{dy}\right) = \int dx \left(\frac{dP}{dy}\right) - \int dx \left(\frac{d\nu}{dy}\right) = \left(\frac{d\pi}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d\nu}{dq}\right) = \int dx \left(\frac{dN}{dq}\right) - \int dx \left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \int dx \left(\frac{dQ}{dy}\right) - \int dx \left(\frac{d\pi}{dy}\right) = \left(\frac{d\chi}{dy}\right) \text{ etc.}$$

Denique ob $\left(\frac{dP}{dq}\right) = \left(\frac{dQ}{dp}\right)$ etc.

$$\left(\frac{d\pi}{dq}\right) = \int dx \left(\frac{dP}{dq}\right) - \int dx \left(\frac{d\nu}{dq}\right) - \int dx \left(\frac{d\pi}{dp}\right) = \int dx \left(\frac{dQ}{dp}\right) - \int dx \left(\frac{d\chi}{dy}\right)$$

$$- \int dx \left(\frac{d\pi}{dp}\right) = \left(\frac{d\chi}{dp}\right) \text{ etc.}$$

Ex his igitur iam euidenter patet id, quod nobis demonſtrandum propoſuimus, eſſe nimirum

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \left(\frac{d\nu}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dx}\right) \ldots \left(\frac{d\mu}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dy}\right);\ \left(\frac{d\nu}{dq}\right) = \left(\frac{d\chi}{dy}\right) \ldots \left(\frac{d\nu}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d\pi}{dq}\right) = \left(\frac{d\chi}{dp}\right);\ \ldots\ldots \left(\frac{d\pi}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dp}\right) \text{ etc. etc.}$$

Perſpi-

Perſpicuum autem eſt, dum de aequalitate formularum

$$\left(\frac{dM}{dy}\right),\ \left(\frac{dN}{dx}\right) \text{ vel } \left(\frac{dM}{dp}\right),\ \left(\frac{dP}{dx}\right) \text{ etc.}$$

ſermo fit, intelligendum eſſe has formulas fieri non ſolum aequales, ſed plane identicas, ex quo omnino quoque ſequitur formulas

$$\int dx\left(\frac{dM}{dy}\right),\ \int dx\left(\frac{dN}{dx}\right)$$

eſſe debere identicas, ideoque nec opus fore, vt vlla conſtans poſt integrationem introducatur. Quod vero valores ipſorum

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right),\ \left(\frac{d\mu}{dp}\right) \text{ etc.},\ \left(\frac{d\nu}{dx}\right),\ \left(\frac{d\nu}{dp}\right) \text{ etc.}$$

§. 8. Differt. I. allatos attinet, ex iis quae iam monuimus, euidenter comprobari poteſt eos rite ſe habere. Hoc cum pro ſingulis ſeorſim demonſtrare ſuperfluum foret, vno alteroue exemplo oſtendiſſe ſufficiat. Quum igitur ſit

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dy}\right) \text{ et } \left(\frac{dM}{dy}\right)=\left(\frac{dd\mu}{dxdy}\right)+p\left(\frac{dd\nu}{dxdy}\right)+q\left(\frac{dd\pi}{dxdy}\right)$$
$$+r\left(\frac{dd\varkappa}{dxdy}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\tau}{dxdy}\right)$$

conf: §. 7. Differt: I., erit

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dd\mu}{dxdy}\right)+\int dy\left(\frac{dd\nu}{dxdy}\right)+\int dp\left(\frac{dd\pi}{dxdy}\right)+\int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dxdy}\right)\ldots$$
$$+\int dt\left(\frac{dd\tau}{dxdy}\right).$$

Eodem modo ob

$$\left(\frac{d\mu}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dp}\right)-\int dx\left(\frac{d\mu}{dy}\right)$$

atque

$$\left(\frac{dM}{dp}\right)=\left(\frac{dd\mu}{dxdp}\right)+p\left(\frac{dd\nu}{dxdp}\right)+q\left(\frac{dd\pi}{dxdp}\right)+r\left(\frac{dd\varkappa}{dxdp}\right)\ldots\ldots$$
$$+u\left(\frac{dd\tau}{dxdp}\right)+\left(\frac{d\nu}{dx}\right)$$

fit

fit

$$\left(\frac{d\mu}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{d\,d\mu}{dx\,dp}\right)+\int dy\left(\frac{d\,d\nu}{dx\,dp}\right)+\int dp\left(\frac{d\,d\pi}{dx\,dp}\right)+\int dq\left(\frac{d\,d\chi}{dx\,dp}\right)\ldots$$
$$+\int dt\left(\frac{d\,d\tau}{dx\,dp}\right)+\int dx\left(\frac{d\nu}{dx}\right)-\int dx\left(\frac{d\mu}{dy}\right)$$

quum igitur bini vltimi termini ob $\frac{d\nu}{dx})=(\frac{d\mu}{dy})$ ſe inuicem deſtruant, prodibit valor ipſius $(\frac{d\mu}{dp})$ talis, qualem antea §. 8. exhibuimus.

5. Valorum ipſius

$$\left(\frac{d\mu}{dx}\right),\ \left(\frac{d\mu}{dy}\right)\text{ etc. }\left(\frac{d\nu}{dx}\right),\ \left(\frac{d\nu}{dy}\right)\text{ etc.}$$

ſupra inuentorum egregiae transformationes atque omnino notatu dignae hinc eliciuntur ſequentes:

$$\left(\frac{d\mu}{dx}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\mu}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dp}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dM}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\mu}{dq}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dq}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dM}{dp}\right)+\int^{(3)}dx\left(\frac{dM}{dy}\right)\text{ etc.}$$
$$\left(\frac{d\nu}{dx}\right)=\int dx\left(\frac{dN}{dx}\right);\ \left(\frac{d\nu}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dN}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dN}{dp}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dN}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\nu}{dq}\right)=\int dx\left(\frac{dN}{dq}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dN}{dp}\right)+\int^{(3)}dx\left(\frac{dN}{dy}\right)\text{ etc.}$$
$$\left(\frac{d\pi}{dx}\right)=\int dx\left(\frac{dP}{dx}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dN}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{d\pi}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dN}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\pi}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dP}{dp}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$$
$$-\int^{(2)}dx\left(\frac{dN}{dp}\right)+2\int^{(3)}dx\left(\frac{dN}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\pi}{dq}\right)=\int dx\left(\frac{dP}{dq}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dP}{dp}\right)+\int^{(3)}dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$$
$$-\int^{(2)}dx\left(\frac{dN}{dq}\right)+2\int^{(3)}dx\left(\frac{dN}{dp}\right)-3\int^{(4)}dx\left(\frac{dN}{dy}\right)\text{ etc.}$$

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) = \int dx\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \int^{(2)} dx\left(\frac{dP}{dx}\right) + \int^{(3)} dx\left(\frac{dN}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{dX}{dy}\right) = \int dx\left(\frac{dQ}{dy}\right) - \int^{(2)} dx\left(\frac{dP}{dy}\right) + \int^{(3)} dx\left(\frac{dN}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{dX}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{dQ}{dp}\right) - \int^{(2)} dx\left(\frac{dQ}{dy}\right)$$
$$- \int^{(2)} dx\left(\frac{dP}{dp}\right) + 2\int^{(3)} dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$$
$$+ \int^{(3)} dx\left(\frac{dN}{dp}\right) - 3\int^{(4)} dx\left(\frac{dN}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{dX}{dq}\right) = \int dx\left(\frac{dQ}{dq}\right) - \int^{(2)} dx\left(\frac{dQ}{dp}\right) + \int^{(3)} dx\left(\frac{dQ}{dy}\right)$$
$$- \int^{(2)} dx\left(\frac{dP}{dq}\right) + 2\int^{(3)} dx\left(\frac{dP}{dp}\right) - 3\int^{(4)} dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$$
$$+ \int^{(3)} dx\left(\frac{dN}{dq}\right) - 3\int^{(4)} dx\left(\frac{dN}{dp}\right) + 6\int^{(5)} dx\left(\frac{dN}{dy}\right)$$

etc. etc.

vbi quum progreſſionis lex iam ſit manifeſta, plures terminos accumulare inutile ducimus.

6. Quemadmodum § 10 prioris diſſertationis oſtendi, ad integrabilitatem formulae $V dx$, poſito

$$dV = M dx + N dy + P dp \ldots\ldots + U du$$

requiri, vt ſequentes formulae integrationem admittant

$$dx(Nx + P)$$
$$dx(Nx^2 + 2Px + 2Q)$$
$$dx(Nx^3 + 3Px^2 + 3\cdot 2(Qx + R))$$
$$\vdots$$
$$dx(Nx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} + (m-1)(m-2)Qx^{m-3} \ldots\ldots$$
$$+ ((m-1)(m-2)\ldots\ldots 1)(Sx + T))$$

ita nunc formulae quoque exhiberi poſſunt, ad quarum integrabilitatem reduci cenſenda eſt integrabilitas formu-

formulae $dx\int V dx$, pro qua valor ipſius dV idem eſt, quem modo attulimus. Primum enim quia $dx\int V dx$ integrationem admittere non poſſit, niſi Vdx ſit integrabile, perſpicuum eſt omnium primo requiri, vt formulae modo allatae integrabiles ſint, iis tamen requiſitis non omnia expleri quae pro integranda formula $dx\int V dx$ requiruntur. At vero quum § 11. Diſſert. I. demonſtratum ſit, poſterius criterium, ex quo de integrabilitate formulae noſtrae iudicium peti debet, hac aequatione contineri

$$P - \frac{2\,dQ}{dx} + \frac{3\,ddR}{dx^2} - \frac{4\,d^3S}{dx^3} \ldots\ldots \mp \frac{m.\,d^{m-1}U}{dx^{m-1}} = 0$$

nunc quidem plures hinc deriuare licet formulas, quas integrabiles eſſe oportet. Praeterquam enim quod iam euidens ſit, ipſam formulam $P\,dx$ per ſe eſſe integrabilem, nec non $dx(Px + 2Q)$ integrationem admittere, omnino quoque patet his formulis:

$$dx(3R - 2\int Q\,dx + \int^{(2)} P\,dx)$$
$$dx(4S - 3\int R\,dx + 2\int^{(2)} Q\,dx - \int^{(3)} P\,dx) \text{ etc.}$$

certa competere integralia. Si vero nunc valores integrales euoluantur, quemadmodum § 10 Diſſert. I. docuimus, inde has obtinebimus formulas:

$$dx(Px + 2Q)$$
$$dx(Px^2 + 2.\,2.\,Qx + 3.\,2R)$$
$$dx(Px^3 + 2.\,3\,Qx^2 + 3.\,3.\,2\,Rx + 4.\,3.\,2S)$$
$$\vdots$$
$$dx(Px^{m-2} + 2(m-2)Qx^{m-3} + 3(m-2)(m-3)Rx^{m-4} + 4(m-2)(m-3)(m-4)Sx^{m-5} + \text{etc.})$$

 quibus

quibus omnibus, ſua aſſignari poterunt integralia. Si iam vlterius progrediendo ſimiles formulas exquirere velimus pro integrabilitate ipſius $dx\int^{(2)} V dx$, ſequentes adipiſcemur

$$dx(Qx + 3R)$$
$$dx(Qx^2 + 3.2Rx + 6.2S)$$
$$dx(Qx^3 + 3.3Rx^2 + 6.3.2Sx + 10.3.2T)$$
$$\vdots$$
$$dx(Qx^{m-3} + 3(m-3)Rx^{m-4} + 6(m-3)(m-4)Sx^{m-5} + 10(m-3)(m-4)(m-5)Tx^{m-6} + \text{etc.})$$

quae nunc quoque integrationem admittere debent. Neque obſcurum eſt, quomodo longius progredi liceret, ſi hoc negotium vlterius perſequi placuerit.

7. Quae de integrabilitate huiusmodi formularum $dx\int V dx$, $dx\int^{(2)} V dx$ etc. in medium a nobis allata ſunt, imprimis tum vſui eſſe poſſunt, quando integralia inueſtiganda ſunt formularum, de quibus ſuſpicari licet, quod per integrationem ad quantitates finitas perduci poſſint, hoc eſt ad expreſſiones quae ſolas x et y inuoluunt. Sic ſi formula integranda proponitur, vbi V praeter x et y ſequentes per differentiationem inuectas p, q, r continet, hinc iudicari poteſt ipſi expreſſionem reſpondere ſolas x et y inuoluentem, ex qua per differentiationem originem ducere concipienda eſt, ſi modo ſequentibus conditionibus fuerit ſatisfactum:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} = 0;$$
$$P - \frac{2dQ}{dx} + \frac{3ddR}{dx^2} = 0;\quad Q - \frac{3dR}{dx} = 0.$$

Gene-

Generaliter vero ſi propoſita fuerit formula differentialis $V\,dx$, in qua functio V praeter x et y etiam quantitates ex differentiatione ortas p, q, $r \ldots\ldots u$ inuoluat; certum eſt hanc formulam ad expreſſionem ſolas x et y continentem deducere, ſi ſequentes impletae fuerint conditiones:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots \pm \frac{d^mU}{dx^m} = 0$$

$$P - \frac{2dQ}{dx} + \frac{3ddR}{dx^2} - \frac{4d^3S}{dx^3} \ldots \mp \frac{md^{m-1}U}{dx^{m-1}} = 0$$

$$Q - \frac{3dR}{dx} + \frac{6.ddS}{dx^2} \ldots\ldots \pm \frac{m(m-1)}{1.\ 2} \frac{d^{m-2}U}{dx^{m-2}} = 0$$

$$\vdots$$

$$T - \frac{m\,dU}{dx}.$$

Neque tamen hinc viciſſim inferri debet, ſi iſtis aequationibus ſatisfacere non liceat, formulam propoſitam $V\,dx$ nullo modo ad abſolutum integrale ſolas x et y complectens perduci poſſe, quum id per idoneos multiplicatores, in quos formulae integrales vti $\int V\,dx$, $\int^{(2)} V\,dx$ etc. ducendae ſunt, ſaepenumero praeſtare licet, de quo pluribus differendi infra dabitur locus.

8. In priori diſſertatione exhibuimus quidem aequationes, quibus criteria integrabilitatis pro formulis differentialibus duplicatis continentur, quas ſub hac forma $V\,dx\,dy$ repraeſentari diximus, deſignante ſcilicet V functionem quamcunque variabilium x, y, z et differentialium inde ortorum. Quamuis autem

ea quae tum a nobis allata fuere, generaliter locum habeant, qualiscunque quantitas V concipiatur eſſe functio ipſorum x, y, z et differentialium inde pendentium, tamen quum potiſſimum ad eos caſus pertinere videantur, quibus V eſt functio algebraica, nullam ſcilicet formulam integralem ipſa inuoluens, hoc loco haud iniucundum fore arbitrati ſumus fuſius exponere, quae criteria integrabilitatis locum habere debeant pro caſu formulae differentialis duplicatae $V' dx\, dy$, vbi V' ſtatuitur $= \int V\, dx\, dy$, imprimis quum aequationes, quibus haec criteria continentur mirabili quadam concinnitate et praeſtantia ſe commendare videantur. Statuamus igitur vti antea § 21. Diſſert. I.

$$\begin{aligned} dV = L\,dx + N\,dz &+ P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.} \\ + M\,dy \qquad &+ P'\,dp' + Q'\,dq' + R'\,dr' \\ &\qquad\qquad + Q''\,dq'' + R''\,dr'' \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + R'''\,dr''' \end{aligned}$$

et tum quidem quia euidens eſt $V' dx\, dy$ integrale admittere non poſſe, niſi formula quoque $V\, dx\, dy$ ſit integrabilis, facile intelligitur ante omnia requiri, vt aequationibus §. 33. Diſſert I ſatisfiat. Vt vero conditiones quoque inueniantur, quae pro integrabilitate formulae $V' dx\, dy$ ſpeciatim praeſcribendae ſunt, ponamus:

$$\begin{aligned} dV' = \lambda\,dx + \nu\,dz &+ \pi\,dp + \varkappa\,dq + \varrho\,dr + \text{etc.} \\ + \mu\,dy \qquad &+ \pi'\,dp' + \varkappa'\,dq' + \varrho'\,dr' \\ &\qquad\qquad + \varkappa''\,dq'' + \varrho''\,dr'' \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \varrho'''\,dr''' \end{aligned}$$

tum

tum vero poſito $\iint V' dx\,dy = Z$

$$\begin{aligned} dZ = \mathfrak{L}dx &+ \mathfrak{N}dp + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq \\ + \mathfrak{M}dy & \qquad\quad + \mathfrak{P}'dp' + \mathfrak{Q}'dq' \\ & \qquad\qquad\qquad\quad + \mathfrak{Q}''dq''. \end{aligned} \quad \text{etc.}$$

Ne autem nimia multitudine formularum obruamur, ponamus in valore differentialis dZ vltimos terminos eſſe $\mathfrak{P}\,dp$ et $\mathfrak{P}'\,dp'$ ex natura enim aequationum vltimarum ad quas calculus perducet, facile apparebit enodationem ſpecialis huius exempli, vim demonſtrationis generalis habere. Rationibus autem ſubductis vti §. 28. Differt. I. factum eſt, inueniemus criteria integrabilitatis formulae $V'\,dx\,dy$ ſequentibus ſeptem contineri aequationibus:

$\mathfrak{Q} = 0$; $\mathfrak{Q}' = 0$; $\mathfrak{Q}'' = 0$; $\mathfrak{N} = 0$; $\mathfrak{N}' = 0$; $\mathfrak{N}'' = 0$; $\mathfrak{N}''' = 0$.

Eadem criteria igitur ſequentibus quoque aequationibus expreſſa eſſe, intelligi debet:

$$0 = \left(\frac{d^6\,\mathfrak{Q}}{dx^4\,dy^2}\right) = \left(\frac{d^4\,\varkappa}{dx^3\,dy}\right) - \left(\frac{d^3\,\pi}{dx^2\,dy}\right) + \left(\frac{dd\,\nu}{dx\,dy}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^6\,\mathfrak{Q}'}{dx^3\,dy^3}\right) = \left(\frac{d^4\,\varkappa'}{dx^2\,dy^2}\right) - \left(\frac{d^3\,\pi}{dx^2\,dy}\right) + \left(\frac{dd\,\nu}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d^3\,\pi'}{dx\,dy^2}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^6\,\mathfrak{Q}''}{dx^2\,dy^4}\right) = \left(\frac{d^4\,\varkappa''}{dx\,dy^3}\right) - \left(\frac{d^3\,\pi'}{dx\,dy^2}\right) + \left(\frac{dd\,\nu}{dx\,dy}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^7\,\mathfrak{N}}{dx^5\,dy^2}\right) = \left(\frac{d^5\,\varrho}{dx^4\,dy}\right) - \left(\frac{d^4\,\varkappa}{dx^3\,dy}\right) + \left(\frac{d^3\,\pi}{dx^2\,dy}\right) - \left(\frac{dd\,\nu}{dx\,dy}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^7\,\mathfrak{N}'}{dx^4\,dy^3}\right) = \left(\frac{d^5\,\varrho'}{dx^3\,dy^2}\right) - \left(\frac{d^4\,\varkappa}{dx^3\,dy}\right) + \left(\frac{d^3\,\pi}{dx^2\,dy}\right) - \left(\frac{dd\,\nu}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d^4\,\varkappa'}{dx^2\,dy^2}\right) + \left(\frac{dd\,\pi'}{dx\,dy^2}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^7\,\mathfrak{N}''}{dx^3\,dy^4}\right) = \left(\frac{d^5\,\varrho''}{dx^2\,dy^3}\right) - \left(\frac{d^4\,\varkappa'}{dx^2\,dy^2}\right) + \left(\frac{d^3\,\pi}{dx^2\,dy}\right) - \left(\frac{dd\,\nu}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d^4\,\varkappa''}{dx\,dy^3}\right) + \left(\frac{d^3\,\pi'}{dx\,dy^2}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^7\,\mathfrak{N}'''}{dx^2\,dy^6}\right) = \left(\frac{d^5\,\varrho'''}{dx\,dy^4}\right) - \left(\frac{d^4\,\varkappa''}{dx\,dy^3}\right) + \left(\frac{d^3\,\pi'}{dx\,dy^2}\right) - \left(\frac{dd\,\nu}{dx\,dy}\right)$$

quarum

quarum aequationum ratio ex diſſertatione ſuperiori perſpicua redditur.

9. In formulis differentialibus litteras Graecas inuoluentibus, earum valores §. 29. Diſſert. I. allatos introducamus, quo facto has ſeptem obtinebimus aequalitates, criteria integrabilitatis propoſitae formulae $V'\,dx\,dy$ complectentes:

$$\text{I.}\quad 3N - 2\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) = 0$$

$$\text{II.}\quad 4N - 2\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) = 0$$
$$- 2\left(\frac{dP'}{dy}\right)$$

$$\text{III.}\quad 3N - 2\left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) = 0$$

$$\text{IV.}\quad 4N - 3\left(\frac{dP}{dx}\right) + 2\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) = 0$$

$$\text{V.}\quad 6N - 4\left(\frac{dP}{dx}\right) + 2\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) = 0$$
$$- 3\left(\frac{dP'}{dy}\right) + 2\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right)$$

$$\text{VI.}\quad 6N - 3\left(\frac{dP}{dx}\right) + 2\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right) = 0$$
$$- 4\left(\frac{dP'}{dy}\right) + 2\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right)$$

$$\text{VII.}\quad 4N - 3\left(\frac{dP'}{dy}\right) + 2\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) = 0.$$

Si vero ſequentes iam inſtituantur combinationes V − 2. I et VI − 2. III conſequemur:

$$3\left(\frac{dP'}{dy}\right) - 2\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) = 0$$

$$\text{et}\quad 3\left(\frac{dP}{dx}\right) - 2\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right) = 0.$$

Vlte-

Vlterius ſumendo (III) + VI − V + I − II atque (III) + V − V I + III − II (vbi (III) ſignificat aequationem tertiam § 29. Differt: I.) prodibit:

$$3\left(\frac{d\,d\,Q''}{d\,y^2}\right) - 2\left(\frac{d^3\,R''}{d\,x\;d\,y^2}\right) + \left(\frac{d^4\,S''}{d\,x^2\,d\,y^2}\right) = 0 \text{ et}$$

$$3\left(\frac{d\,d\,Q}{d\,x^2}\right) - 2\left(\frac{d^3\,R'}{d\,x^2\;d\,y}\right) + \left(\frac{d^4\,S''}{d\,x^2\,d\,y^2}\right) = 0.$$

Denique capiendo (IV − IX) + VII et (II − VIII) + IV obtinebimus:

$$6N - 2\left(\frac{d\,P}{d\,x}\right) + \left(\frac{d\,d\,Q}{d\,x^2}\right) - \left(\frac{d^3\,R'}{d\,x^2\,d\,y}\right) + \left(\frac{d^4\,S''}{d\,x^2\,d\,y^2}\right) - \left(\frac{d^5\,T'''}{d\,x^2\,d\,y^3}\right) = 0$$
$$-5\left(\frac{d\,P'}{d\,y}\right) + 2\left(\frac{d\,d\,Q'}{d\,x\,d\,y}\right) - 2\left(\frac{d^3\,R''}{d\,x\;d\,y^2}\right) + 2\left(\frac{d^4\,S'''}{d\,x\;d\,y^3}\right)$$
$$+4\left(\frac{d\,d\,Q''}{d\,y^2}\right) - 3\left(\frac{d^3\,R'''}{d\,y^3}\right)$$

in qua aequatione ſi deleantur termini, qui propter aequationes modo allatas nihilo aequantur, tandem fiet:

$$3\left(\frac{d^3\,R'''}{d\,y^3}\right) - 2\left(\frac{d^4\,S'''}{d\,x\,d\,y^3}\right) + \left(\frac{d^5\,T'''}{d\,x^2\;d\,y^3}\right) = 0.$$

Simili vero prorſus modo demonſtrabitur eſſe

$$3\left(\frac{d^3\,R}{d\,x^3}\right) - \left(\frac{d^4\,S'}{d\,y\,d\,x^3}\right) + \left(\frac{d^5\,T''}{d\,y^2\,d\,x^3}\right) = 0.$$

Porro et hoc obſeruari meretur, eſſe tam $\left(\frac{d^4\,S}{d\,x^4}\right)$, quam $\left(\frac{d^4\,S''''}{d\,y^4}\right) = 0$, quod facile patet, ſi IV − I ſubtrahatur a (I) atque VII − III a (V). Aequationes vero modo inuentae ita comparatae ſunt, vt facillime combinari queant, cum iis quas §. 32. Differt. I. in medium attulimus, nihil autem attinet, de modo quo hae combinationes inſtituendae vberius disſerere, quia ex formulis inde deductis, facile pateſcat qua ratione formandae ſint. Iſtae formulae

autem per combinationem elicitae, vnica omnino hac formula comprehendi poſſunt:

$$6N - 5\left(\frac{dP}{dx}\right) + 4\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - 3\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) + 2\left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) - \left(\frac{d^5T}{dx^5}\right)$$
$$- 5\left(\frac{dP'}{dy}\right) + 4\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) - 3\left(\frac{d^3R'}{dx^2\,dy}\right) + 2\left(\frac{d^4S'}{dx^3\,dy}\right) - \left(\frac{d^5T'}{dx^4\,dy}\right)$$
$$+ 4\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) - 3\left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right) + 2\left(\frac{d^4S''}{dx^2dy^2}\right) - \left(\frac{d^5T''}{dx^3dy^2}\right) = 0$$
$$- 3\left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) + 2\left(\frac{d^4S'''}{dx\,dy^3}\right) - \left(\frac{d^5T'''}{dx^2\,dy^3}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{d^4S''''}{dy^4}\right) - \left(\frac{d^5T''''}{dx\,dy^4}\right)$$
$$- \left(\frac{d^5T'''''}{dy^5}\right)$$

de qua certe obſeruari meretur, omnia membra in iisdem lineis ſiue horizontalibus, ſiue diagonalibus collocata, formulas praebere euaneſcentes.

10. Ex combinatione huius formulae cum illa §. 33. Differt. I. allata, ſequentes demum binae eruentur aequationes, pro criteriis integrabilitatis formulae $V^I\,dx\,dy$

$$\text{I.}\quad P - 2\left(\frac{dQ}{dx}\right) + 3\left(\frac{ddR}{dx^2}\right) - 4\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right) + 5\left(\frac{d^4T}{dx^4}\right)$$
$$- 2\left(\frac{dQ'}{dy}\right) + 3\left(\frac{ddR'}{dx\,dy}\right) - 4\left(\frac{d^3S'}{dx^2\,dy}\right) + 5\left(\frac{d^4T'}{dx^3\,dy}\right)$$
$$+ 3\left(\frac{ddR''}{dy^2}\right) - 4\left(\frac{d^3S''}{dx\,dy^2}\right) + 5\left(\frac{d^4T''}{dx^2dy^2}\right) = 0$$
$$- 4\left(\frac{d^3S'''}{dy^3}\right) + 5\left(\frac{d^4T'''}{dx\,dy^3}\right)$$
$$+ 5\left(\frac{d^4T''''}{dy^4}\right)$$

II.

$$\text{II. } P - 2\left(\frac{dQ''}{dy}\right) + 3\left(\frac{ddR'''}{dy^2}\right) - 4\left(\frac{d^3S''''}{dy^3}\right) + 5\left(\frac{d^4T'''''}{dy^4}\right)$$
$$-2\left(\frac{dQ'}{dx}\right) + 3\left(\frac{ddR''}{dxdy}\right) - 4\left(\frac{d^3S'''}{dxdy^2}\right) + 5\left(\frac{d^4T''''}{dxdy^3}\right)$$
$$+3\left(\frac{ddR'}{dx^2}\right) - 4\left(\frac{d^3S''}{dx^2dy}\right) + 5\left(\frac{d^4T'''}{dx^2dy^2}\right) = 0$$
$$-4\left(\frac{d^3S'}{dx^3}\right) + 5\left(\frac{d^4T''}{dx^3dy}\right)$$
$$+5\left(\frac{d^4T'}{dy^4}\right).$$

Pro ambabus autem his aequationibus tenendum eſt, membra iisdem lineis horizontalibus et diagonalibus expreſſa formulas praebere euaneſcentes. Ex ipſa autem rei natura perſpicitur quantitates S, S'''', T, T', T'''', T''''' euaneſcere debere, de quo ea quae §. 34. Differt. I. occurrunt, conſuli poterunt.

11. Nunc vero et facili coniectura aſſequi poſſumus, qualia proditura forent criteria integrabilitatis pro huiusmodi formula $V''\,dx\,dy$ vbi $V'' = \iint V'\,dxdy$ et $V' = \iint V\,dx\,dy$, poſito vt ante

$$dV = L\,dx + N\,dz + P\,dp + Q\,dq + \text{etc.}$$
$$+ M\,dy \qquad + P'dp' + Q'dq'$$
$$+ Q''dq''.$$

Euidens ſcilicet eſt eadem huiusmodi aequationibus exprimi:

$$Q - 3\left(\frac{dR}{dx}\right) + 6\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) - 10\left(\frac{d^3T}{dx^3}\right) + \text{etc.}$$
$$-3\left(\frac{dR'}{dy}\right) + 6\left(\frac{ddS'}{dxdy}\right) - 10\left(\frac{d^3T'}{dx^2dy}\right) \qquad = 0$$
$$+6\left(\frac{ddS''}{dy^2}\right) - 10\left(\frac{d^3T''}{dxdy^2}\right)$$
$$-10\left(\frac{d^3T'''}{dy^3}\right)$$

$$\begin{aligned} Q' &- 3\left(\frac{dR'}{dx}\right) + 6\left(\frac{ddS'}{dx^2}\right) - 10\left(\frac{d^3T'}{dx^3}\right) + \text{etc.} \\ &- 3\left(\frac{dR''}{dy}\right) + 6\left(\frac{ddS''}{dxdy}\right) - 10\left(\frac{d^3T''}{dx^2dy}\right) \qquad = 0 \\ &\qquad\qquad + 6\left(\frac{ddS'''}{dy^2}\right) - 10\left(\frac{d^3T'''}{dxdy^2}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad - 10\left(\frac{d^3T''''}{dy^4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q'' &- 3\left(\frac{dR''}{dx}\right) + 6\left(\frac{ddS''}{dx^2}\right) - 10\left(\frac{d^3T''}{dx^3}\right) + \text{etc.} \\ &- 3\left(\frac{dR'''}{dy}\right) + 6\left(\frac{ddS'''}{dxdy}\right) - 10\left(\frac{d^3T'''}{dx^2dy}\right) \qquad = 0 \\ &\qquad\qquad + 6\left(\frac{ddS''''}{dy^2}\right) - 10\left(\frac{d^3T''''}{dxdy^2}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad - 10\left(\frac{d^3T''''}{dy^3}\right). \end{aligned}$$

Inutile autem ducimus in demonſtrationem harum aequalitatum vlterius inquirere, praeſertim quia facile praeuidere licet, calculum eo perducentem, nimis euadere prolixum, nobis autem modum quendam tenendum eſſe iudicauimus, ne maiori prolixitate lectorum defatigemus attentionem. Quod quum ita ſit, etiam ea quae de formulis differentialibus triplicatis vel altiorum ordinum, ſimili ratione ac de duplicatis demonſtrari poſſent, plane praetermittenda eſſe cenſuimus.

12. Cum autem nunc doctrinam antea expoſitam exemplis quibusdam illuſtrare nobis proponimus, in genere praemonendum eſt, exempla iſta a nobis adducenda duplicis eſſe generis, prius enim eas complectetur formulas differentiales, quae per ſe integrationem admittunt, dum poſterius ad eiusmodi pertinet formulas, quae non quidem per ſe integrabiles ſunt

ſunt, idoneo tamen multiplicatore adhibito in quem duci debent, reddi poſſunt integrabiles. In eo etenim praecipuus vſus doctrinae de criteriis integrabilitatis conſiſtit, quod anſam praebeat huiusmodi multiplicatores inueniendi; nam iis formulis differentialibus, quas per ſe integrabiles eſſe conſtat, ipſorum integralia aſſignare, minimum quidem hac in re faceſſit negotium. Praeterea et eam ordinis regulam obſeruandam nobis praeſcripſimus, quam ſupra quoque ſecuti ſumus, vt formulas primum differentiales ſimplices tractemus, tum vero ad duplicatas et altiorum generum progrediamur.

13. Sit igitur nunc propoſita haec aequatio

$$V = \frac{xq+p}{y} - \frac{xpp}{yy} + \frac{yr+pq}{p} - \frac{yqq}{pp}$$

de qua ad praeſcriptum regularum antea traditarum inquiri debet, an formula $V\,dx$ ſit integrabilis nec ne? Differentiali autem ſumto habemus:

$$dV = dx\left(\frac{q}{y} - \frac{pp}{yy}\right) + dy\left(-\frac{(p+xq)}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} + \frac{r}{p} - \frac{qq}{pp}\right)$$
$$+ dp\left(\frac{1}{y} - \frac{2px}{yy} - \frac{yr}{pp} + \frac{2yqq}{p^3}\right) + dq\left(\frac{x}{y} + 1 - \frac{2yq}{pp}\right) + \frac{y\,dr}{p}$$

vnde pro M, N, P etc. ſequentes obtinemus valores:

$$M = \frac{q}{y} - \frac{pp}{yy};\quad N = -\frac{(p+xq)}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} + \frac{r}{p} - \frac{qq}{pp}$$
$$P = \frac{1}{y} - \frac{2px}{yy} - \frac{yr}{pp} + \frac{2yqq}{p^3};\quad Q = \frac{x}{y} + 1 - \frac{2yq}{pp};\quad R = \frac{y}{p}.$$

Quum itaque eſſe debeat

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} = 0$$

primum inueniemus

$$Q-\frac{dR}{dx}=\frac{x}{y}-\frac{yq}{pp}, \text{ porro } P-\frac{dQ}{dx}+\frac{ddR}{dx^2}=\frac{-px}{yy}+\frac{q}{p}$$

et denique

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^2}=-\frac{(p+xq)}{yy}+\frac{2xpp}{y^3}+\frac{r}{p}-\frac{qq}{pp}$$
$$-\frac{1}{dx}d.\left(\frac{q}{p}-\frac{px}{yy}\right)=0.$$

Quum igitur conditio integrabilitatis impleatur, certi eſſe poſſumus, formulam propoſitam integrabilem eſſe, et liquet omnino eius integrale eſſe $\frac{xp}{y}+\frac{yq}{p}$. Videamus vero et nunc vtrum reliquae illae formulae integrabiles ſint, ad quarum integrabilitatem iſta formulae noſtrae propoſitae quaſi reducatur vid § 6 huius diſſertationis. Neceſſum igitur eſt, vt ſequentes formulae integrari queant:

$$M\,dx,\ N\,dx,\ dx(Nx+P);\ dx(Nx^2+2Px+2Q).$$

Liquet autem eſſe

$$\int M\,dx=\frac{p}{y};\ \int N\,dx=\frac{q}{p}-\frac{px}{yy}, \text{ vlterius}$$

$$dx(Nx+P)=dx\left(-\frac{(x^2q+px)}{yy}+\frac{2x^2pp}{y^3}+\frac{rx}{p}-\frac{2qx}{pp}+\frac{1}{y}-\frac{2px}{yy}-\frac{yr}{pp}+\frac{2yqq}{p^3}\right)$$
$$=-\frac{x^2dp-xpdx}{yy}+\frac{2x^2pdy}{y^3}+\frac{xdq}{p}-\frac{xqdp}{pp}+\frac{dx}{y}-\frac{2xdy}{yy}-\frac{ydq}{pp}+\frac{2ydp}{p^3}$$

vnde integrando fit

$$\int dx(Nx+P)=\frac{x}{y}-\frac{x^2p}{yy}-\frac{yq}{pp}.$$

Porro habetur

$$dx(Nx^2+2Px+2Q)=dx\left(-\frac{x^3q-x^2p}{yy}+\frac{2x^3pp}{y^3}+\frac{xxr}{p}-\frac{xxqq}{pp}+\frac{4x}{y}-\frac{4x^2p}{yy}\right)$$
$$+dx\left(-\frac{2xyr}{pp}+\frac{4xyqq}{p^3}+2-\frac{4yq}{pp}\right)$$
$$=-\frac{x^3dp-3x^2pdx}{yy}+\frac{2x^3pdy}{y^3}+\frac{4xdx}{y}-\frac{2x^2dy}{yy}+x^2\left(\frac{dq}{p}-\frac{qdp}{pp}\right)+\frac{2xqdx}{p}$$
$$-\frac{2xqdy}{pp}-\frac{2xydq}{pp}+\frac{4xyqdp}{p^3}-\frac{2yqdx}{pp}+2\frac{(pdy-ydp)}{pp}$$

cuius

cuius integrale manifeſto eſt

$$\int dx(Nx^2 + 2Px + 2Q) = -\frac{x^3 p}{y^2} + \frac{2x^2}{y} + \frac{x^2 q}{p} - \frac{2xyq}{pp} + \frac{2y}{p}.$$

14. Propoſita nunc eſto formula

$$dx\left(\frac{xr + 2q}{yy} - \frac{6xpq - 4pp}{y^3} + \frac{6xp^3}{y^4}\right) = V\,dx$$

quam examinemus an bis ſit integrabilis, hoc eſt an non ſolum $\int V\,dx$, verum etiam $\int dx \int V\,dx$ verum conſtituat integrale? Differentiali autem ſumto prodit

$$dV = \frac{xdr + rdx + 2dq}{yy} - \frac{2(xr + 2q)dy}{y^3} - \frac{(6pqdx + 6xqdp + 6xpdq)}{y^3} - \frac{8pdp}{y^3} + \frac{3(6xpq + 4pp)dy}{y^4} + \frac{6p^3dx + 18xp^2dp}{y^4} - \frac{24xp^3dy}{y^5}$$

vnde ſequentes conſequimur valores:

$$M = \frac{r}{yy} - \frac{6pq}{y^3} + \frac{6p^3}{y^4}$$

$$N = \frac{-2xr - 4q}{y^3} + \frac{18xpq + 12pp}{y^4} - \frac{24xp^3}{y^5}$$

$$P = \frac{-6xq - 8p}{y^3} + \frac{18xp^2}{y^4}$$

$$Q = \frac{2}{yy} - \frac{6xp}{y^3} \text{ et } R = \frac{x}{yy}.$$

Videndum igitur eſt, vtrum his duabus ſatisfiat aequationibus:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} = 0 \text{ et}$$

$$P - \frac{2dQ}{dx} + \frac{3ddR}{dx^2} = 0\,?$$

quod ſi euenerit, nullum eſt dubium, quin formula propoſita ſit integrabilis. Quum autem habeatur

$$Q - \frac{dR}{dx} = \frac{1}{yy} - \frac{4xp}{y^3} \text{ et}$$

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} = \frac{-2xq - 2p}{y^3} + \frac{6xpp}{y^4}$$

certe

certe adipiſcimur

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} = 0.$$

Pro poſteriori criterio habemus

$$2Q - 3\frac{dR}{dx} = \frac{1}{yy} - \frac{6xp}{y^4}, \text{ ideoque } P - \frac{2dQ}{dx} + \frac{3ddR}{dx^2} = 0.$$

De reliquis formulis, quas integrabiles eſſe oportet, periculum nunc quoque facere lubet, habebimus autem:

$$\int M\,dx = \int\left(\frac{dq}{yy} - \frac{2q\,dy}{y^3} - \frac{4p\,dp}{y^3} + \frac{6p^2\,dy}{y^4}\right) = \frac{q}{yy} - \frac{2p^2}{y^3},$$

$$\int dx \int M\,dx = \int\left(\frac{dp}{yy} - \frac{2p\,dy}{y^3}\right) = \frac{p}{yy},$$

$$\int N\,dx = \int\left(-\frac{2x\,dq - 2q\,dx}{y^3} + \frac{6xq\,dy}{y^4} - \frac{2dp}{y^3} + \frac{6p\,dy}{y^4} + \frac{12xp\,dp + 6pp\,dx}{y^4} - \frac{24xp^2}{y^5}dy\right)$$
$$= -\frac{2xq}{y^3} - \frac{2p}{y^3} + \frac{6xpp}{y^4}$$

$$\int dx \int N\,dx = \int\left(-\frac{2x\,dp - 2p\,dx}{y^3} + \frac{6xp\,dy}{y^4}\right) = -\frac{2xp}{y^3}.$$

Porro

$$\int P\,dx = \int\left(-\frac{6x\,dp - 6p\,dx}{y^3} + \frac{18xp\,dy}{y^4} - \frac{2\,dy}{y^3}\right) = -\frac{6xp}{y^3} + \frac{1}{yy}$$

ideoque

$$\int^{(3)} N\,dx - \int^{(2)} P\,dx + \int Q\,dx = \int\left(\frac{dx}{yy} - \frac{2x\,dy}{y^3}\right) = \frac{x}{yy} \text{ et}$$

$$\int^{(4)} N\,dx - \int^{(3)} P\,dx + \int^{(2)} Q\,dx - \int R\,dx = 0.$$

Vlterius erit

$$\int^{(2)} P\,dx - 2\int Q\,dx = \int\left(-\frac{3\,dx}{yy} + \frac{6x\,dy}{y^3}\right) = -\frac{3x}{yy} \text{ et denique}$$

$$\int^{(3)} P\,dx - 2\int^{(2)} Q\,dx + 3\int R\,dx = 0.$$

15. Dum exempla iam propoſituri erimus formularum differentialium, quae per ſe integrabiles non

non ſunt, at in certos multiplicatores ductae ad integrabilitatem perducantur, haud praeter rem erit, de indole horum multiplicatorum pauca praefari. Primum igitur licet concedendum ſit, vnamquamque formulam differentialem eius eſſe indolis, vt in certum multiplicatorem ducta integrabilis reddatur, minime tamen inde ſequitur huiusmodi multiplicatorem pro idoneo eſſe habendum, ſi differentialia altiorum ordinum inuoluat, quam quae in ipſa formula differentiali propoſita reperiuntur. Quum enim integratio in eo conſiſtat, vt formula differentialis propoſita, ad aliam gradus proxime inferioris deprimatur, facile liquet ineptum habendum eſſe multiplicatorem, qui differentialia ſuperioris gradus involueret, quam quae in ipſa formula ad integrandum propoſita occurrunt. Sic ſi quaeratur integrale formulae $\psi\, d x$ per ſe non integrabilis, in qua ψ quamcunque deſignat functionem ipſorum x, y, p, q, quiuis facile iudicare poteſt, multiplicatorem hunc in finem adhibendum non inuoluere debere valores differentiales vltra p aſſurgentes, quoniam ipſum integrale, quodcunque demum ſit, vt functio ipſorum x, y, p conſiderari debet. Deinde et id notari meretur quod ſi multiplicator aliquis idoneus formulae $\psi\, d x$ fuerit inuentus, quem littera Φ indigitemus, tum ex hoc infinitos alios elici poſſe, quorum ope eadem formula $\psi\, d x$ reddatur integrabilis. Si enim ponamus $\int \Phi\, \psi\, d x = z$, facile intelligitur huiusmodi formulam $d z\, \Gamma : z$ (deſignante $\Gamma : z$ quamcunque functionem ipſius z) pro inte-

grabili eſſe habendam, ſiquidem huius formulae integratio referenda eſt ad primam calculi integralis partem, quae de integratione formularum differentialium vnicam variabilem inuoluentium agit, cuius omnes operationes hoc in negotio pro conceſſis haberi debent. Liquet igitur multiplicatores idoneos formulae propoſitae $\psi\, d\,x$, generaliter hac expreſſione contineri $\Phi\,\Gamma : z$ ſeu $\Phi\,\Gamma : (\int \Phi\, \psi\, d\,x)$ hincque ex vnico multiplicatore Φ inuento, infinitam multitudinem deduci poſſe. In inueſtigando autem multiplicatore Φ, haec praeſcribenda videtur regula, vt ſemper ſimpliciſſimus qui fieri poſſit exquiratur, hoc eſt talis, qui minimum numerum variabilium x, y, p etc. inuoluit, ſic ſi propoſita fuerit formula $\psi\, d\,x$ in qua ψ functio habetur ipſorum x, y, p, q, ſimpliciſſimus erit multiplicator Φ, ſi ita comparatus ſit, vt vnicam tantum variabilem x inuoluat. Quodſi autem talem inuenire non liceat, proxime inquirendum eſt, vtrum detur functio quaedam vel ſolius y vel ipſorum x et y per quam $\psi\, d\,x$ multiplicata reddatur integrabilis, cum autem neque hoc ſuccedat, tum inquirendum erit, an pro Φ accipere liceat functionem quandam ipſorum x, y, p?

16. Propoſita iam eſto formula differentialis:

$$d\,y + y\,v\,d\,x + z\,d\,x$$

vbi v et z quaſcunque functiones ipſius x deſignant, quum autem haec formula per ſe non ſit integrabilis, quod examine inſtituto facile deprehendetur, quaeramus iam quantitatem per quam multiplicata,

ad

ad integrabilitatem perducatur. Sit igitur quantitas Φ talis multiplicator, quem nunc ſupponamus eſſe tantum functionem ipſius x, quo ſuppoſito, euidens ſit formulam $\Phi\,(dy + yv\,dx)$ integrationem admittere debere, ſiquidem $\Phi\,z\,dx$ iam per ſe intelligitur eſſe integrabilis. Habemus vero tunc pro formula noſtra

$$V = \Phi(p+yv);\ dV = d\Phi(p+yv) + \Phi(dp+vdy+ydv)$$

vnde deducitur

$$M = \tfrac{d\Phi}{dx}(p+yv) + \Phi y\tfrac{dv}{dx};\ N = \Phi v \text{ et } P = \Phi,$$

itaque quum eſſe debeat $N - \frac{dP}{dx} = 0$, fiet $\Phi v - \frac{d\Phi}{dx} = 0$, ideoque $\frac{d\Phi}{\Phi} = v\,dx$, ſeu $\Phi = e^{\int v\,dx}$. Integrale autem ipſum iam erit $y\,e^{\int v\,dx}$, ideoque totius formulae propoſitae:

$$y\,e^{\int v\,dx} + \int e^{\int v\,dx}.\,z\,dx.$$

Enimuero operae pretium iam quoque erit inueſtigare multiplicatorem generaliorem, qui functio ſit vtriusque x et y, et de quo ex antea monitis quidem conſtat, eum huiusmodi exprimi forma:

$$e^{\int v\,dx}\,\Gamma : (y\,e^{\int v\,dx} + \int e^{\int v\,dx}.\,z\,dx).$$

Statuamus autem vt antea hunc multiplicatorem Φ, et quum nunc ſit

$$V = \Phi(p+yv+z),\ \text{nec non } dV = d\Phi(p+yv+z) + \Phi(dp+ydv+vdy+dz)$$

erit

$$M = (\tfrac{d\Phi}{dx})(p+yv+z) + \Phi(\tfrac{ydv}{dx} + \tfrac{dz}{dx});$$

$$N = (\tfrac{d\Phi}{dy})(p+yv+z) + \Phi v$$

$P = \Phi$,

$P = \Phi$, hinc autem iſta iam deducitur aequatio:

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)(p + yv + z) + \Phi v - \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) - p\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = 0, \text{ ſeu}$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)(yv + z) - \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \Phi v = 0.$$

Ponamus nunc $\Phi = \Phi' \psi$, vbi Φ' denotat functionem ſolam x inuoluentem, ψ autem talem quae vtramque x et y continet, atque ob

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = \psi \frac{d\Phi'}{dx} + \Phi' \left(\frac{d\psi}{dx}\right); \; \left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = \Phi' \left(\frac{d\psi}{dy}\right),$$

his valoribus in aequatione ſuperiori ſubſtitutis conſequimur:

$$\Phi' \left(\frac{d\psi}{dy}\right)(yv + z) - \psi \frac{d\Phi'}{dx} - \Phi' \left(\frac{d\psi}{dx}\right) + \Phi' \psi v = 0.$$

Nunc facile quidem apparet, hanc aequationem in duas diſpeſci poſſe partes, quarum vtraque euaneſcere debet, erit ſcilicet

$$\text{I. } \Phi' v - \frac{d\Phi'}{dx} = 0 \text{ et II. } \left(\frac{d\psi}{dy}\right)(yv + z) - \left(\frac{d\psi}{dx}\right) = 0,$$

ex priori ſtatim deducitur $\Phi' = e^{\int v dx}$, quod autem poſteriorem attinet, facile liquet ψ habere debere huiusmodi formam $\Gamma : (yS + T)$, deſignantibus S et T functiones quasdam ſolius variabilis x. Fiet vero inde

$$\left(\frac{d\psi}{dy}\right) = S\Gamma' : (yS + T) \text{ et } \left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \left(\frac{y\,dS}{dx} + \frac{dT}{dx}\right)\Gamma' : (yS + T)$$

hinc ergo prodibit

$$S(yv + z) - y\frac{dS}{dx} - \frac{dT}{dx} = 0,$$

ideoque $Sv - \frac{dS}{dx} = 0$ et $Sz - \frac{dT}{dx} = 0$,

vnde deducitur

$$S = e^{\int v dx} \text{ et } T = \int S z\, dx = \int e^{\int v dx} z\, dx,$$

multi-

multiplicator quaeſitus igitur erit

$$e^{\int v d x}\,\Gamma : (y\, e^{\int v d x} + \int e^{\int v d x}.\, z\, d x)$$

prorſus vti ſupra docuimus.

17. Pro formula differentiali:

$$\alpha x dy + \beta y dx + x^m y^n (\gamma x dy + \delta y dx)$$

quaeramus nunc multiplicatorem, quo integrabilis reddatur, poſito igitur hoc multiplicatore $= \Phi$, habebimus

$$V = \Phi(\alpha x p + \beta y + x^m y^n (\gamma x p + \delta y))$$

ideoque differentiatione inſtituta, ſequentes prodibunt valores:

$$M = \left(\tfrac{d\Phi}{dx}\right)(\alpha x p + \beta y + x^m y^n (\gamma x p + \delta y))$$
$$+ \Phi(\alpha p + x^{m-1} y^n ((m+1)\gamma x p + m\delta y))$$

$$N = \left(\tfrac{d\Phi}{dy}\right)(\alpha x p + \beta y + x^m y^n (\gamma x p + \delta y))$$
$$+ \Phi(\beta + x^m y^{n-1} (n\gamma x p + (n+1)\delta y))$$

$$P = \Phi(\alpha x + \gamma x^{m+1} y^n).$$

Quum igitur eſſe debeat $N - \frac{dP}{dx} = 0$, hinc deducetur:

$$\left(\tfrac{d\Phi}{dy}\right)(\alpha x p + \beta y + x^m y^n (\gamma x p + \delta y)) - \tfrac{d\Phi}{dx}(\alpha x + \gamma x^{m+1} y^n)$$
$$+ \Phi(\beta + x^m y^{n-1}(n\gamma x p + (n+1)\delta y))$$
$$- \Phi(\alpha + (m+1)\gamma x^m y^n + n\gamma x^{m+1} y^{n-1} p) = 0$$

et quia

$$\tfrac{d\Phi}{dx} = \left(\tfrac{d\Phi}{dx}\right) + p\left(\tfrac{d\Phi}{dy}\right), \text{ erit}$$

$$\Phi(\beta-\alpha+x^m y^n((n+1)\delta-(m+1)\gamma))+(\tfrac{d\Phi}{dy})(\beta y+\delta x^m y^{n+1})$$
$$-(\tfrac{d\Phi}{dx})(\alpha x+\gamma x^{m+1}y^n)=0.$$

Nunc vero euidens eſt, huic aequationi ſatisfieri, ſi ſtatuatur $\Phi=x^\varkappa y^\lambda$, quo facto erit

$$(\tfrac{d\Phi}{dx})=\varkappa x^{\varkappa-1}y^\lambda \text{ et } (\tfrac{d\Phi}{dy})=\lambda x^\varkappa y^{\lambda-1}$$

hisque valoribus introductis et tota aequatione per $x^\varkappa y^\lambda$ diuiſa, fiet

$$\beta-\alpha+x^m y^n((n+1)\delta-(m+1)\gamma)+\lambda\beta-\varkappa\alpha$$
$$+x^m y^n(\lambda\delta-\varkappa\gamma)=0.$$

Hinc autem obtinemus

I° $\beta-\alpha=\varkappa\alpha-\lambda\beta$; II° $(n+1)\delta-(m+1)\gamma=\varkappa\gamma-\lambda\delta$

ex priori fit $\beta(1+\lambda)=\alpha(1+\varkappa)$, ex poſteriori vero

$$\delta(1+n+\lambda)=\gamma(1+m+\varkappa), \text{ ſiue}$$
$$\tfrac{\alpha\delta}{\gamma}(1+n+\lambda)=\alpha m+\alpha(1+\varkappa)=\alpha m+\beta(1+\lambda),$$

erit igitur

$\alpha(\delta n-\gamma m)=(\beta\gamma-\alpha\delta)(1+\lambda)$, vnde $1+\lambda=\frac{\alpha(\delta n-\gamma m)}{\beta\gamma-\alpha\delta}$ ſimilique modo $1+\varkappa=\frac{\beta(\delta n-\gamma m)}{\beta\gamma-\alpha\delta}$.

Integrale autem aequationis propoſitae nunc inuenietur

$$\frac{\beta}{1+\varkappa}x^{1+\varkappa}y^{1+\lambda}+\frac{\delta}{1+m+\varkappa}x^{m+1+\varkappa}y^{n+1+\lambda}$$

Praeterea autem erit

$$\int M\,dx=\int\varkappa x^{\varkappa-1}y^\lambda(\alpha x\,dy+\beta y\,dx+x^m y^n(\gamma x\,dy+\delta y\,dx))$$
$$+\int x^\varkappa y^\lambda(\alpha\,dy+x^{m-1}y^n((m+1)\gamma x\,dy+m\delta y))$$
$$=\beta x^\varkappa y^{\lambda+1}+\delta x^{\varkappa+m}y^{\lambda+n+1} \text{ et}$$

$\int N\,dx$

$$\int N dx = \int \lambda x^{\varkappa} y^{\lambda-1}(\alpha x dy + \beta y dx + x^m y^n(\gamma x dy + \delta y dx))$$
$$+ \int x^{\varkappa} y^{\lambda}(\beta dx + x^m y^{n-1}(n\gamma x dy + (n+1)\delta y dx))$$
$$= \alpha x^{\varkappa+1} y^{\lambda} + \gamma x^{\varkappa+m+1} y^{\lambda+n}.$$

18. Propoſita aequatione differentiali homogenea $R\,dx + S\,dy$, pro qua R et S ſunt functiones homogeneae ipſarum x et y, inueſtigemus multiplicatorem, qui eam integrabilem reddat. Si igitur ſtatuatur hic multiplicator Φ, habebimus

$V = \Phi(R + Sp)$, hinc

$$M = \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)(R+Sp) + \Phi\left(\left(\frac{dR}{dx}\right) + p\left(\frac{dS}{dx}\right)\right)$$

$$N = \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)(R+Sp) + \Phi\left(\left(\frac{dR}{dy}\right) + p\left(\frac{dS}{dy}\right)\right)$$

et $P = \Phi S$, tum vero erit

$$N - \frac{dP}{dx} = R\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) - S\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \Phi\left(\left(\frac{dR}{dy}\right) - \left(\frac{dS}{dx}\right)\right) = 0.$$

Dum igitur ex hac aequatione valor litterae Φ erui debet, primum obſeruaſſe iuuat, pro Φ aſſumi poſſe functionem homogeneam ipſarum x et y. Ponamus autem Φ eſſe functionem homogeneam m dimenſionis et per ea quae in Tom. I. Calculi Different. Illuſtris. *Euleri* §. 222. demonſtrantur, habebimus

$m\Phi = x\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + y\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)$, hincque

$$R y\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = m R \Phi - R x\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)$$

hoc igitur valore in aequatione ſuperiori introducto, fiet

$$mR\Phi - (Rx + Sy)\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = \Phi\left(y\left(\frac{dS}{dx}\right) - y\left(\frac{dR}{dy}\right)\right)$$

pro-

proinde

$$dx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = \frac{\Phi}{Rx+Sy}\left(mR\,dx + y\,dx\left(\frac{dR}{dy}\right) - y\,dx\left(\frac{dS}{dx}\right)\right).$$

Simili ratione probatur eſſe

$$Sx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = mS\Phi - Sy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right), \text{ vnde}$$

$$(Rx+Sy)\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) - mS\Phi = \Phi\left(x\left(\frac{dS}{dx}\right) - x\left(\frac{dR}{dy}\right)\right)$$

hincque

$$dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = \frac{\Phi}{Rx+Sy}\left(mS\,dy + x\,dy\left(\frac{dS}{dx}\right) - x\,dy\left(\frac{dR}{dy}\right)\right).$$

Conſequenter nunc erit

$$d\Phi = dx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) =$$

$$\frac{\Phi}{Rx+Sy}\left(mR\,dx + mS\,dy + (y\,dx - x\,dy)\left(\left(\frac{dR}{dy}\right) - \left(\frac{dS}{dx}\right)\right)\right).$$

At ob R et S functiones homogeneas, eſt

$$y\,dx\left(\frac{dR}{dy}\right) = nR\,dx - x\,dx\left(\frac{dR}{dx}\right)$$

$$x\,dy\left(\frac{dS}{dx}\right) = nS\,dy - y\,dy\left(\frac{dS}{dy}\right)$$

conſequenter

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = \frac{1}{Rx+Sy}\left(\begin{array}{r}(m+n)(R\,dx+S\,dy) - x\,dx\left(\frac{dR}{dx}\right) - x\,dy\left(\frac{dR}{dy}\right)\\ -y\,dx\left(\frac{dS}{dx}\right) - y\,dy\left(\frac{dS}{dy}\right)\end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{Rx+Sy}\left((m+n)(R\,dx+S\,dy) - x\,dR - y\,dS\right).$$

Patet itaque ſi ſtatuatur $m + n = -1$, fore

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = -\frac{d.(Rx+Sy)}{Rx+Sy} \text{ et } \Phi = \frac{1}{Rx+Sy}.$$

Hoc loco autem praetereundum non eſt, demonſtrationem modo allatam, locum habere non poſſe pro iis caſibus, vbi R et S ſunt functiones vel nullius

nullius dimenſionis, vel -1 dimenſionis ipſarum x et y, quum pro priori caſu ob $n=0$, ſit $m=-1$, quo caſu fieri nequit, vt iſtae aequalitates

$$nR=x\left(\frac{dR}{dx}\right)+y\left(\frac{dR}{dy}\right) \text{ et } nS=x\left(\frac{dS}{dx}\right)+y\left(\frac{dS}{dy}\right)$$

locum habeant, tum autem poſteriori caſu ob $m=0$, iſta aequalitas

$$m\Phi=x\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)+y\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) \text{ plane corruat.}$$

Videndum igitur eſt, quomodo demonſtratio ad hos quoque caſus accommodari poſſit. Atqui quum nullum dubium ſit, noſtram demonſtrationem locum habere, ſi fuerint R et S functiones vnius dimenſionis, examinemus an inde duorum caſuum, quibus $n=0$ vel $n=-1$, ratio reddi queat? Sit itaque propoſita aequatio $R'dx+S'dy$, vbi R' et S' functiones ſunt nullius dimenſionis ipſarum x et y, poſito autem $R'x=R$ et $S'x=S$, quaeramus multiplicatorem formulae differentialis $Rdx+Sdy$, qui vti antea demonſtrauimus erit $\frac{1}{Rx+Sy}$, hinc ergo fiet formula

$$\frac{Rdx+Sdy}{Rx+Sy}=\frac{R'xdx+S'xdy}{R'x^2+S'xy}=\frac{R'dx+S'dy}{R'x+S'y}$$

integrabilis, ex quo nullum eſt dubium, quin $R'dx+S'dy$ reddatur integrabilis diuidendo eam per $R'x+S'y$. Si R' et S' fuerint functiones -1 dimenſionis, multiplicetur vtraque per xy et ſtatuatur $R'xy=R$ et $S'xy=S$, ſicque multiplicator formulae differentialis $Rdx+Sdy$, habebitur $\frac{1}{Rx+Sy}$, integrabilis igitur erit formula

$$\frac{R'xydx+S'xydy}{R'x^2y+S'xy^2}=\frac{R'dx+S'dy}{R'x+S'y}.$$

Per ſe autem patet eſſe

$$\int M\,dx = \Phi R \text{ et } \int N\,dx = \Phi S.$$

19. Nunc autem facile perſpicitur, quomodo inueſtigatio idonei multiplicatoris pro formula $R\,dx + S\,dy$ facilius inſtitui poſſit. Si enim is multiplicator, vt antea ſupponatur $= \Phi$, tum vero ponatur $R\Phi = T$ et $S\Phi = U$, ex iis quae ſupra monuimus facile intelligitur, T et U pro functionibus homogeneis eiusdem dimenſionis ipſarum x et y haberi poſſe. Erit igitur

$mT = x(\frac{dT}{dx}) + y(\frac{dT}{dy})$, nec non $mU = x(\frac{dU}{dx}) + y(\frac{dU}{dy})$

proinde

$$mT\,dx + mU\,dy = x\,dT + y\,dU + (y\,dx - x\,dy)\left((\tfrac{dT}{dy}) - (\tfrac{dU}{dx})\right)$$

et quandoquidem ob formulam $T\,dx + U\,dy$ integrabilem, ſit $(\frac{dT}{dy}) = (\frac{dU}{dx})$, erit nunc

$$mT\,dx + mU\,dy = x\,dT + y\,dU.$$

Introductis autem pro T et U eorum valoribus, conſequemur

$$m\Phi(R\,dx + S\,dy) = \Phi(x\,dR + y\,dS) + d\Phi(Rx + Sy)$$

ex quo fit

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = \frac{mR\,dx - x\,dR + mS\,dy - y\,dS}{Rx + Sy},$$

ſi ergo ſtatuatur $m = -1$, fiet

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = -\frac{d.(Rx + Sy)}{Rx + Sy}$$

ideoque $\Phi = \frac{1}{Rx + Sy}$.

Patet

Patet autem eodem negotio multiplicatorem latius quoque patentem inueniri, quia enim eſt

$$\frac{d\,\Phi}{\Phi} + \frac{d.(Rx + Sy)}{Rx + Sy} = (m+1)\frac{(R\,dx + S\,dy)}{Rx + Sy}, \text{ erit}$$

$$L.\Phi(Rx + Sy) = (m+1)\int \frac{R\,dx + S\,dy}{Rx + Sy}$$

ideoque ſi ponatur $\frac{R\,dx + S\,dy}{Rx + Sy} = \frac{dZ}{Z}$, multiplicator idoneus formulae propoſitae, nunc quoque erit $\Phi = \frac{Z^{m+1}}{Rx + Sy}$, ipſum autem integrale inde oriundum eſt $\frac{1}{m+2} Z^{m+2}$.

20. Conſideremus iam formulam differentialem:

$$dx(\alpha + \beta x + \gamma y) + dy(\delta + \varepsilon x + \zeta y)$$

cuius factorem per quem multiplicata integrabilis fiat, inueſtigari oportet. Primum igitur liquet, ſi ſtatuatur

$$\alpha + \beta x + \gamma y = z \text{ et } \delta + \varepsilon x + \zeta y = u$$

inde fieri

$$\beta\,dx + \gamma\,dy = dz, \quad \varepsilon\,dx + \zeta\,dy = du$$

hincque

$$dx = \frac{\zeta\,dz - \gamma\,du}{\beta\zeta - \varepsilon\gamma}; \quad dy = \frac{\beta\,du - \varepsilon\,dz}{\beta\zeta - \varepsilon\gamma},$$

quibus valoribus ſubſtitutis noſtra formula in hanc transformatur

$$(\zeta z - \varepsilon u)\,dz + (\beta u - \gamma z)\,du$$

vbi quum iam quantitates, in quas dz et du ducuntur, ſint functiones homogeneae ipſarum z et u,

 per

per § antecedentem, multiplicator hanc formulam integrabilem reddens erit

$$\frac{1}{(\zeta z - \gamma u) z + (\beta u - \varepsilon z) u},$$

ſiue haec formula fiet integrabilis diuiſa per

$$(\alpha + \beta x + \gamma y)((\beta\zeta - \gamma\varepsilon)x + \alpha\zeta - \delta\gamma)$$
$$+ (\delta + \varepsilon x + \zeta y)((\beta\zeta - \gamma\varepsilon)y + \beta\delta - \alpha\varepsilon).$$

Videamus vero nunc an et alio modo, hunc multiplicatorem detegere liceat, ſtatuamus igitur eum $= \Phi$, quumque ſit

$$V = \Phi(\alpha + \delta p + \beta x + \varepsilon x p + \gamma y + \zeta y p) \text{ erit}$$
$$M = (\tfrac{d\Phi}{dx})(\alpha + \delta p + \beta x + \varepsilon x p + \gamma y + \zeta y p) + \Phi(\beta + \varepsilon p)$$
$$N = (\tfrac{d\Phi}{dy})(\alpha + \delta p + \beta x + \varepsilon x p + \gamma y + \zeta y p) + \Phi(\gamma + \zeta p)$$
$$P = \Phi(\delta + \varepsilon x + \zeta y).$$

Hinc ob $N - \frac{dP}{dx} = 0$, fiet

$$\Phi(\gamma - \varepsilon) + (\tfrac{d\Phi}{dy})(\alpha + \beta x + \gamma y) - (\tfrac{d\Phi}{dx})(\delta + \varepsilon x + \zeta y) = 0$$

ex qua aequatione valorem ipſius Φ quaerere oportet. Verum enimuero quia infiniti valores pro Φ ſine dubio dantur, qui huic aequationi ſatisfaciant, congruum erit pro Φ aliquem valorem aſſumere, eumque examinare, an conditioni noſtrae ſatisfaciat. Quandoquidem vero caſu $\alpha = 0$ et $\delta = 0$, multiplicator eſſe debeat

$$\frac{1}{(\beta x + \gamma y) x + (\varepsilon x + \zeta y) y},$$

inde rationem adipiſcimur pro noſtro caſu ſupponendi

$$\Phi = \frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma y)(x + m) + (\delta + \varepsilon x + \zeta y)(y + n)}.$$

Hinc

Hinc vero fit

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = (-\beta(x+m) - (\alpha+\beta x+\gamma y) - \varepsilon(y+n))\Phi^2$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = (-\gamma(x+m) - (\delta+\varepsilon x+\zeta y) - \zeta(y+n))\Phi^2$$

vnde

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)(\alpha+\beta x+\gamma y) - \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)(\delta+\varepsilon x+\zeta y) = \Phi(\varepsilon-\gamma) =$$

$$\Phi^2\left(\begin{array}{l}\varepsilon(y+n)(\delta+\varepsilon x+\zeta y)+\beta(x+m)(\delta+\varepsilon x+\zeta y)-\gamma(x+m)(\alpha+\beta x+\gamma y)\\ \qquad -\zeta(y+n)(\alpha+\beta x+\gamma y)\end{array}\right)$$

fieri igitur debet

$$-(\alpha+\beta x+\gamma y)(\varepsilon(x+m)+\zeta(y+n)) + (\delta+\varepsilon x+\zeta y)(\gamma(y+n)+\beta(x+m)) = 0.$$

ſeu

$$(\delta+\varepsilon x+\zeta y)(\beta m+\gamma n+\beta x+\gamma y) - (\alpha+\beta x+\gamma y)(\varepsilon m+\zeta n+\varepsilon x+\zeta y) = 0.$$

Quae conditio manifeſte impletur, ſtatuendo

$$\beta m+\gamma n = \alpha \text{ et } \varepsilon m+\zeta n = \delta,$$

vnde obtinemus

$$m = \frac{\alpha\zeta-\delta\gamma}{\beta\zeta-\varepsilon\gamma} \text{ et } n = \frac{\beta\delta-\alpha\varepsilon}{\beta\zeta-\varepsilon\gamma}.$$

Per ſe autem euidens eſt, hunc multiplicatorem cum prius inuento prorſus coincidere. Vlterius vero ob

$$\int Mdx = \int dx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)(\alpha+\beta x+\gamma y)+\int dy\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)(\delta+\varepsilon x+\zeta y)+\int\Phi(\beta dx+\zeta dy)$$

$$= \int\left(dx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)+dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)\right)(\alpha+\beta x+\gamma y)+\int\Phi(\beta dx+\gamma dy),$$

erit

$$\int M\,dx = \Phi(\alpha+\beta x+\gamma y),$$

 ſimili

ſimili vero modo probatur eſſe

$$\int N\, dx = \Phi(\delta + \varepsilon x + \zeta y).$$

21. Si propoſita fuerit ſequens aequatio differentialis:

$$X = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} \ldots + \frac{L\,d^n y}{dx^n}$$

cuius integrale quaerendum ſit, quum iſta aequatio per ſe non ſit integrabilis, inueſtigandus eſt multiplicator eam integrabilem reddens. Hunc in finem, ante omnia obſeruare licet, ſi detur aliquis eiusmodi multiplicator, qui functio ſit ipſius x tantum, isque ſtatuatur $= \Phi$, totum negotium eo redire, vt formula

$$\Phi\, dx\,(Ay + Bp + Cq + Dr \ldots + Lu)$$

ſit integrabilis, quia tum formula $\Phi X dx$ per ſe integrationem admittit. At pro litteris, M, N, P etc. ſequentes obtinebimus valores:

$$M = \frac{d\Phi}{dx}(Ay + Bp + Cq \ldots + Lu)$$

$$N = A\Phi;\; P = B\Phi;\; Q = C\Phi \text{ etc.}$$

quia igitur pro integrabilitate eſſe debet

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

inde ſequitur fore

$$A\Phi - \frac{B\,d\Phi}{dx} + \frac{C\,dd\Phi}{dx^2} - \frac{D\,d^3\Phi}{dx^3} + \text{etc.} = 0.$$

Vt autem valorem idoneum pro Φ inueniamus, ſupponamus $\Phi = \int z\, dx$, adeo vt ſit z quoque functio

ctio ipſius x, et pro $\Phi, d\Phi$ etc. eorum valoribus ſuffectis, habebimus

$$A z - \frac{B dz}{dx} + \frac{C ddz}{dx^2} - \frac{D d^3 z}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

quae aequatio quum prorſus congruat cum prius allata, ſtatui omnino poteſt $z = \lambda \Phi$, deſignante λ numerum conſtantem, tum vero habebitur

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = \lambda dx, \text{ ſeu } \Phi = e^{\lambda x},$$

conſtantem enim adiiciendum tuto negligere licet. Subſtituto autem hoc valore pro Φ in aequatione ſuperiori nihilo aequanda et tota aequatione per $e^{\lambda x}$ diuiſa, prodit

$$A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 \ldots \pm L\lambda^n = 0$$

ex cuius aequationis reſolutione, tot inueniri debent valores pro λ, quoti gradus fuerit aequatio differentialis propoſita. Multiplicator igitur quaeſitus noſtrae aequationis, erit $\Phi = e^{\lambda x}$ ipſum autem integrale habebitur

$$A'y + \frac{B'dy}{dx} + \frac{C'ddy}{dx^2} + \frac{D'd^3y}{dx^3} \ldots + \frac{K'd^{n-1}y}{dx^{n-1}} = e^{-\lambda x} \int e^{\lambda x} . X dx$$

poſito nimirum

$$A' = \frac{A}{\lambda};\ B' = \frac{\lambda B - A}{\lambda^2};\ C' = \frac{\lambda^2 C - \lambda B + A}{\lambda^3} \text{ etc.}$$

Quum vero nunc integrale inuentum ſimilis ſit formae ac aequatio propoſita, facile apparet, quomodo integrationem vlterius proſequi liceat, cui negotio in praeſenti immorari neceſſe non eſt, quum haec

haec aequatio iam antea accurate ſit pertractata. Notari autem meretur eſſe

$$\int M\,dx = \int d\Phi\,(Ay + Bp + Cq + Dr + \text{etc.})$$
$$= \int \lambda e^{\lambda x} dx (Ay + Bp + Cq + Dr + \text{etc.})$$
$$= \lambda e^{\lambda x}(A'y + B'p + C'q + D'r + \text{etc.})$$

atque

$$\int N\,dx = \int A\,\Phi\,dx = A' e^{\lambda x}$$
$$\int^{(2)} N\,dx - \int P\,dx = \int (A' - B) e^{\lambda x} dx = B' e^{\lambda x}$$
$$\int^{(3)} N\,dx - \int^{(2)} P\,dx + \int Q\,dx = \int (B' - C) e^{\lambda x} dx = C' e^{\lambda x} \text{ etc.}$$

22. Operae autem pretium nunc quoque eſt, inueſtigare multiplicatorem huius aequationis differentialis

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Cx^2 ddy}{dx^2} + \frac{Dx^3 d^3y}{dx^3} \ldots + \frac{Lx^m d^m y}{dx^m}$$

qui ſi ponatur $= \Phi$ et conſideretur vt functio ipſius x tantum, habebimus

$$V = \Phi(Ay + Bxp + Cx^2 q + Dx^3 r \ldots + Lx^m u)$$

vnde ſequentes prodeunt valores:

$$M = \tfrac{d\Phi}{dx}(Ay + Bxp + Cx^2 q + Dx^3 r \ldots + Lx^m u)$$
$$+ \Phi(Bp + 2Cxq + 3Dx^2 r + \ldots + mLx^{m-1} u)$$
$$N = A\Phi;\; P = B\Phi x;\; Q = C\Phi x^2;\; R = D\Phi x^3 \text{ etc.}$$

Quum nunc criterium integrabilitatis, hac exprimatur aequatione

$$N - \tfrac{dP}{dx} + \tfrac{ddQ}{dx^2} - \tfrac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

pro

pro N, P, Q etc. eorum valores ſubſtituendo, aequationem obtinebimus, ex qua valor multiplicatoris Φ determinari poterit. Quo autem hoc facilius procedat, notaſſe iuuabit, ſi in genere ponatur $U = \Phi x^m$, tum vero quoque $x^m = v$, eſſe

$$d^m U = v\, d^m \Phi + m\, dv\, d^{m-1}\Phi + \frac{m(m-1)}{1.2} ddv.\, d^{m-2}\Phi + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} d^3 v.\, d^{m-3}\Phi + \text{etc.}$$

atque

$$d^n v = m(m-1)(m-2)\ldots(m+1-n)x^{m-n}dx^n,$$

quamobrem nunc erit

$$d^m U = x^m d^m \Phi + m^2 x^{m-1} dx d^{m-1}\Phi + \frac{m^2(m-1)^2}{1.2} x^{m-2} dx^2 d^{m-2}\Phi + \frac{m^2(m-1)^2(m-2)^2}{1.2.3} x^{m-3} dx^3 d^{m-3}\Phi + \text{etc.}$$

Huius igitur formulae ope, criterium integrabilitatis ſequentem nobis praebebit aequationem:

$$\begin{array}{llllll}
0 = A\Phi & -B\frac{x\,d\Phi}{dx} & +C\frac{x^2 dd\Phi}{dx^2} & -D\frac{x^3 d^3\Phi}{dx^3} & +E\frac{x^4 d^4\Phi}{dx^4} & -\text{etc.} \\
-B & +4C & -9D & +16.E & -25.F & \\
+\frac{4.1}{1.2}C & -\frac{9.4}{1.2}D & +\frac{16.9}{1.2}E & -\frac{25.16}{1.2}F & +\frac{36.25}{1.2}G & \\
-\frac{9.4.1}{1.2.3}D & +\frac{16.9.4}{1.2.3}E & -\frac{25.16.9}{1.2.3}F & +\frac{36.25.16}{1.2.3}G & -\frac{49.36.25}{1.2.3}H & \\
+\frac{16.9.4.1}{1.2.3.4}E & -\frac{25.16.9.4}{1.2.3.4}F & +\text{etc.} & -\text{etc.} & +\text{etc.} & \\
\text{etc.} & \text{etc.} & & & &
\end{array}$$

vbi iam progreſſionis lex pro omnibus terminis ſatis eſt manifeſta. Verum ex hac aequatione nihil aliud concludi poteſt, niſi quod Φ per huiusmodi aequationem determinetur:

$$A'\Phi + B'\frac{x\,d\Phi}{dx} + C'\frac{x^2\,dd\Phi}{dx^2} + \text{etc.} = 0$$

leui autem adhibita attentione liquet, ſtatui poſſe $\Phi = x^\lambda$, hunc igitur valorem introducendo, in aequatione ſuperiori ex criterio integrabilitatis deducta, conſequemur

$$\begin{aligned}0 = A - B(\lambda+1) + C\lambda(\lambda+1) + 4\lambda C + 2C - D\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\\ - 9D\lambda(\lambda-1) - 18D\lambda - 6D + E\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\\ + 16E\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 72E\lambda(\lambda-1) + 96E\lambda + 24E - \text{etc.}\end{aligned}$$

quae ad hanc reducitur

$$\begin{aligned}0 = A - B(\lambda+1) + C(\lambda+1)(\lambda+2) - D(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\\ + E(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)\ldots \pm L(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m).\end{aligned}$$

Si igitur ex hac aequatione ſinguli valores ipſius λ inueſtigentur, vnaquaeque huiusmodi expreſſio x^λ, pro multiplicatore idoneo formulae noſtrae differentialis propoſitae habenda eſt, integratione autem actu inſtituta, habebimus:

$$x^{\lambda+1}\left(A'y + B'\frac{x\,dy}{dx} + C'\frac{x^2\,ddy}{dx^2} + D'\frac{x^3\,d^3y}{dx^3}\ldots + L\frac{x^{m-1}\,d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right) = \int x^\lambda . X\,dx$$

poſitis ſcilicet

$A = (\lambda+1)A'$	$A' = \frac{A}{\lambda+1}$
$B = (\lambda+2)B' + A'$	$B' = \frac{B}{\lambda+2} - \frac{A}{(\lambda+1)(\lambda+2)}$
$C = (\lambda+3)C' + B'$	$C' = \frac{C}{\lambda+3} - \frac{B}{(\lambda+3)(\lambda+2)} + \frac{A}{(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)}$
etc.	etc.

Quoniam vero nunc integrale emergens ſimilis eſt formae, ac ipſa aequatio differentialis propoſita, mox

mox liquet quomodo integratio vlterius continuari poſſit, vbi quidem notari meretur, ſi ex aequatione vnde λ determinatur, illa tot ſortiatur valores diuerſos, quoti gradus aequatio differentialis propoſita eſt, inde fieri vt pro ſingulis valoribus ipſius λ inueniantur aequationes differentiales gradus proxime inferioris, per quarum igitur debitam inter ſe combinationem, aequatio tandem eruetur, quae ſolas quantitates finitas x et y inuoluit. Verum huic rei explicandae diutius inhaerere minus neceſſe ducimus, praeprimis quod artificia in huius aequationis integratione adhibenda, iam accurate ſint expoſita. Vid. Illuſtr. *Euleri* Calcul. Integ. Vol. II. p. 483. et ſeqq.

23. Pro formula differentiali:

$$ddy + K\,dy\,dx + L\,y\,dx^2$$

vbi K et L quascunque functiones ipſius x deſignant, quaeratur iam multiplicator Φ eam integrabilem reddens. Quum vero ſit

$$V = \Phi(q + Kp + Ly), \text{ erit}$$

$$M = \left(\tfrac{d\Phi}{dx}\right)(q + Kp + Ly) + \Phi\left(p\tfrac{dK}{dx} + y\tfrac{dL}{dx}\right)$$

$$N = \left(\tfrac{d\Phi}{dy}\right)(q + Kp + Ly) + \Phi L$$

$$P = \left(\tfrac{d\Phi}{dp}\right)(q + Kp + Ly) + \Phi K;\ Q = \Phi.$$

At pro integrabilitate formulae propoſitae habetur

$$N - \tfrac{dP}{dx} + \tfrac{ddQ}{dx^2} = 0$$

ſubſtitutis igitur valoribus ſupra inuentis, hanc conſequemur aequationem:

 Φ(L

$$\Phi(\mathrm{L}-\tfrac{d\mathrm{K}}{dx})-\mathrm{K}(\tfrac{d\Phi}{dx})+(\mathrm{L}y+2q)(\tfrac{d\Phi}{dy})-(\tfrac{y\,d\mathrm{L}}{dx}+p(\mathrm{L}+\tfrac{d\mathrm{K}}{dx})+2\mathrm{M}q)(\tfrac{d\Phi}{dp})$$
$$+(\tfrac{dd\Phi}{dx^2})+2p(\tfrac{dd\Phi}{dx\,dy})-(\tfrac{dd\Phi}{dx\,dp})(\mathrm{L}y+\mathrm{K}p-q)+pp(\tfrac{dd\Phi}{dy^2})$$
$$-(\tfrac{dd\Phi}{dy\,dp})(\mathrm{L}yp+\mathrm{K}pp-pq)-(\tfrac{dd\Phi}{dp^2})(\mathrm{L}yq+\mathrm{K}pq)=0.$$

Huic aequationi quum variis modis ſatisfieri poſſit, caſus nonnullos particulares contemplabimur pro Φ idoneos valores exhibentes. horum vero ſine dubio ſimpliciſſimus eſt, quo Φ ſupponitur tantum eſſe functio ipſius x, pro quo igitur habebimus

$$\Phi(\mathrm{L}-\tfrac{d\mathrm{K}}{dx})-\tfrac{\mathrm{K}\,d\Phi}{dx}+\tfrac{dd\Phi}{dx^2}=0$$

cuius aequationis ope ſi Φ determinari poſſit, integrale formulae noſtrae propoſitae inuenitur:

$$\Phi\,dy+y(\Phi\,\mathrm{K}\,dx-d\Phi)$$

quae formula nunc facile quoque vlteriorem integrationem admittit. Si autem denuo quaeratur multiplicator aequationem

$$\tfrac{dd\Phi}{dx^2}-\tfrac{\mathrm{K}\,d\Phi}{dx}+\Phi(\mathrm{L}-\tfrac{d\mathrm{K}}{dx})=0$$

integrabilem reddens, mox patebit cum hac aequatione contineri

$$\tfrac{dd\psi}{dx^2}+\tfrac{\mathrm{K}\,d\psi}{dx}+\mathrm{L}\,\psi=0,$$

vnde ſi formula noſtra propoſita fuerit $=0$, nullum eſt dubium, quin vti Φ ſit multiplicator integrabilem reddens formulam

$$ddy+\mathrm{K}\,dy\,dx+\mathrm{L}y\,dx^2=0$$

ita viciſſim quoque formula

$$dd\Phi-\mathrm{K}\,d\Phi\,dx+(\mathrm{L}-\tfrac{d\mathrm{K}}{dx})\Phi\,dx^2=0$$

inte-

integrabilis reddatur multiplicatore y. Si prior multiplicetur per Φ et poſterior per y, ſumta differentia prodibit

$$\Phi\, ddy - y\, dd\Phi + K(\Phi dy + y\, d\Phi)dx + y\Phi\, dK\, dx = 0, \text{ ſeu}$$

$$d.(\Phi dy - y\, d\Phi) + dx\, d.\, K\Phi y = 0, \text{ hincque integrando}$$

$$\Phi dy - y\, d\Phi + K\Phi y\, dx = C\, dx$$

quod eſt ipſum integrale modo inuentum.

24. Statuatur nunc $\Phi = Sy + Tp$, vbi S et T ſunt functiones ipſius x tantum, erit vero

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = y\frac{dS}{dx} + p\frac{dT}{dx};\ \left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = S;\ \left(\frac{d\Phi}{dp}\right) = T$$

$$\left(\frac{dd\Phi}{dx^2}\right) = y\frac{ddS}{dx^2} + p\frac{ddT}{dx^2};\ \left(\frac{dd\Phi}{dx\,dy}\right) = \frac{dS}{dx};\ \left(\frac{dd\Phi}{dx\,dp}\right) = \frac{dT}{dx}$$

$$\left(\frac{dd\Phi}{dy^2}\right) = 0;\ \left(\frac{dd\Phi}{dy\,dp}\right) = 0;\ \left(\frac{dd\Phi}{dp^2}\right) = 0.$$

His autem valoribus in aequatione noſtra criterium integrabilitatis exprimente ſubſtitutis, ſequens orietur aequatio:

$$(Sy + Tp)\left(L - \frac{dK}{dx}\right) - K\left(y\frac{dS}{dx} + p\frac{dT}{dx}\right) + S(Ly + 2q)$$
$$-T\left(y\frac{dL}{dx} + p\left(L + \frac{dK}{dx}\right) + 2Kq\right) + y\frac{ddS}{dx^2} + p\frac{ddT}{dx^2} + 2p\frac{dS}{dx} + \frac{dT}{dx}(q - Kp - Ly)$$
$$= 0$$

vbi ſi termini litteris y, p et q affecti ſeorſim nihilo aequentur, hae tres habebuntur aequationes:

I. $\left(L - \frac{dK}{dx}\right)S - K\frac{dS}{dx} + LS - T\frac{dL}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \frac{L\,dT}{dx} = 0$

II. $\left(L - \frac{dK}{dx}\right)T - K\frac{dT}{dx} - \left(L + \frac{dK}{dx}\right)T + \frac{ddT}{dx^2} + \frac{2dS}{dx} - \frac{K\,dT}{dx} = 0$

III. $2S - 2KT + \frac{dT}{dx} = 0$

 quae

quae in ſequentes contrahuntur:

$$\text{I. } \frac{ddS}{dx^2} - \frac{d.(SK + LT)}{dx} + 2LS = 0$$

$$\text{II. } \frac{ddT}{dx^2} - \frac{2d.(KT - S)}{dx} = ; \text{ III. } \frac{dT}{dx} - 2KT + S = 0.$$

Sponte autem liquet, binas poſteriores prorſus congruere, adeo vt totum negotium nunc eo redeat, vt ex prima et tertia aequatione valores litterarum S et T inueſtigentur. At quum eliminando S vel T ad aequationem differentialem perueniatur tertii gradus, quae quam ipſa propoſita multo difficilius ſoluitur, tenendum eſt huiusmodi multiplicatorem $Sy + Tp$ non niſi pro certis valoribus litterarum K et L adhibendum eſſe. Primum vero erit

$$K = \frac{S}{T} + \frac{dT}{2Tdx}, \text{ proinde } SK = \frac{SS}{T} + \frac{SdT}{2Tdx},$$

hinc autem fiet

$$\frac{ddS}{dx^2} - \frac{2SdS}{Tdx} + \frac{SSdT}{TTdx} - \frac{SddT}{2Tdx^2} - \frac{dSdT}{2Tdx^2} + \frac{SdT^2}{2TTdx^2} - \frac{LdT - TdL}{dx}$$
$$+ 2LS = 0,$$

quae commodius ita exprimitur:

$$d.LT - 2LT.\frac{Sdx}{T} = \frac{ddS}{dx} - d.\left(\frac{SS}{T} + \frac{SdT}{2Tdx}\right).$$

Si haec aequatio multiplicetur per $e^{-2\int\frac{Sdx}{T}}$, integrale inde orietur:

$$TLe^{-2\int\frac{Sdx}{T}} = e^{-2\int\frac{Sdx}{T}}\left(\frac{dS}{dx} - \frac{SdT}{2Tdx}\right) + C, \text{ hincque}$$

$$L = \frac{C}{T}e^{2\int\frac{Sdx}{T}} + \frac{dS}{Tdx} - \frac{SdT}{2TTdx}.$$

Si igitur propoſita fuerit huiusmodi aequatio:

$$\frac{ddy}{dx^2} + \left(\frac{S}{T} + \frac{dT}{2Tdx}\right)\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{C}{T}e^{2\int\frac{Sdx}{T}} + \frac{dS}{Tdx} - \frac{SdT}{2TTdx}\right) = 0$$

certum

certum eſt eam integrabilem reddi per hunc multiplicatorem $Sy + Tp$ et ipſum quidem integrale tum erit:

$$\frac{T\,dy^2}{2\,dx^2} + \frac{Sy\,dy}{dx} + \tfrac{1}{2}yy\left(C e^{2\int\frac{S\,dx}{T}} + \frac{SS}{T}\right) = \text{Conſt.}$$

quod poſito $C = 0$, in hanc ſatis concinnam abit formam:

$$TT\,dy^2 + 2\,TSy\,dy\,dx + yySS\,dx^2 = BT\,dx^2.$$

25. Tribuamus iam multiplicatori Φ huiusmodi formam:

$$\Phi = Ryy + Syp + Tpp, \text{ eritque}$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = y^2\frac{dR}{dx} + yp\frac{dS}{dx} + p^2\frac{dT}{dx}$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = 2yR + pS; \; \left(\frac{d\Phi}{dp}\right) = 2pT + yS$$

$$\left(\frac{dd\Phi}{dx^2}\right) = y^2\frac{ddR}{dx^2} + yp\frac{ddS}{dx^2} + p^2\frac{ddT}{dx^2}$$

$$\left(\frac{dd\Phi}{dx\,dy}\right) = 2y\frac{dR}{dx} + p\frac{dS}{dx}; \; \left(\frac{dd\Phi}{dx\,dp}\right) = 2p\frac{dT}{dx} + y\frac{dS}{dx}$$

$$\left(\frac{dd\Phi}{dy^2}\right) = 2R; \; \left(\frac{dd\Phi}{dy\,dp}\right) = S; \; \left(\frac{dd\Phi}{dp^2}\right) = 2T.$$

His valoribus in aequatione pro criterio integrabilitatis allata ſubſtitutis, iisque terminis ſeorſim nihilo aequatis, quae productis y^2, yp, p^2, yq, pq afficiuntur, ſequentes conſequemur aequationes:

I. $3.\,RL - d.\frac{(RK + SL)}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} = 0$

II. $4\frac{dR}{dx} - 2\,d.\frac{(SK + TL)}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} = 0$

III. $4R - 2(SK + TL) + \frac{dS}{dx} = 0$

IV. $2R - (SK + TL) + \frac{2\,dS}{dx} - \frac{3\,d.\,TK}{dx} + \frac{ddT}{dx^2} = 0$

V. $3S - 6TK + 2\frac{dT}{dx} = 0$

Harum

Harum II et III ſtatim plane coincidentes habentur, deinde vero ſi ex 2. IV ſubtrahatur III, prodibit

$$\frac{3\,dS}{dx} - 6\,\frac{d.\,TK}{dx} + 2\,\frac{ddT}{dx^2} = 0$$

quae iam manifeſto praebet differentiale aequationis quintae, quocirca determinatio quantitatum R, S, T ex his tribus aequationibus petenda eſt:

$$\text{I.}\quad 3\,RL - d.\frac{(RK + LL)}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} = 0$$

$$\text{II.}\quad 4\,R - 2\,(SK + TL) + \frac{dS}{dx} = 0$$

$$\text{III.}\quad 3\,S - 6\,TK + 2\,\frac{dT}{dx} = 0.$$

Si functiones R, S, T pro datis habentur, tum vero quaeratur, quales K et L ſint functiones ipſius x vt formula

$$ddy + K\,dy\,dx + L\,y\,dx^2,\ \text{per}$$

$$Ry^2 + Syp + Tpp$$

fiat integrabilis, ſtatim obtinebimus

$$K = \frac{S}{2\,T} + \frac{dT}{3\,T\,dx}\ \text{et}$$

$$L = \frac{2\,R - SK}{T} + \frac{dS}{T\,dx} = \frac{2\,R}{T} - \frac{SS}{2\,TT} - \frac{S\,dT}{3\,TT\,dx} + \frac{dS}{T\,dx}$$

praeterea autem requiritur, vt huic quoque ſatisfiat aequationi;

$$\frac{ddR}{dx^2} - d.\frac{(RK + SL)}{dx} + 3\,RL = 0$$

adeo vt ipſa quantitas R, iam per S et T certa ratione determinetur. Plures caſus multiplicatorum formulae

$$ddy + K\,dy\,dx + L\,y\,dx^2$$

adferre

adferre ſuperuacaneum eſt, pro quacunque enim multiplicatoris forma, ope aequationis §. 23. allatae, tot aequationes inuenire licet, quot requiruntur ad ipſum multiplicatorem perfecte determinandum.

26. Tranſeamus nunc ad formulas differentiales $V\,dx$ ita comparatas, vt functio V praeter x, binas alias variabiles y et z cum earum differentialibus quibuscunque inuoluat, poſito differentiali dx conſtante. Sit vero ex huiusmodi formularum numero propoſita ſequens

$$dx\left(1 - \frac{yz}{xx} + \frac{yp' + zp}{x}\right),$$

quam examinare oportet, vtrum integrabilis ſit nec ne? Si igitur ſtatuamus $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{dp}{dx} = q$, atque $\frac{dz}{dx} = p'$; $\frac{dp'}{dx} = q'$ nec non

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp$$
$$\mathfrak{N}\,dz + \mathfrak{P}\,dp'$$

habebimus pro noſtro caſu,

$$M = \frac{2yz}{x^3} - \frac{(yp' + zp)}{x^2};\ N = \frac{p'}{x} - \frac{z}{xx};$$
$$\mathfrak{N} = \frac{p}{x} - \frac{y}{xx};\ P = \frac{z}{x};\ \mathfrak{P} = \frac{y}{x}.$$

Quocirca quum pro integrabilitate formulae propoſitae, binis ſequentibus aequationibus ſatisfaciendum ſit:

$$N - \frac{dP}{dx} = 0;\ \mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} = 0$$

valoribus ſubſtitutis, omnino patet has conditiones perfecte impleri, vnde certo indicio conſtat formulam noſtram integrabilem eſſe. Erit ſcilicet

$$\frac{p'}{x} - \frac{z}{xx} - d.\frac{z}{x} = 0 \text{ et } \frac{p}{x} - \frac{y}{xx} - d.\frac{y}{x} = 0$$

 Ipſum

Ipſum autem integrale formulae propoſitae vti cuivis conſtat erit $x - \frac{yz}{x}$. Praeterea etiam liquet has formulas $\int M\,dx$, $\int N\,dx$, $\int \mathfrak{N}\,dx$ eſſe integrabiles, eorum integralibus exiſtentibus

$$-\frac{yz}{x^2};\ \frac{z}{x} \text{ et } \frac{y}{x}.$$

27. Propoſita nunc eſto haec formula differentialis

$$dx(2yp' + 2zp + 2xpp' + xzq + xyq') = V\,dx$$

pro qua igitur erit

$$M = 2pp' + zq + yq';\ N = 2p' + xq';\ \mathfrak{N} = 2p + xq$$
$$P = 2z + 2xp';\ \mathfrak{P} = 2y + 2xp;\ Q = xz \text{ et } \mathfrak{Q} = xy.$$

Vt haec formula bis ſit integrabilis, ſeu vt $\int dx \int V\,dx$ verum conſtituat integrale, ſequentibus quatuor aequationibus ſatisfaciendum eſt:

$$\text{I. } N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0;\ \text{II. } P - \frac{2\,dQ}{dx} = 0$$
$$\text{III. } \mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} = 0;\ \text{IV. } \mathfrak{P} - \frac{2\,d\mathfrak{Q}}{dx} = 0.$$

Quum vero ſit

$$P - \frac{dQ}{dx} = z + xp';\ \text{erit}$$
$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 2p' + xq' - \frac{d.(z + xp')}{dx} = 0$$

tum vero $P - \frac{2\,dQ}{dx} = 0$. Porro autem ob

$$\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} = y + xp,\ \text{fiet}$$
$$\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} = 2p + xq - \frac{d.(y + xp)}{dx} = 0 \text{ et}$$
$$\mathfrak{P} - \frac{2\,d\mathfrak{Q}}{dx} = 0.$$

Ex

Ex quibus igitur inferri debet formulam noſtram bis eſſe integrabilem, et ipſum integrale reperietur eſſe xyz omiſſis conſtantibus adiiciendis. Conſtat autem nunc non ſolum formulas

$$\int M dx;\ \int N dx;\ \int \mathfrak{N} dx;\ \int P dx - \int^{(2)} N dx;\ \int \mathfrak{P} dx - \int^{(2)} \mathfrak{N} dx$$
$$\int Q dx - \int^{(2)} P dx + \int^{(3)} N dx;\ \int \mathfrak{Q} dx - \int^{(2)} \mathfrak{P} dx + \int^{(3)} \mathfrak{N} dx$$

fore integrabiles ſed etiam has ſequentes:

$$\int^{(2)} M dx;\ \int^{(2)} N dx;\ \int^{(2)} \mathfrak{N} dx;\ \int P dx;\ \int \mathfrak{P} dx$$
$$\int^{(2)} P dx - 2\int Q dx \text{ et } \int^{(2)} \mathfrak{P} dx - 2\int \mathfrak{Q} dx.$$

Erit enim

$$\int M dx = zp + yp';\ \int^{(2)} M dx = zy$$
$$\int N dx = z + xp';\ \int^{(2)} N dx = xz;\ \int P dx = 2zx$$
$$\int Q dx - \int^{(2)} P dx + \int^{(3)} N dx = 0;\ \int^{(2)} P dx - 2\int Q dx = 0$$
$$\int \mathfrak{N} dx = y + xp;\ \int^{(2)} \mathfrak{N} dx = xy;\ \int \mathfrak{P} dx = 2xy$$
$$\int \mathfrak{Q} dx - \int^{(2)} \mathfrak{P} dx + \int^{(3)} \mathfrak{N} dx = 0;\ \int^{(2)} \mathfrak{P} dx - 2\int \mathfrak{Q} dx = 0.$$

28. Quum exempla modo allata quam maxime ſint obuia nonnulla adiungere placet eiusmodi formularum differentialium, quae non quidem per ſe integrabiles ſunt, ope multiplicatorum tamen ad integrabilitatem perduci poterunt. Ponamus itaque propoſitam eſſe iſtam formulam differentialem:

$$dx(xz^2 + xy^2 - x^2zp' - x^2yp)$$

pro qua multiplicatorem Φ inueſtigari oportet, ita comparatum, vt

$$\Phi dx(xz^2 + xy^2 - x^2zp' - x^2yp)$$

 inte-

integrationem admittat. At ex iis quae ſupra monuimus, nunc deducitur eſſe:

$$M = \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)(xz^2 + xy^2 - x^2 zp' - x^2 yp)$$
$$+ \Phi(z^2 + y^2 - 2xzp' - 2xyp)$$
$$N = \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)(xz^2 + xy^2 - x^2 zp' - x^2 yp) + \Phi(2xy - x^2 p)$$
$$\mathfrak{N} = \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)(xz^2 + xy^2 - x^2 zp' - x^2 yp) + \Phi(2xz - x^2 p')$$
$$P = -x^2 y\Phi;\ \mathfrak{P} = -x^2 z\Phi.$$

Hinc ob conditiones integrabilitatis:

$$N - \frac{dP}{dx} = 0;\ \mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} = 0$$

ſequentes duae deducuntur aequationes:

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)(z^2 + y^2 - xzp' - xyp) + 4\Phi y + xy\frac{d\Phi}{dx} = 0$$
$$\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)(z^2 + y^2 - xzp' - xyp) + 4\Phi z + xz\frac{d\Phi}{dx} = 0.$$

Vnde obtinemus

$$dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + dz\left(\frac{d\Phi}{dz}\right) = \frac{-4\Phi(ydy + zdz) - \frac{xd\Phi}{dx}(ydy + zdz)}{z^2 + y^2 - xzp' - xyp}$$

atque ſi ſupponatur Φ eſſe functionem ipſorum y et z tantum prodibit

$$d\Phi = -\frac{\left(4\Phi + \frac{xd\Phi}{dx}\right)(ydy + zdz)}{z^2 + y^2 - xzp' - xyp}$$

ex quo colligitur

$d\Phi(z^2 + y^2) = -4\Phi(ydy + zdz)$ ſeu $\frac{d\Phi}{2\Phi} = -\frac{2(ydy + zdz)}{yy + zz}$,

hincque integrando

$$\tfrac{1}{2}L\Phi = L\frac{1}{z^2 + y^2},\ \text{ſiue}\ \Phi = \frac{1}{(z^2 + y^2)^2}.$$

Euidens

Euidens vero eſt hunc multiplicatorem quaeſtioni ſatisfacere, quum integrale noſtrae formulae inde prodeat $\frac{x^2}{z^2+y^2}$. Quod reliquas formulas integrabiles attinet, obſeruare licet eſſe:

$$\int M\,dx = \frac{x}{z^2+y^2};\quad \int N\,dx = \frac{-x^2 y}{(z^2+y^2)^2};\quad \int \mathfrak{N}\,dx = \frac{-x^2 z}{(z^2+y^2)^2}.$$

Siquidem multiplicator iam inuentus ſit $\Phi = \frac{1}{(z^2+y^2)^2}$, integrali exiſtente $\frac{x^2}{z^2+y^2}$, inde quidem mox patet, generalem formam multiplicatorum hac expreſſione contineri $\Phi = \frac{1}{(z^2+y^2)^2}\,\Gamma:\left(\frac{x}{\sqrt{(z^2+y^2)}}\right)$. Periculum igitur faciamus hunc multiplicatorem immediate ex noſtris formulis eruendi. Et quia Φ nunc conſiderari debeat vt functio trium variabilium x, y, z ponamus $\Phi = \Phi'\psi$, vbi Φ' binas tantum variabiles y et z inuoluere concipitur, ψ autem omnes tres x, y, z. Tum vero erit

$$dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = \psi\,dy\left(\frac{d\Phi'}{dy}\right) + \Phi'\,dy\left(\frac{d\psi}{dy}\right)$$

$$dz\left(\frac{d\Phi}{dz}\right) = \psi\,dz\left(\frac{d\Phi'}{dz}\right) + \Phi'\,dz\left(\frac{d\psi}{dz}\right) \text{ proinde}$$

$$dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + dz\left(\frac{d\Phi}{dz}\right) = \psi\,d\Phi' + \Phi'\,d\psi - \Phi'\,dx\left(\frac{d\psi}{dx}\right)$$

inde autem conſequimur

$$\psi\,d\Phi'(z^2+y^2-xzp'-xyp) + \Phi'\left(d\psi - dx\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\right)(z^2+y^2-xzp'-xyp)$$

$$= -4\Phi'\psi(y\,dy+z\,dz) - (\psi\,d\Phi'+\Phi'\,d\psi)(xyp+xzp'), \text{ ſiue}$$

$$\psi\,d\Phi'(z^2+y^2) + \Phi'\,d\psi(z^2+y^2) - \Phi'\,dx\left(\frac{d\psi}{dx}\right)(z^2+y^2-xyp-xzp')$$

$$= -4\Phi'\psi(y\,dy+z\,dz),$$

 quam

quam aequationem in binas ſequentes diſpertire licebit:

$$d\Phi'(z^2+y^2) = -4\Phi'(y\,dy+z\,dz)$$

$$d\psi(z^2+y^2) = dx\left(\frac{d\psi}{dx}\right)(z^2+y^2-xzp'-xyp).$$

Ex priori ſtatim habetur $\Phi' = \frac{1}{(z^2+y^2)^2}$ vt antea, poſterior vero praebet

$$-x\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\left(\frac{z\,dz+y\,dy}{zz+yy}\right) = d\psi - dx\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = dy\left(\frac{d\psi}{dy}\right)+dz\left(\frac{d\psi}{dz}\right).$$

Tentetur iam pro ψ huiusmodi forma $\psi = \Gamma : XV$, vbi X functionem incognitam ipſius x, V autem ipſorum y et z deſignat et differentiatione inſtituta, habebitur

$$-Vx\frac{dX}{dx}\left(\frac{z\,dz+y\,dy}{zz+yy}\right) = X\,dy\left(\frac{dV}{dy}\right)+X\,dz\left(\frac{dV}{dz}\right) = X\,dV$$

ex quo fit $\frac{x\,dX}{X\,dx} = -\frac{(z^2+y^2)\,dV}{(z\,dz+y\,dy)V}$

cui aequationi manifeſto ſatisfit, ponendo $\frac{dx}{x} = \frac{dX}{X}$, ſeu $X = x$ et

$$\frac{dV}{V} = -\frac{(z\,dz+y\,dy)}{zz+yy}, \text{ ſeu } V = \frac{1}{\sqrt{(yy+zz)}},$$

ex quo forma generalis multiplicatoris nunc erit

$$\Phi = \frac{1}{(yy+zz)^2}\,\Gamma : \left(\frac{x}{\sqrt{(yy+zx)}}\right).$$

Praeterea etiam obſeruaſſe iuuat, quantitatem ψ ex hac formula determinari

$$\frac{x\,d\Phi'}{4\Phi'}\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = dy\left(\frac{d\psi}{dx}\right)+dz\left(\frac{d\psi}{dz}\right),$$

vbi ſi ponatur $\psi = \Gamma : X\Phi'$, hanc conſequemur aequationem:

$\frac{1}{4} x \frac{d\Phi' dX}{dx} = X dy \left(\frac{d\Phi'}{dy}\right) + X dz \left(\frac{d\Phi'}{dy}\right) = X d\Phi'$, vnde
$\frac{dX}{X} = \frac{4dx}{x}$, $X = x^4$ et $\psi = \Gamma : \frac{x^4}{(zz+yy)^2}$,
et multiplicator inuentus omnino ad priorem redit.

29. Propoſita nunc ſit formula differentialis:

$$dx(yy+yz+zz) + dy(zz+xz+xx) + dz(xx+xy+yy)$$

et quia conſtat eam non eſſe integrabilem, operam dare oportet, vt inueniatur multiplicator, cuius ope integrabilis fiat. Sit hic multiplicator $= \Phi$, quapropter, ſi breuitatis gratia ponatur

$$yy+yz+zz+p(zz+xz+xx)+p'(xx+xy+yy) = \psi$$

erit

$$M = \psi \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \Phi(pz+2xp+yp'+2xp')$$
$$N = \psi \left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + \Phi(2y(1+p')+xp'+z); \quad P = \Phi(xx+zz+xz)$$
$$\mathfrak{N} = \psi \left(\frac{d\Phi}{dz}\right) + \Phi(2z(1+p)+xp+y); \quad \mathfrak{P} = \Phi(xx+xy+yy).$$

Criteria igitur integrabilitatis quum nunc praebeant:

$$N - \frac{dP}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} = 0$$

has binas adipiſcemur aequationes:

$$\text{I.} \quad \psi\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) - \frac{d\Phi}{dx}(xx+xz+zz) + 2\Phi(y-x+p'(y-z)) = 0$$
$$\text{II.} \quad \psi\left(\frac{d\Phi}{dz}\right) - \frac{d\Phi}{dx}(xx+xy+yy) + 2\Phi(z-x+p(z-y)) = 0$$

quarum differentia dat

$$\psi\left(\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) - \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)\right) - \frac{d\Phi}{dx}((z+y)(z-y)+x(z-y)) + 2\Phi(y-z)(1+p+p') = 0$$

conſe-

conſequenter

$$\frac{\Psi}{y-z}\left(\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)-\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)\right)+\frac{d\Phi}{dx}(x+y+z)+2\Phi(1+p+p')=0.$$

Hinc mox quidem innoteſcit, ſtatui poſſe

$$\frac{d\Phi}{\Phi}=-\frac{2(dx+dy+dz)}{x+y+z}, \text{ ſiue } \Phi=\frac{1}{(x+y+z)^2},$$

quum eo ipſo quoque fiat $\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)=\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)$, nec non vtraque conditio ſupra praeſcripta impleatur. Integrale autem formulae propoſitae hunc adhibendo multiplicatorem prodibit:

$$\frac{xy+xz+yz}{x+y+z}.$$

30. Quamuis multiplicator iam inuentus quaeſtioni ſatisfaciat, quum tamen et alii dentur, quibus idem perficere licet, inueſtigationem huius multiplicatoris ita inſtruamus, vt ad reliquos quoque perduxiſſe, cenſeri queat. Ex natura igitur quaeſtionis quum facile perſpiciatur pro multiplicatore Φ commode adhiberi poſſe functionem homogeneam ipſorum x, y, z, inde hanc elicimus aequationem:

$$n\Phi=x\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)+y\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)+z\left(\frac{d\Phi}{dz}\right).$$

Per aequationes vero noſtras I et II conſequimur

$$\Psi\left(y\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)+z\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)\right)=\frac{d\Phi}{dx}(xxy+xxz+yzz+yyz+2xyz)$$
$$-2\Phi(yy+zz-xy-xz+p(zz-zy)+p'(yy-zy))$$

ſimilique modo

$$\frac{d\Psi}{dx}\left(dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)+dz\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)\right)=\Psi\left(\frac{d\Phi}{dx}-\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right)=\frac{d\Phi}{dx}(p(xx+zz+xz)+p'(xx+xy+yy))$$
$$-2\Phi((y-x)p+(z-x)p')$$

quae

quae in hanc transformatur

$$\psi x\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = \frac{d\Phi}{dx}(xyy + xyz + xzz) + 2\Phi(p(yx - xx) + p'(xz - xx))$$

vnde nunc deducitur

$$n\Phi\psi = \psi\left(x\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + y\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + z\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)\right) = \frac{d\Phi}{dx}(x+y+z)(xy+xz+yz)$$
$$-2\Phi(yy+zy+yy+p(zz+xx-zy-xy)+p'(xx+yy-xz-yz)).$$

Si nunc vtrinque addantur $3\,\Phi\,\psi$, prodibit:

$$(n+3)\Phi\psi = \frac{d\Phi}{dx}(x+y+z)(xy+xz+yz) + \Phi\frac{dx}{dx}(yy+zz+3yz+2xy+2xz)$$
$$+\Phi\frac{dy}{dx}(x^2+z^2+3xz+2xy+2yz) + \Phi\frac{dz}{dx}(x^2+y^2+3xy+2xz+2yz).$$

Leui autem adhibita attentione, quum deprehendatur eſſe

$$\psi dx = d.(x+y+z)(xy+xz+yz) - 2(xy+xz+yz)(dx+dy+dz)$$

coefficiens autem ipſius $\frac{\Phi}{dx}$ fit

$$= d.(x+y+z)(xy+xz+yz),$$

noſtra aequatio nunc concinnam hanc conſequetur formam:

$$(n+2)d.(x+y+z)(xy+xz+yz)$$
$$-2(n+3)(xy+xz+yz)(dx+dy+dz) = \frac{d\Phi}{\Phi}(x+y+z)(xy+xz+yz)$$

ex quo denique deducimus:

$$L.\Phi = (n+2)L.(x+y+z)(xy+xz+yz) - 2(n+3)L(x+y+z),$$

ſiue

$$\Phi = \frac{(xy+xz+yz)^{n+2}}{(x+y+z)^{n+4}}.$$

 Hinc

Hinc quidem mox apparet, formas ſimpliciſſimas multiplicatorum obtineri, ſi ſtatuatur n vel $=-2$, vel $n=-4$, priori caſu fit

$$\Phi = \frac{1}{(x+y+z)^2},$$

poſteriori autem

$$\Phi = \frac{1}{(xy+xz+yz)^2}.$$

Praeterea etiam caſus notari meretur quo $n=-3$, quum tunc multiplicator fiat

$$\Phi = \frac{1}{(x+y+z)(xy+xz+yz)}$$

qui ex natura functionum homogenearum immediate deducitur, vti infra oſtendendi dabitur locus. Notandum autem eſt hunc vltimum multiplicatorem, integrale praebere Logarithmicum, quum ſit pro iſto caſu

$$\frac{\psi dx}{\Phi} = \frac{d.(x+y+z)(xy+xz+yz)}{(x+y+z)(xy+xz+yz)} - \frac{2(dx+dy+dz)}{x+y+z}, \text{ hincque}$$

$$\int \frac{\psi dx}{\Phi} = \text{L}. \frac{xy+xz+yz}{x+y+z}.$$

Denique etiam notari meretur, eſſe ob

$$\psi\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = \frac{d\Phi}{dx}(yy+yz+zz) + 2\Phi((y-x)p+(z-x)p')$$

$$\text{M}dx = \psi dx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \Phi dx((2x+z)p+(2x+y)p')$$

$$= d\Phi(yy+yz+zz) + \Phi((2y+z)dy+(2z+y)dz)$$

ideoque

$$\int \text{M}dx = \Phi(yy+yz+zz).$$

Simili ratione habebitur

$\int \text{N}dx = \Phi(xx+zz+xz)$ et $\int \mathfrak{N}dx = \Phi(xx+yy+xy)$.

31. Conſideremus nunc formulam differentialem homogeneam

$$R\,dx + S\,dy + T\,dz$$

pro qua multiplicator idoneus eam integrabilem reddens exquiri debeat, adeo vt ſi is ponatur Φ, ſit formula

$$\Phi(R\,dx + S\,dy + T\,dz)$$

integrabilis. Ex natura autem quaeſtionis intelligitur pro Φ aſſumi poſſe functionem homogeneam ipſarum x, y, z, tunc vero ſi ponatur

$$\Phi R = X,\ \Phi S = Y,\ \Phi T = Z$$

erunt quoque X, Y, Z functiones homogeneae eiusdem dimenſionis ipſarum x, y, z. Per naturam autem functionum homogenearum iam habebimus:

$$mX = x\left(\frac{dX}{dx}\right) + y\left(\frac{dX}{dy}\right) + z\left(\frac{dX}{dz}\right)$$
$$mY = x\left(\frac{dY}{dx}\right) + y\left(\frac{dY}{dy}\right) + z\left(\frac{dY}{dz}\right)$$
$$mZ = x\left(\frac{dZ}{dx}\right) + y\left(\frac{dZ}{dy}\right) + z\left(\frac{dZ}{dz}\right).$$

Atqui ob integrabilitatem formulae

$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ eſſe debet

$$\left(\frac{dX}{dy}\right) = \left(\frac{dY}{dx}\right);\ \left(\frac{dX}{dz}\right) = \left(\frac{dZ}{dx}\right);\ \left(\frac{dY}{dz}\right) = \left(\frac{dZ}{dy}\right)$$

his igitur aequalitatibus in vſum vocatis aequationes ſuperiores in ſequentes transformantur:

$$mX = x\left(\frac{dX}{dx}\right) + y\left(\frac{dY}{dx}\right) + z\left(\frac{dZ}{dx}\right)$$
$$mY = x\left(\frac{dX}{dy}\right) + y\left(\frac{dY}{dy}\right) + z\left(\frac{dZ}{dy}\right)$$
$$mZ = x\left(\frac{dX}{dz}\right) + y\left(\frac{dY}{dz}\right) + z\left(\frac{dZ}{dz}\right)$$

ex quibus deducitur

$$m(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = x\,dX + y\,dY + z\,dZ$$

cuius aequationis integrale poſito $m = -1$, manifeſto eſt $Xx + Yy + Zz = A$, vnde $\Phi = \frac{A}{Rx + Sy + Tz}$, vbi pro A tuto ponere licet 1. Pro formulis igitur differentialibus homogeneis tres variabiles inuolventibus, ſimilem iam nacti ſumus proprietatem, ac pro huiusmodi formulis, binas tantum variabiles inuoluentibus, ex indole autem demonſtrationis noſtrae haud obſcure cognoſcitur, eam ad formulas differentiales functiones homogeneas eiusdem dimenſionis, quotcunque variabilium x, y, z, u, v etc. inuoluentes, patere. Si ſcilicet proponatur huiusmodi formula differentialis

$$U\,du + V\,dv + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

vbi U, V, X etc. ſunt functiones homogeneae ipſarum u, v, x etc. certo conſtat hanc formulam integrabilem reddi, ſi diuidatur per

$$Uu + Vv + Xx + Yy + Zz.$$

32. Ex iis quae iam in medium adduximus exemplis formularum differentialium tres quantitates variabiles inuoluentium, facile perſpicitur quomodo tractari debeant formulae differentiales in quibus functiones quatuor adeo vel adhuc plurium variabilium occurrunt. Pro formulis autem huiusmodi complicatioribus exempla heic adferre eo minus e re erit, quod rariores ſint caſus, quibus Analyſis ad reſolutionem

tionem huiusmodi formularum perducat. Praeterea vero animo quidem nobis proponebamus, aliis atque aliis exemplis ea breuiter illuſtrare, quae de criteriis integrabilitatis formularum differentialium duplicatarum diſſeruimus; quum vero praeter cogitationem opella noſtra iam dum nimium excreuerit, quae hac de re monenda reſtant, in commodiorem differre cogimur occaſionem.

DEMONSTRATIO THEOREMATIS ANALYTICI A CELEB. *LA GRANGE* INVENTI.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

I.

Theorema hoc elegantiſſimum et attentione quam maxime dignum, a Cel. *la Grange* in Tomo XXIV. Actorum Academiae Scientiarum Berolinenſis p. 275 propoſitum eſt. Occaſio autem qua in eius cognitionem peruenit, inde Ipſi ſubminiſtrata eſſe videtur, quod in modum inquiſiturus, quo cuiuscunque aequationis radices per ſeries exprimi poſſint, inuenerit, ſi pro aequatione generali:

$$o = a - b\,x + c\,x^2 - d\,x^3 + \text{etc. ponatur}$$

$$\xi = \frac{c\,x - d\,x^2 + e\,x^3 - \text{etc.}}{b},$$

tum aequationis propoſitae radicem p hac exprimi formula:

$$p = x + \xi x + \frac{d.\,\xi^2 x}{1.\,2\,d\,x} + \frac{d\,d.\,\xi^3 x}{1.\,2.\,3\,d\,x^2} + \frac{d^3.\,\xi^4 x}{1.\,2.\,3.\,4\,d\,x^3} + \text{etc.},$$

quin etiam eſſe:

$$p^m = x^m + m\left(\xi x^{m-1} + \frac{d.\,\xi^2 x^{m-1}}{2.\,d\,x} + \frac{d\,d.\,\xi^3 x^{m-1}}{2.\,3\,d\,x^2} + \frac{d^3.\,\xi^4 x^{m-1}}{2.\,3.\,4\,d\,x^3} + \text{etc.}\right)$$

ſubſti-

ſubſtituto nimirum poſt peractas differentiationes $\frac{a}{b}$ loco x. Hinc autem hoc in genere deduxit Theorema: *propoſita aequatione generali*

$$\alpha - x + \Phi x = 0$$

ſi p *ſupponatur eſſe valor quicunque ipſius* x *praeſenti aequationi ſatisfaciens*, *ſemper erit*

$$\psi p = \psi x + \Phi x \psi' x + \frac{d.\Phi x^2.\psi' x}{2\, d\, x} + \frac{dd.\Phi x^3.\psi' x}{2.3\, d\, x^2} + \frac{d^3.\Phi x^4 \psi' x}{2.3.4\, d\, x^3} + \text{etc.}$$

deſignantibus $\psi' p$ et $\psi\ x$ functiones quaſcunque ſimiles ipſorum p et x, vbi autem differentiationibus abſolutis pro x debet ſubſtitui α. Quum igitur Celeb. huius Theorematis Auctor nullam loco allato eius attulerit demonſtrationem, tanto magis operae pretium erat in eam inquirere, quanto certius eſt hoc Theorema non ſolum ſua elegantia, ſed etiam vſu, quem per totam Analyſin habet ſingulari, ſe commendare. Veritate etenim huius Theorematis demonſtrata, non ſolum ea quae a Cel. *la Grange* in diſſertatione modo laudata, allata ſunt de radicibus aequationum per ſeries exprimendis, ſponte ſequuntur; ſed etiam plurimorum aliorum Problematum ſolutiones in poteſtate erunt.

II. Priusquam vero nunc Theorematis propoſiti demonſtrationem adgrediamur, ſequens praemittere neceſſum eſt Lemma, quippe cui demonſtratio noſtra praecipue innititur.

Lemma.

Lemma.

Si propoſitis duabus quibuscunque quantitatibus variabilibus y et z fuerit:

$$(A)\, y^m d^{m-1} z - m y^{m-1} d^{m-1}.\, yz + \tfrac{m(m-1)}{1.\,2} y^{m-2} d^{m-1}.\, y^2 z - \tfrac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3} y^{m-3} d^{m-1}.\, y^3 z \ldots \pm d^{m-1}.\, y^m z = 0$$

erit quoque

$$y^{m+1} d^m z - (m+1)\, y^m d^m.\, yz + \tfrac{(m+1)m}{1.\,2} y^{m-1} d^m.\, y^2 z - \tfrac{(m+1)m(m-1)}{1.\,2.\,3} y^{m-2} d^m y^3 z \ldots \mp d^m.\, y^{m+1} z = 0.$$

Demonſtratio.

Si quantitatis propoſitae (A) per hypotheſin nihilo aequalis, ſumatur differentiale illudque in y ducatur prodibit:

$$(C)\, y^{m+1} d^m.\, z - m y^m d^m.\, yz + \tfrac{m(m-1)}{1.\,2} y^{m-1} d^m.\, y^2 z - \tfrac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3} y^{m-2} d^m.\, y^3 z \ldots \pm y d^m.\, y^m z$$
$$+ m\, dy\, (y^m d^{m-1} z - (m-1)\, y^{m-1} d^{m-1} yz)$$
$$+ m\, dy \left(\tfrac{(m-1)(m-2)}{1.\,2} y^{m-2} d^{m-2}.\, y^2 z \ldots \mp y\, d^{m-1}.\, y^{m-1} z\right) = 0.$$

Deinde quum aequatio propoſita (A) generaliter vera ſupponatur quicquid ſignificet z, veritati quoque erit conſentanea, ſi in locum ipſius z ſubſtituatur yz, adeo vt iam ſit:

$$(B)\, y^m d^{m-1}.\, yz - m y^{m-1} d^{m-1}.\, y^2 z + \tfrac{m(m-1)}{1.\,2} y^{m-2} d^{m-1}.\, y^3 z - \tfrac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3} y^{m-3} d^{m-1}.\, y^4 z \ldots \pm d^{m-1} y^{m+1} z = 0$$

Si

Si vero nunc huius aequationis ſumatur differentiale orietur

$$(D)\ y^m d^m.yz - my^{m-1}d^m.y^2z + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}y^{m-2}d^m.y^3z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}y^{m-3}d^m.y^4z \ldots \pm d^m.y^{m+1}z$$
$$+ m\,dy(y^{m-1}d^{m-1}.yz - (m-1)y^{m-2}d^{m-1}.y^2z) + m\,dy\left(\frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2}y^{m-3}d^{m-1}.y^3z \ldots \mp d^{m-1}.y^m z\right) = 0$$

Facta nunc tali combinatione aequationis (D) cum ſuperiori (C), vt membrum prius aequationis (D) a priori ipſius (C), poſterius vero a poſteriori ſubtrahatur, prodibit:

$$y^{m+1}d^m.z - (m+1)y^m.d^m.yz + \frac{(m+1)m}{1.\ 2}y^{m-1}.d^m.y^2z - \frac{(m+1)m(m-1)}{1.\ 2.\ 3}y^{m-2}.d^m.y^3z \ldots \mp d^m.y^{m+1}z$$
$$+ m\,dy(y^m.d^{m-1}.z - my^{m-1}d^{m-1}yz + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}y^{m-2}d^{m-1}.y^2z) + m\,dy\left(-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}y^{m-3}d^{m-1}.y^3z \ldots \pm d^{m-1}.y^m z\right) = 0$$

poſterius autem aequationis inuentae membrum eſſe $= 0$, iam ſponte liquet, quum id nihil aliud ſit, quam ipſa formula (A) in $m\,dy$ ducta, conſequenter erit quoque

$$y^{m+1}d^m z - (m+1)y^m d^m.yz + \frac{(m+1)m}{1.\ 2}y^{m-1}d^m.y^2z - \frac{(m+1)m(m-1)}{1.\ 2.\ 3}y^{m-2}d^m.y^3z \ldots \mp d^m.y^{m+1}z = 0.$$

III. Simili ratione demonſtrari poteſt eſſe:

$$y^{m+2}d^{m+1}.z - (m+2)y^{m+1}d^{m+1}.yz + \frac{(m+2)(m+1)}{1.\ 2}y^m d^{m+1}y^2z - \frac{(m+2)(m+1)m}{1.\ 2.\ 3}y^{m-1}d^{m+1}.y^3z \ldots \pm d^{m+1}.y^{m+2}z = 0$$

 atque

atque adeo in genere

$$y^{m+n} d^{m+n-1}. z - (m+n) y^{m+n-1}. d^{m+n-1}. y z + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1.\ 2} y^{m+n-2} d^{m+n-2}. y^2 z \ldots \text{etc.} = 0$$

Si igitur formula (A) pro valore quocunque litterae m veritati fuerit conſentanea, nullum eſt dubium, quin vera quoque ſit, ſi in locum ipſius m ſubſtituatur $m+n$, deſignante n numerum quemcunque integrum poſitiuum. Quum autem poſito $m = 1$ oriatur aequatio identica $y\, d^0. z - d^0. y z = 0$, liquet quoque hinc in genere eſſe pro numero quocunque m integro et poſitiuo:

$$y^m d^{m-1}. z - m. y^{m-1} d^{m-1}. y z + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} y^{m-2} d^{m-1}. y^2 z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} y^{m-3} d^{m-1}. y^3 z \ldots \pm d^m. y^m z = 0$$

vbi vltimum membrum ſigno $+$ afficietur, ſi m fuerit numerus par, contra vero ſi impar.

IV. Loco Lemmatis allati, aliud multo generalius proponi potuiſſet ita expreſſum: *Si fuerit*

$$y^\lambda d^m. z - \lambda y^{\lambda-1} d^m. y z + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.\ 2} y^{\lambda-2} d^m. y^2 z - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.\ 2.\ 3} y^{\lambda-3} d^m. y^3 z + \text{etc.} = 0$$

erit quoque

$$y^{\lambda+1} d^{m+1}. z - (\lambda+1) y^\lambda d^{m+1}. y z + \frac{(\lambda+1)\lambda}{1.\ 2} y^{\lambda-1} d^{m+1}. y^2 z - \frac{(\lambda+1)(\lambda)(\lambda-1)}{1.\ 2.\ 3} y^{\lambda-2} d^{m+1}. y^3 z + \text{etc.} = 0.$$

Patet vero demonſtrationem huius Lemmatis, ſimili ratione adornari debere ac pro Lemmate praecedente, vt vero in genere liqueat eſſe:

$y^\lambda d^m$

$$y^\lambda d^m. z - \lambda y^{\lambda - 1} d^m. yz + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{1.\ 2} y^{\lambda - 2} d^m. y^2 z$$
$$- \frac{\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{1.\ 2.\ 3} y^{\lambda - 3} d^m. y^3 z + \text{etc.} = 0$$

neceſſum eſt, vt poſito $m = 0$ ſit

$$y^n d^0. z - n y^{n-1}. d^0. yz + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} y^{n-2}. d^0. y^2 z$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} y^{n-3}. d^0. y^3 z + \text{etc.} = 0$$

ſeu diuiſa tota aequatione per $y^n z$

$$1 - n + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \text{etc.} = 0$$

de quo iam nullum eſt dubium, quum haec expreſſio ſit $= (1 - 1)^n = 0$. Quum itaque ſit

$$y^n d^0. z - n y^{n-1} d^0. yz + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} y^{n-2} d^0. y^2 z$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} y^{n-3} d^0. y^3 z + \text{etc.} = 0$$

poſito $\lambda = n + m$, inde iam tuto inferri poteſt eſſe:

$$y^\lambda d^m. z - \lambda y^{\lambda - 1} d^m. yz + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{1.\ 2} y^{\lambda - 2} d^m. y^2 z$$
$$- \frac{\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{1.\ 2.\ 3} y^{\lambda - 3} d^m. y^3 z + \text{etc.} = 0$$

vbi obſeruandum eſt, quod quum pro n numerus quicunque accipi queat, Lemma hoc poſterius verum ſit, quicunque demum fuerit valor numeri λ.

V. Hiſce praemonitis ad demonſtrationem Theorematis laudati progrediamur.

Theorema.

Si deſignante $\phi\, x$ *functionem quamcunque datam ipſius* x, *fuerit* $t - x + \phi\, x = 0$, *tum ſi* ψx *et* ψt *deſignent*

deſignent functiones quaſcunque ſimiles ipſorum x *et* t, *atque ponatur* $\psi' t = \frac{d.\psi t}{d t}$ *erit*:

$$\psi x = \psi t + \phi t.\ \psi' t + \frac{d.\ \phi t^2.\ \psi' t}{1.\ 2.\ d t} + \frac{d\,d.\ \phi t^3\ \psi' t}{1.\ 2.\ 3\ d t^2} + \frac{d^3.\ \phi t^4\ \psi' t}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ d t^3} + \text{etc.}$$

Demonſtratio.

Quum ſit $t = x - \phi x$, ſi ψt ſignificet functionem quamcunque ipſius t, erit $\psi t = \psi (x - \phi x)$, eſt vero

$$\psi (x - \phi x) = \psi x - \phi x \psi' x + \frac{\phi x^2.\ d.\ \psi' x}{1.\ 2.\ d x} - \frac{\phi x^3.\ d d \psi' x}{1.\ 2.\ 3\ d x^2} + \text{etc.}$$

hinc ergo habetur

$$\psi t = \psi x - \phi x\, \psi' x + \frac{\phi x^2\ d.\ \psi' x}{1.\ 2.\ d x} - \frac{\phi x^3\ d\,d.\ \psi' x}{1.\ 2.\ 3\ d x^2} + \text{etc.}$$

Tum vero ſi loco ipſius ψt ſucceſſiue ſubſtituantur

$$\phi t\, \psi' t,\ \frac{d.\ \phi t^2 \psi' t}{1.\ 2\ d t},\ \frac{d d\ \phi t^3 \psi' t}{1.\ 2.\ 3\ d t^2},\ \text{etc.}$$

habebimus quoque

$$\phi t\, \psi' t = \phi x\, \psi' x - \frac{\phi x.\ d.\ \phi x \psi' x}{d x} + \frac{\phi x^2\ d\,d.\ \phi x \psi' x}{1.\ 2\ d x^2} - \frac{\phi x^3\ d^3.\ \phi x \psi' x}{1.\ 2.\ 3\ d x^3} + \text{etc.}$$

$$\frac{d.\ \phi t^2.\ \psi' t}{1.\ 2\ d t} = \frac{d.\ \phi x^2.\ \psi' x}{1.\ 2\ d x} - \frac{\phi x\, d d.\ \phi x^2\ \psi' x}{1.\ 2\ d x^2} + \frac{\phi x^2\ d^3.\ \phi x^2\ \psi' x}{1.\ 2.\ 1.\ 2\ d x^3} - \text{etc.}$$

$$\frac{d\,d.\ \phi t^3\ \psi' t}{1.\ 2.\ 3\ d t^2} = \frac{d\,d.\ \phi x^3 \psi' x}{1.\ 2.\ 3\ d x^2} - \frac{\phi x\ d^3.\phi x^3\ \psi' x}{1.\ 2.\ 3\ d x^3} + \frac{\phi x^2.\ d^4.\ \phi x^3\ \psi' x}{1.\ 2.\ 1.\ 2.\ 3\ d x^4} - \text{etc.}$$

etc.

Functionibus autem his ipſius t in vnam ſummam collectis obtinebimus:

$\psi' t +$

$$\psi t + \Phi t\, \psi' t + \frac{d.\Phi t^2 \psi' t}{1.2\, dt} + \frac{dd.\Phi t^3.\psi' t}{1.2.3\, dt^2} + \frac{d^3.\Phi t^4 \psi' t}{1.2.3.4\, dt^3} + \text{etc.} =$$

$$\begin{aligned}
&\psi x - \Phi x\, \psi' x + \frac{\Phi x^2.\, d\psi x}{1.2\, dx} - \frac{\Phi x^3.\, dd\psi' x}{1.2.3\, dx^2} + \frac{\Phi x^4\, d^3 \psi' x}{1.2.3.4\, dx^3} - \text{etc.}\\
&\quad + \Phi x\, \psi' x - \frac{\Phi x\, d.\Phi x\, \psi' x}{dx} + \frac{\Phi x^2\, dd.\Phi x\, \psi' x}{1.2\, dx^2} - \frac{\Phi x^3\, d^3.\Phi x\, \psi' x}{1.2.3\, dx^3} + \text{etc.}\\
&\qquad + \frac{d.\Phi x^2.\psi' x}{1.2\, dx} - \frac{\Phi x\, dd.\Phi x^2 \psi' x}{1.2\, dx^2} + \frac{\Phi x^2.\, d^3.\Phi x^2 \psi' x}{1.2.1.2\, dx^3} - \text{etc.}\\
&\qquad\quad + \frac{dd.\Phi x^3 \psi' x}{1.2.3\, dx^2} - \frac{\Phi x.\, d^3.\Phi x^3 \psi' x}{1.2.3\, dx^3} + \text{etc.}\\
&\qquad\qquad + \frac{d^3.\Phi x^4 \psi' x}{1.2.3.4\, dx^3} - \text{etc.}\\
&\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Si iam in Lemmate noſtro §. 11. loco y ſubſtituatur Φx et loco z, $\psi' x$ patet fore generatim

$$\Phi x^m d^{m-1} \psi' x - m\, \Phi x^{m-1} d^{m-1}.\Phi x\, \psi' x + \frac{m(m-1)}{1.2} \Phi x^{m-2} d^{m-1} \Phi x^2 \psi' x$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \Phi x^{m-3} d^{m-1}.\Phi x^3 \psi' x + \text{etc.} = 0$$

adeoque a parte dextra aequationis inuentae, terminos qui in iisdem lineis verticalibus collocantur ſe mutuo deſtruere, adeo vt ſolus remaneat terminus primus ψx, ex quo iam conſequitur eſſe

$$\psi x = \psi t + \Phi t.\ \psi' t + \frac{d.\Phi t^2 \psi' t}{1.2\, dt} + \frac{dd.\Phi t^3 \psi' t}{1.2.3\, dt^2}$$
$$+ \frac{d^3.\Phi t^4 \psi' t}{1.2.3.4\, dt^3} + \text{etc.}$$

VI. Si ſtatuatur $\psi x = x$, ideoque $\psi t = t$ et $\psi' t = 1$, habebitur

$$x = t + \Phi t + \frac{d\Phi t^2}{1.2\, dt} + \frac{dd.\Phi t^3}{1.2.3\, dt^2} + \frac{d^3.\Phi t^4}{1.2.3.4\, dt^3} + \text{etc.}$$

ideoque

$$\Phi x = x - t = \Phi t + \frac{d.\Phi t^2}{2.dt} + \frac{dd.\Phi t^3}{6.dt^2} + \frac{d^3.\Phi t^4}{24.dt^3} + \text{etc.}$$

quod etiam ex Theoremate noſtro, ſtatim deducitur, ponendo $\psi x = \Phi x$ atque $\psi t = \Phi t$, habebitur enim

$$\Phi x = \Phi t + \Phi t . \Phi' t + \frac{d . \Phi t^2 \Phi' t}{1 . 2 \, d t} + \frac{d d . \Phi t^3 \Phi' t}{1 . 2 . 3 \, d t^2} + \text{etc.}$$

aequatio quae priori perfecte congruit.

VII. Quamuis nullum quidem ſuperſit dubium, quin demonſtratione iam allata, veritas Theorematis plane ſit euicta, quum tamen videri poſſet hanc demonſtrationem ita eſſe comparatam, vt in eam vix quisquam incideret, niſi ipſum Theorema iam prius ſibi haberet cognitum, haud inutile igitur erit oſtendere, quali adhibito ratiocinio, ad inueniendum valorem functionis ψx perducti ſimus. Quum ſcilicet ſit

$$\psi t = \psi x - \Phi x \psi' x + \frac{\Phi x^2 . d . \psi' x}{2 . \, d x} - \frac{\Phi x^3 . d \, d . \psi' x}{1 . 2 . 3 \, d x^2} + \text{etc.}$$

vt hinc inueniatur valor ipſius ψx, in eo elaborandum eſt, vt membri poſterioris ad hanc aequationem pertinentis, ſinguli termini praeter primum deſtruantur, quo autem $- \Phi x \psi' x$ deſtruatur, patet neceſſarium eſſe, vt ad ψt addatur eiusmodi functio ipſius t, cuius per x expreſſae primus terminus ſit $+ \Phi x \psi' x$, qualis igitur erit $\Phi t \psi' t$, hoc autem facto habebimus:

$$\psi t + \Phi t \psi' t = \psi x + \frac{\Phi x^2 . d \psi' x}{1 . 2 \, d x} - \frac{\Phi x^3 . d d \psi' x}{1 . 2 . 3 \, d x^3} + \text{etc.}$$
$$- \frac{\Phi x . d . \Phi x \psi' x}{d x} + \frac{\Phi x^2 . d d . \Phi x \psi' x}{1 . 2 \, d x^2} - \text{etc.}$$

Quum

Quum vero nunc ex ſupra allatis §. III., conſtet eſſe

$$\frac{\Phi x^2\, d.\psi' x}{1.2\, dx} - \frac{\Phi x\, d.\Phi x \psi' x}{dx} = -\frac{d.\Phi x^2 \psi' x}{1.2\, dx},$$

euidens eſt terminos

$$\frac{\Phi x^2\, d.\psi' x}{1.2\, dx} - \frac{\Phi x\, d.\Phi x \psi' x}{dx}$$

ex aequatione modo allata eliminari poſſe, ſi ad $\psi t + \Phi t \psi' t$ addatur talis functio ipſius t, cuius per x expreſſae primus terminus ſit $\frac{d.\Phi x^2 \psi' x}{1.2\, dx}$, quae proprietas manifeſto competit ipſi $\frac{d.\Phi t^2 \psi' t}{1.2.\, dt}$, tum autem fiet

$$\psi t + \Phi t \psi' t + \frac{d.\Phi t^2 \psi' t}{1.2\, dt} = \psi x - \frac{\Phi x^3\, dd.\psi' x}{1.2.3\, dx^2} + \frac{\Phi x^4\, d^3 \psi' x}{1.2.3.4\, dx^3} - \text{etc.}$$
$$+ \frac{\Phi x^2\, dd.\Phi x \psi' x}{1.2\, dx^2} - \frac{\Phi x^3. d^3 \Phi x \psi' x}{1.2.3\, dx^3} + \text{etc.}$$
$$- \frac{\Phi x. dd.\Phi x^2 \psi' x}{1.2\, dx^2} + \frac{\Phi x^2 d^3.\Phi x^2 \psi' x}{1.2.1.2\, dx^3} - \text{etc.}$$

Iam autem liquet ad terminos

$$-\frac{\Phi x^3\, dd.\psi' x}{1.2.3.\, dx^2} + \frac{\Phi x^2\, dd.\Phi x \psi' x}{1.2\, dx^2} - \frac{\Phi x\, dd.\Phi x^2 \psi' x}{1.2\, dx^2} = -\frac{dd.\Phi x^3 \psi' x}{1.2.3\, dx^2}$$

eliminandos requiri, vt addatur $\frac{dd.\Phi t^3 \psi' t}{1.2.3\, dt^2}$, atque ſimili ratione hoc ratiocinium vlterius proſequendo, etiam termini differentialia altiorum graduum inuoluentes eliminari poſſunt, adeo vt remaneat ſolus primus terminus

$$\psi x = \psi t + \Phi t \psi' t + \frac{d.\Phi t^2 \psi' t}{1.2\, dt} + \frac{dd.\Phi t^3 \psi' t}{1.2.3\, dt^2} + \frac{d^3 \Phi t^4 \psi' t}{1.2.3.4\, dt^2} + \text{etc.}$$

VIII. Si T deſignet functionem quamcunque ipſius t, ope Theorematis huius valor functionis

nis $\psi(x+T)$ facile determinari poterit. Quum enim ſit

$$\psi(x+T) = \psi x + T\psi' x + \frac{T^2 d.\psi' x}{1\cdot 2\, dx} + \frac{T^3 d\,d.\psi' x}{1\cdot 2\cdot 3\, dx^2} + \text{etc.}$$

ſi ſeorſim quaerantur valores functionum ψx, $T\psi' x$, $\frac{T^2 d\psi' x}{1\cdot 2\, dx}$ etc. per t expreſſi, conſequemur:

$$\begin{aligned}\psi(x+T) = \psi t + \Phi t\,\psi' t &+ \frac{d.\Phi t^2 \psi' t}{1\cdot 2\, dt} + \frac{d\,d.\Phi t^3 \psi' t}{1\cdot 2\cdot 3\, dt^2} + \frac{d^3.\Phi t^4\, \psi' t}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\, dt^3} + \text{etc.}\\ + T\psi' t + T\Phi t\,\psi'' t &+ \frac{T d.\Phi t^2 \psi'' t}{1\cdot 2\, dt} + \frac{T d\,d.\Phi t^3 \psi'' t}{1\cdot 2\cdot 3\, dt^2} + \text{etc.}\\ &+ \frac{T^2 \psi'' t}{1\cdot 2} + \frac{T^2 \Phi t\,\psi''' t}{1\cdot 2} + \frac{T^2 d.\Phi t^2 \psi''' t}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\, dt^2} + \text{etc.}\\ &+ \frac{T^3 \psi''' t}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{T^3 \Phi t\,\psi'''' t}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}\\ &+ \frac{T^4 \psi'''' t}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}\end{aligned}$$

vbi ſupponimus

$$\psi'' t = \frac{d.\psi' t}{dt};\ \psi''' t = \frac{d.\psi'' t}{dt} \text{ etc.}$$

Valorem autem hunc ipſius $\psi(x+T)$ inuentum, vel leui adhibita attentione, facile quisque inueniet ſic repraeſentari poſſe:

$$\psi(x+T) = \psi(t+T) + \Phi t\,\psi'(t+T) + \frac{d.\Phi t^2 \psi'(t+T)}{1\cdot 2\, dt} + \frac{d\,d.\Phi t^3 \psi'(t+T)}{1\cdot 2\cdot 3\, dt^2} + \text{etc.}$$

T ſcilicet in ſingulis differentiationibus pro conſtante habita, nam ſi haec expreſſio euoluatur, prodibit

$$\begin{aligned}\psi(t+T) &= \psi t + T\psi' t + \frac{T^2 \psi'' t}{1\cdot 2} + \frac{T^3 \psi''' t}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{T^4 \psi'''' t}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}\\ \Phi t\,\psi'(t+T) &= \Phi t\,\psi' t + T\Phi t.\,\psi'' t + \frac{T^2 \Phi t\,\psi''' t}{1\cdot 2} + \frac{T^3 \Phi t\,\psi'''' t}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}\\ \frac{d.\Phi t^2 \psi'(t+T)}{1\cdot 2\, dt} &= + \frac{d.\Phi t^2 \psi' t}{1\cdot 2\, dt} + \frac{T d.\Phi t^2 \psi'' t}{1\cdot 2\, dt} + \frac{T^2 d\Phi t^2 \psi''' t}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\, dt} + \text{etc.}\\ \frac{d\,d.\Phi t^3 \psi'(t+T)}{1\cdot 2\cdot 3\, dt^2} &= + \frac{d\,d.\Phi t^3 \psi' t}{1\cdot 2\cdot 3\, dt^2} + \frac{T.\,d\,d.\Phi t^3 \psi'' t}{1\cdot 2\cdot 3\, dt^2} + \text{etc.}\\ \frac{d^3 \Phi t^4 \psi'(t+T)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\, dt^3} &= + \frac{d^3 \Phi t^4 \psi' t}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\, dt^3} + \text{etc.}\end{aligned}$$

quorum

quorum terminorum ſumma vt modo vidimus erat $= \psi(x + T)$.

IX. Hinc vero patet, quomodo praeſens Theorema ad caſum multo latius patentem adplicari debeat, quo nimirum quaeritur valor functionis cuiuscunque ambarum variabilium x et t. Si igitur propoſita fuerit functio $\psi(x, t)$ ex quantitatibus x et t, vtcunque compoſita, conſideremus primum t vt conſtantem, ſeu in hac functione loco ipſius x ſubſtituamus α, tum autem per Theorema noſtrum, quaeramus valorem ipſius $\psi(\alpha, x)$, qui erit

$$= \psi(\alpha, t) + \Phi t\, \psi'(\alpha, t) + \frac{d.\Phi t^2\, \psi'(\alpha, t)}{1.2\, dt} + \frac{dd.\Phi t^3\, \psi'(\alpha, t)}{1.2.3\, dt^2} + \text{etc.}$$

poſt peractas vero differentiationes loco α iterum introducatur t, atque iam expreſſio hinc oriunda definet quantitatem functionis $\psi(x, t)$. Quum enim $\psi(x, t)$ ſit ſimilis functio ipſorum x et t, ac $\psi(\alpha, x)$ ſit ipſorum α et x, liquet omnino, ſi in valore poſterioris functionis loco α introducatur t, eam in priorem abire, ratio autem cur demum poſt peractas differentiationes t loco α introduximus, haec eſt, quod in valoribus differentialibus occurrat quantitas $\psi'(\alpha, t)$, quae loco α introducto t migrat in $\psi'(t, t)$, in qua functione quum prius t, vt conſtans haberi debeat, poſterius vero pro variabili ſpectari, vt omnis euitetur confuſio, donec omnes differentiationes abſolutae fuerint, praeſtabit α in locum ipſius t ſubſtituere. Vt vero huius aſſerti veritatem eo melius ob oculos ponere liceat, facili quodam exemplo id illuſtrare placet. Sit igitur

 $t = x$

$t = x - n x$, atque ſupponamus hinc quaeri valorem ipſius $t x$ per ſolum t expreſſum. Quum itaque ſit

$$\phi x = n x ; \; \phi t = n t ; \; \psi (t, x) = t x$$

ideoque

$$\psi (\alpha, x) = \alpha x, \; \psi (\alpha, t) = \alpha t \text{ et } \psi' (\alpha, t) = \alpha,$$

hinc habebitur:

$$\alpha x = \alpha t + n \alpha t + n^2 \alpha t + n^3 \alpha t + \text{etc.} = \frac{\alpha t}{1 - n}$$

vnde ſubſtituto iam t in locum ipſius α, orietur

$$t x = \frac{t t}{1 - n},$$

vti per ſe quoque perſpicuum eſt.

X. Deinde vero et id praeprimis notari meretur, Theorema praeſens multo generalius quoque exprimi poſſe. *Si enim ſupponatur* $t = x - P$, *vbi* P *deſignat functionem quamcunque ambarum variabilium* x *et* t, P$'$ *vero denotet eam functionem ipſius* t, *quae prodit ſi in* P *loco* x *ſubſtituatur* t, *atque tantisper ii* t *qui antea ipſi* P *inerant per* t$'$ *deſignentur*, erit

$$\psi x = \psi t + P' \psi' t + \frac{d. P'^2 \psi' t}{1.2 \, d t} + \frac{d d. P'^3 \psi' t}{1.2.3 \, d t^2} + \frac{d^3 P'^4 \psi' t}{1.2.3.4 \, d t^3} + \text{etc.}$$

in quibus differentiationibus, pro functione P$'$, *ſola* t *variabilis haberi debet,* t$'$ *autem pro conſtante ſpectari, tum vero captis differentialibus loco* t$'$ *ſubſtitui poterit vbique* t. Facile autem patet, demonſtrationem ſupra (§. 5) allatam paucis tantum immutatis huc applicari poſſe. Primum enim quod ad Lemma noſtrum fundamenti loco poſitum attinet, ſi y deſignet functio-

functionem duarum variabilium, differentiatio autem tantum reſpectu vnius earum inſtituatur, euidens eſt hoc Lemma etiam pro eo caſu cum veritate perfecte conſentire. Iam igitur quum ſit

$$\psi t = \psi x - P\psi' x + \frac{P^2\, d.\psi' x}{1.2\, dx} - \frac{P^3\, dd.\psi' x}{1.2.3\, dx^2} + \frac{P^4\, d^3\psi' x}{1.2.3.4\, dx^3} - \text{etc.}$$

loco ψt ſubſtitutis

$$P'\psi' t,\ \frac{d.P'^2\psi' t}{1.2\, dt},\ \frac{dd.P'^3\psi' t}{1.2.3\, dt^2},\ \text{etc.}$$

conſequemur

$$P'\psi' t = P\psi' x - P\left(\frac{d.P\psi' x}{dx}\right) + \frac{P^2}{1.2}\left(\frac{dd.P\psi' x}{dx^2}\right) - \frac{P^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3 P\psi' x}{dx^3}\right) + \text{etc.}$$

$$\frac{d.P'^2\psi' t}{1.2\, dt} = \frac{1}{1.2}\left(\frac{d.P^2\psi' x}{dx}\right) - \frac{P}{1.2}\left(\frac{dd.P^2\psi' x}{dx^2}\right) + \frac{P^3}{1.2.1.2}\left(\frac{d^3 P^2\psi' x}{dx^3}\right) - \text{etc.}$$

Omnibus igitur his valoribus in vnam ſummam collectis, obtinebimus:

$$\begin{aligned}
&\psi t + P'\psi' t + \frac{d.P'^2\psi' t}{1.2\, dt} + \frac{dd.P'^3\psi' t}{1.2.3\, dt^2} + \frac{d^3 P'^4\psi' t}{1.2.3.4\, dt^3} + \text{etc.}\\
&= \psi x - P\psi' x + \frac{P^2\, d.\psi' x}{1.2\, dx} - \frac{P^3\, dd.\psi' x}{1.2.3\, dx^2} + \frac{P^4\, d^3\psi' x}{1.2.3.4\, dx^3} - \text{etc.}\\
&\quad + P\psi' x - P\left(\frac{d.P\psi' x}{dx}\right) + \frac{P^2}{1.2}\left(\frac{dd.P\psi' x}{dx^2}\right) - \frac{P^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3 P\psi' x}{dx^3}\right) + \text{etc.}\\
&\quad + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d.P^2\psi' x}{dx}\right) - \frac{P}{1.2}\left(\frac{dd.P^2\psi' x}{dx^2}\right) + \frac{P^2}{1.2.1.2}\left(\frac{d^3 P^2\psi' x}{dx^3}\right) - \text{etc.}\\
&\quad + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{dd.P^3\psi' x}{dx^2}\right) - \frac{P}{1.2.3}\left(\frac{d^3 P^3\psi' x}{dx^3}\right) + \text{etc.}\\
&\quad + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{d^3 P^4\psi' x}{dx^3}\right) - \text{etc.}\\
&\quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Quum autem per Lemma noſtrum in genere conſtet eſſe

$$P^m \frac{d^{m-1}\psi' x}{dx^{m-1}} - mP^{m-1}\left(\frac{d^{m-1}P\psi' x}{dx^{m-1}}\right) + \frac{m(m-1)}{1.2}P^{m-2}\left(\frac{d^{m-1}P^2\psi' x}{dx^{m-1}}\right) - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}P^{m-3}\left(\frac{d^{m-1}P^3\psi' x}{dx^{m-1}}\right) + \text{etc.}$$

 neceſ-

neceſſum eſt, vt a parte dextra aequationis, omnes termini, qui in iisdem lineis verticalibus diſpoſiti ſunt, ſeu qui differentialia eiusdem gradus inuoluunt, ſponte euaneſcant, vnde habebitur:

$$\psi x = \psi t + P' \psi' t + \frac{d.\, P'^2 \psi' t}{1.\, 2\, d t} + \frac{d d.\, P'^3 \psi' t}{1.\, 2.\, 3\, d t^2} + \frac{d^3.\, P'^4 \psi' t}{1.\, 2.\, 3.\, 4\, d t^3} + \text{etc.}$$

peractis autem differentiationibus loco t' iterum ſcribi poteſt t. Nunc vero perſpicua euadit ratio, cur differentiationibus inſtitutis, t' in P' pro conſtanti haberi debeat, quum enim ſit

$$\psi t = \psi x - P \psi' x + \frac{P^2\, d.\, \psi' x}{1.\, 2\, d x} - \frac{P^3\, d d.\, \psi' x}{1.\, 2.\, 3\, d x^2} + \text{etc.}$$

conſtat valorem ipſius ψx hinc definiri poſſe, ſi ad ψt addantur eiusmodi functiones ipſius t, quibus per x expreſſis, non ſolum quantitas $P \psi' x$, ſed etiam termini qui differentialia ipſius $\psi' x$ inuoluunt, eliminari poſſunt; at pro $- P \psi' x$ eliminando ſtatim liquet, ad ψt, addi debere quantitatem, quae ſimilis eſt functio ipſius t ac $P \psi' x$ eſt ipſius x, ideoque dum in P loco t ſcribitur t', patet ad ψt addi debere terminum $P' \psi' t$, vbi P' eſt ſimilis functio ipſorum t' et t, ac P eſt ipſorum t et x, tum vero etiam perſpicuum eſt vtrinque t' vt conſtantem ſpectari debere. Similis autem res eſt cum reliquis terminis differentialia ipſius $\psi' x$ inuoluentibus.

XI. Perpenſis iis quae ſupra (§. 9) attulimus, iam euidens quoque eſt, qua ratione functio quaecunque ipſorum x et t $\psi (x, t)$, pro hypotheſi qua

$t = x$

$t = x - P$, per ſolam variabilem t determinari queat, primum enim patet eſſe

$$\psi(\alpha, x) = \psi(\alpha, t) + P'\psi'(\alpha, t) + \frac{d.\, P'^2 \psi'(\alpha, t)}{1.2\, dt} + \frac{dd.\, P'^3 \psi'(\alpha, t)}{1.2.3\, dt^2} + \frac{d^3 P'^4 \psi'(\alpha, t)}{1.2.3.4\, dt^3} + \text{etc.}$$

deinde vero intelligitur quum $\psi(t, x)$ ſimilis ſit functio ipſorum t et x, ac $\psi(\alpha, x)$ eſt ipſorum α et x, poſteriorem functionis valorem in priorem abire, ſi vbique loco α introducatur t, praeterea vero ſemper notandum eſt, poſt peractas differentiationes vbique loco t' ſcribi debere t. Sic exempli cauſſa ſi fuerit $t = x - t\,x$, atque hinc inueſtigari debeat valor ipſius $t\,t\,x$ per t expreſſus, ſtatim fiet $P = t\,x$, $P' = t'\,t$, $\psi(t, x) = ttx$, $\psi(\alpha, t) = \alpha\alpha\,t$ et $\psi'(\alpha, t) = \alpha\alpha$, vnde prodibit

$$\alpha\alpha x = \alpha\alpha t + \alpha\alpha t' t + \alpha\alpha t'^2 t + \alpha\alpha t'^3 t + \text{etc.}$$

ideoque

$$t\,t\,x = t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + \text{etc.} = \frac{t^3}{1 - t},$$

qui valor omnino veritati eſt conſentaneus.

XII. Vt iam de ſingulari huius Theorematis vſu, breuiter quaedam adferamus, examinemus *primo*, quomodo eius ope radicem cuiuscunque aequationis algebraicae per ſeriem exprimere liceat, in quem vſum, ipſum Theorema a Celeb. *la Grange* inuentum eſſe conſtat. Si igitur propoſita fuerit haec aequatio algebraica ad rationalitatem perducta:

$$x = a + b\,x^2 + c\,x^3 + d\,x^4 + e\,x^5 + \text{etc.}$$

quaeritur vt ex hac aequatione, valor ipſius x per ſeriem meras quantitates conſtantes inuoluentem exprimatur. Comparata autem hac aequatione cum illa generali:

$$x = t + \Phi x$$

euidens eſt, heic ſtatui debere $t = a$ et

$$\Phi x = b x^2 + c x^3 + d x^4 + e x^5 + \text{etc.}$$

ideoque

$$\Phi t = b t^2 + c t^3 + d t^4 + e t^5 + \text{etc.}$$

tum autem vi Theorematis habebitur

$$x = t + \Phi t + \frac{d.\Phi t^2}{2\, dt} + \frac{dd.\Phi t^3}{2.\,3\, dt^2} + \frac{d^3.\Phi t^4}{2.\,3.\,4\, dt^3} + \text{etc.}$$

vbi nimirum poſt peractas differentiationes loco t ſcribi debet a. Non vero ſolum valor ipſius radicis x, ſed etiam poteſtatis ipſius vel alius functionis cuiuscunque, hinc aſſignari poterit, ſic enim habebitur

$$x^m = t^m + m\left(\Phi t . t^{m-1} + \frac{d.\Phi t^2 t^{m-1}}{2\, dt} + \frac{dd.\Phi t^3 . t^{m-1}}{2.\,3\, dt^2} + \frac{d^3.\Phi t^4 . t^{m-1}}{2.\,3.\,4\, dt^3} + \text{etc.}\right)$$

XII. Dum vero has expreſſiones actu euoluere conabimur, ante omnia neceſſum eſt, vt valor ipſius Φt^n per ſeriem expreſſus inueſtigetur, quum igitur ſit

$$\Phi t = tt(b + ct + dt^2 + et^3 + \text{etc.}), \text{ erit}$$

$$\Phi t^n = t^{2n}(b + ct + dt^2 + et^3 + \text{etc.})^n$$

ex

ex quo totum negotium eo reducitur, vt polynomium

$$b + c\,t + d\,t^2 + e\,t^3 + \text{etc.}$$

ad poteſtatem n euehatur, quum vero conſtet poteſtatem polynomii n huiusmodi habere debere formam:

$$b' + c'\,t + d'\,t\,t + e'\,t^3 + \text{etc.}$$

iam quaeſtio in eo verſatur, vt valores coefficientium b', c', d' etc. determinentur. At quum ſit

$$(b + c\,t + d\,t^2 + e\,t^3 + \text{etc.})^n = b' + c'\,t + d'\,t\,t + e'\,t^3 + \text{etc.}$$

erit quoque

$$\frac{n\,(c + 2\,d\,t + 3\,e\,t\,t + 4\,f\,t^3 + \text{etc.})}{b + c\,t + d\,t^2 + e\,t^3 + f\,t^4 + \text{etc.}} = \frac{c' + 2\,d'\,t + 3\,e'\,t\,t + 4\,f'\,t^3 + \text{etc.}}{b' + c'\,t + d'\,t^2 + e'\,t^3 + f'\,t^4 + \text{etc.}}$$

vnde iam facile deducuntur ſequentes valores ipſorum b', c', d' etc.

$$b' = b^n$$

$$c' = \frac{n\,b'\,c}{b} = n\,b^{n-1}\,c$$

$$d' = \frac{n\,b'\,d}{b} + \frac{n-1}{2}\,\frac{c'\,c}{b} = n\,b^{n-1}\,d + \frac{n(n-1)}{1.\,2}\,b^{n-2}\,c\,c$$

$$e' = \frac{n\,b'\,e}{b} + \frac{2\,n-1}{3}\,\frac{c'\,d}{b} + \frac{n-2}{3}\,\frac{d'\,c}{b} = n\,b^{n-1}\,e + \frac{2\,n\,(n-1)}{1.\,2}\,b^{n-2}\,c\,d$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\,b^{n-3}\,c^3$$

$$f' = n\,b^{n-1}\,f + \frac{n\,(n-1)}{1.\,2}\,b^{n-2}\,(2\,c\,e + d\,d) + \frac{3\,n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\,b^{n-3}\,c\,c\,d$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}\,b^{n-4}\,c^4$$

etc.

XIV.

XIV. Inuenta igitur expreſſione ipſius Φt^n, iam ſupereſt, vt euoluatur quoque $d^{n-1}\Phi t^n . t^{m-1}$, quem in finem notetur eſſe

$$\Phi t^n\, t^{m-1} = t^{2n+m-1}(b' + c' t + d' tt + e' t^3 + f' t^4 + \text{etc.})$$

vnde poſito breuitatis gratia $2n + m - 1 = \lambda$, invenietur

$$d^\varkappa \Phi t^n . t^{m-1} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-\varkappa)b' t^{\lambda-\varkappa} + (\lambda+1)\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda+1-\varkappa)c' t^{\lambda+1-\varkappa}$$
$$+ (\lambda+2)(\lambda+1)\lambda\ldots(\lambda+2-\varkappa)d' t^{\lambda+2-\varkappa} + (\lambda+3)(\lambda+2)\ldots(\lambda+3-\varkappa)e' t^{\lambda+3-\varkappa} + \text{etc.}$$

ideoque ſi $\varkappa = n-1$, habebitur $\lambda - \varkappa = n + m$ et proinde

$$d^{n-1}.\Phi t^n\, t^{m-1} = \lambda(\lambda-1)\ldots(m+n)b' t^{m+n} + (\lambda+1)\lambda\ldots(m+n+1)c' t^{m+n+1}$$
$$+ (\lambda+2)(\lambda+1)\ldots(m+n+2)d' t^{m+n+2} + \text{etc.}$$

vbi obſeruari debet eſſe $\lambda = 2n + m - 1$.

XV. Hinc pro x^m iam ſequens deducitur expreſſio:

$$x^m = a^m + m(a^{m+1}b + a^{m+2}c + a^{m+3}d + a^{m+4}e + \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{m}{2}((m+3)a^{m+2}b^2 + 2(m+4)a^{m+3}bc + (m+5)a^{m+4}(cc+2bd) + \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{m}{2.3}\left(\begin{array}{l}(m+5)(m+4)a^{m+3}b^3 + 3(m+6)(m+5)a^{m+4}b^2c \\ \qquad + (m+7)(m+6)a^{m+5}(3b^2d + 3bcc) + \text{etc.}\end{array}\right)$$
$$+ \tfrac{m}{2.3.4}\left(\begin{array}{l}(m+7)(m+6)(m+5)a^{m+4}b^4 \\ \qquad + 4(m+8)(m+7)(m+6)a^{m+5}b^3c + \text{etc.}\end{array}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

quae

quae etiam ſequenti ratione repraeſentari poteſt

$$x^m = a^m + m a^{m+1} b\left(1 + \tfrac{m+3}{1.\,2} ab + \tfrac{(m+5)(m+4)}{1.\,2.\,3} a^2 b^2 + \tfrac{(m+7)(m+6)(m+5)}{1.\,2.\,3.\,4} a^3 b^3 + \text{etc.}\right)$$
$$+ m a^{m+2} c\left(1 + (m+4) ab + \tfrac{(m+6)(m+5)}{1.\,2} a^2 b^2 + \tfrac{(m+8)(m+7)(m+6)}{1.\,2.\,3} a^3 b^3 + \text{etc.}\right)$$
$$+ m a^{m+1} d\left(1 + (m+5) ab + \tfrac{(m+7)(m+6)}{1.\,2} a^2 b^2 + \tfrac{(m+9)(m+8)(m+7)}{1.\,2.\,3} a^3 b^3 + \text{etc.}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ \tfrac{m}{2} a^{m+4} cc\left((m+5) + \tfrac{(m+7)(m+6)}{1.\,2} ab + \tfrac{(m+9)(m+8)(m+7)}{1.\,2.\,3} a^2 b^2 + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{m}{2} a^{m+6} dd\left((m+7) + (m+9)(m+8) ab + \tfrac{(m+11)(m+10)(m+9)}{1.\,2.} a^2 b^2 + \text{etc.}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ m a^{m+5} cd\left((m+6) + (m+8)(m+7) ab + \tfrac{(m+10)(m+9)(m+8)}{1.\,2} a^2 b^2 + \text{etc.}\right)$$
$$+ m a^{m+7} ce\left((m+8) + (m+10)(m+9) ab + \tfrac{(m+12)(m+11)(m+10)}{1.\,2.} a^2 b^2 + \text{etc.}\right)$$
$$+ \text{etc. etc.}$$

Poſito igitur $m = 1$ habebimus

$$x = a + a^2 b(1 + 2.ab + 5.a^2 b^2 + 14 a^3 b^3 + \text{etc.})$$
$$+ a^3 c(1 + 5.ab + 21.a^2 b^2 + 84 a^3 b^3 + \text{etc.})$$
$$+ a^4 d(1 + 6.ab + 28.a^2 b^2 + \text{etc.})$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ a^5 cc(3 + 14\, ab + 60\, a^2 6^2 + \text{etc.})$$
$$+ a^7 dd(4 + 45\, ab + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ a^6 cd(7 + 72\, ab + \text{etc.})$$
$$+ a^8 ce(9 + 110\, ab + \text{etc.})$$
$$+ \text{etc.}$$

quae ſeries iam olim a *Newtono* inuenta eſt.

XVI. Si aequatio propoſita diuidatur per $b\,x$, tum ea ita habebitur expreſſa:

$$x = \frac{1}{b} \frac{-a - c\,x^3 - d\,x^4 - e\,x^5 - \text{etc.}}{b\,x}$$

quae cum hypotheſi Theorematis $x = t + \Phi x$ comparata, praebet $t = \frac{1}{b}$ et

$$\Phi x = -\frac{(a + c\,x^3 + d\,x^4 + e\,x^5 + \text{etc.})}{b\,x},$$

ideoque

$$\Phi t = -\frac{(a + c\,t^3 + d\,t^4 + \text{etc.})}{b\,t}$$

hinc autem x per ſequentem ſeriem exprimetur

$$x = t + \Phi t + \frac{d.\,\Phi t^2}{2.\,d\,t} + \frac{d\,d.\,\Phi t^3}{2.\,3.\,d\,t^2} + \frac{d^3.\,\Phi t^4}{2.\,3.\,4\,d\,t^3} + \text{etc.}$$

vbi poſt differentiationem in locum ipſius t vbique ſubſtituatur $\frac{1}{b}$. Simili ratione, ſi aequatio ſub hac repraeſentetur forma:

$$x = \frac{-b}{c} + \frac{x - a - d\,x^4 - e\,x^5 - \text{etc.}}{c\,x^2},$$

erit $t = \frac{-b}{c}$ et

$$\Phi x = \frac{x - a - d\,x^4 - e\,x^5 - \text{etc.}}{c\,x^2}$$

nec non

$$\Phi t = \frac{t - a - d\,t^4 - e\,t^5 - \text{etc.}}{c\,t^2},$$

ex quo fit

$$x = t + \Phi t + \frac{d.\,\Phi t^2}{2.\,d\,t} + \frac{d\,d.\,\Phi t^3}{2.\,3\,d\,t^2} + \text{etc.}$$

differentiationibus abſolutis, pro t ſubſtituto $\frac{-b}{c}$. Hinc ſi aequatio fuerit gradus m atque omnes plane eius adſint termini, tum hoc modo, ſeries numero m inuenientur pro valoribus radicum aequationis propoſitae, totidem ſcilicet quot radicibus ipſa aequatio prae-

praedita eſt, vtrum vero hiſce ſeriebus iſtae radices reuera exprimantur, quaeſtio eſt quae per ratiocinia Analytica vix dirimi poſſe videtur. Tutiſſima igitur via, hoc dubium dilui poſſe videtur, ſi pro ſpecialibus exemplis tentamen inſtituatur, an diuerſae hae ſeries, diuerſos quoque exhibeant radicum valores, et an dum aequationis radices omnes ſint reales, etiam omnes ſeries fiant conuergentes? Hunc in finem hanc mihi propoſui aequationem cubicam:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0,$$

cuius radices vti conſtat ſunt

$$x = 3, \; x = 2 \text{ et } x = -2,$$

examinaturus vtrum ſeries ad praeſcriptum Theorematis inuentae hos valores radicum reuera exhibeant. Quum igitur haec aequatio, iam triplici modo ad formam $x - t - \Phi x = 0$ reduci queat, has formas ſimul cum reſpondentibus valoribus ipſorum t et Φt vnica tabella heic complectemur:

I.	$x - 3 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$	$t = 3$	$\Phi t = \frac{4}{t} - \frac{12}{tt}$
II.	$x + \frac{4}{3} - \frac{12}{x} - x^2 = 0$	$t = -\frac{4}{3}$	$\Phi t = \frac{12}{t} + tt$
III.	$x - 3 - \frac{x^3 + 3x^2}{4} = 0$	$t = 3$	$\Phi t = \frac{t^3 - 3tt}{4}$

Pro I^{ma} et III^{a} forma liquet, ſi in Φt loco t eius valor $+3$ ſubſtituatur, Φt euaneſcere, pro I^{ma} ſcilicet eſt $\Phi t = \frac{4}{3} - \frac{12}{9} = 0$, pro III^{a} vero $\Phi t = \frac{27-27}{4} = 0$. Quum itaque in expreſſione ipſius x, omnes termini primum excipientes factorem habeant Φt, ſequitur pro vtraque forma fore $x = t = 3$, ex quibus apparet fieri omnino poſſe, vt diuerſae ſeries can-

dem plane exhibeant radicem. Porro pro noſtro quidem exemplo, nullum eſt dubium, quin ſeries formae mediae reſpondens fiat diuergens, vnde ipſi nulla plane reſpondet radix. Deinde in genere notare iuuat, huiusmodi aequationem cubicam

$$x^3 + n x^2 + m x + m n = 0$$

ſi ſub his repraeſentetur formis

$$x + n + \frac{m}{x} + \frac{m n}{x^2} = 0 \text{ et } x + n + \frac{n x^2 + x^3}{m} = 0$$

ad praeſcriptum Theorematis reſolutam, vtroque caſu praebere $x = t = -n$, nam pro priori habetur $\Phi t = -\frac{m}{t} - \frac{m n}{t t}$, pro poſteriori autem $\Phi t = -\frac{n t t - t^3}{m}$, vtraque expreſſione in 0 abeunte, ſi pro t ſubſtituatur $-n$. Plurimis de caetero exemplis oſtendi poteſt, pro aequatione cubica.

$x^3 = a x^2 + b x + c$, ſeriem ex forma $x = a + \frac{b x + c}{x^2}$ deductam, ſaepius fieri diuergentem. Tantum igitur abeſt, vt per adplicationem Theorematis Cel. *La Grange*, omnes aequationum radices aſſignari queant, vt plane non conſtet, an quouis caſu, praeter vnicam hoc modo determinare liceat?

XVII. Si in expreſſione $t = x - \Phi x$, functio Φx quascunque quantitates tranſcendentes inuoluat, valor tamen ipſius x aequationi ſatisfaciens, Theoremate praeſenti in vſum vocato facile definiri poteſt, ſic ſi fuerit $t = x + n\,\text{ſin.}\,x$, quo caſu $\Phi x = -n\,\text{ſin.}\,x$ habebitur

$$\psi x = \psi t - n\,\text{ſin.}\,t\,\psi' t + \frac{n^2 . d\,\text{ſin.}\,t^2\,\psi' t}{1 . 2\; d t} - \frac{n^3\,d d.\,\text{ſin.}\,t^3\,\psi' t}{1 . 2 . 3\; d t^2} + \frac{n^4\,d^3 .\,\text{ſin.}\,t^4\,\psi' t}{1 . 2 . 3 . 4\; d t^3} - \text{etc.}$$

Notum

Notum autem eſt reſolutionem memorabilis illius Problematis *Kepleriani*, quo quaeritur, vt pro data quacunque anomalia media planetae, inueniatur anomalia vera, ad huiusmodi reduci aequationem $t = x + n \sin. x$. Si enim anomalia media dicatur t, anomalia vera u et anomalia excentrica x, excentricitas autem per n deſignetur, in Aſtronomicis demonſtrari ſolet eſſe:

$$\text{Tang.}\, \tfrac{1}{2} u = \text{Tang.}\, \tfrac{1}{2} x \frac{\sqrt{1-n}}{\sqrt{1+n}}, \text{ tum vero } t = x + n \sin. x.$$

Ponamus igitur primum eſſe $\psi x = \sin. x$, vnde $\psi t = \sin. t$ et $\psi' t = \cos. t$ eritque iam

$$\sin. x = \sin. t - n \sin. t. \cos. t + \frac{n^2 d. \sin. t^2 \cos. t}{1 \cdot 2\, dt} - \frac{n^3 dd. \sin. t^3 \cos. t}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dt^2} + \text{etc.}$$

quae aequatio etiam ita exprimi poteſt

$$\sin. x = \sin. t - \tfrac{n}{2}. \sin. 2t + \frac{n^2 dd. \sin. t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dt^2} - \frac{n^2 d^3. \sin. t^4}{1 \cdot 2 \cdots 4\, dt^3} + \frac{n^4. d^4. \sin. t^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5\, dt^4} - \text{etc.}$$

Quum itaque ſit

$$2^{2m-1} \sin. t^{2m} = \frac{2m(2m-1)(2m-2)\cdots(m+1)}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots m} - \frac{2m(2m-1)\cdots(m+2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (m-1)} \cos. 2t$$
$$+ \frac{2m(2m-1)\cdots(m+3)}{2 \cdot 3 \cdots (m-2)} \cos. 4t + \frac{2m(2m-1)\cdots(m+4)}{2 \cdot 3 \cdots (m-3)} \cos. 6t \ldots \pm \cos. 2mt$$

vbi vltimus terminus ſigno $+$ afficietur, ſi m ſit numerus par, negatiuo autem ſi impar. Deinde habebitur quoque

$$2^{2m} \sin. t^{2m+1} = \frac{(2m+1)2m(2m-1)\cdots(m+2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots m} \sin. t - \frac{(2m+1)2m(2m-1)\cdots(m+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (m-1)} \sin. 3t$$
$$+ \frac{(2m+1)2m(2m-1)\cdots(m+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (m-2)} \sin. 5t \ldots \pm \sin. (2m+1)t$$

vbi iterum vltimo termino ſignum $+$ tribui debet, ſi m ſit numerus par, contra ſi impar. Hiſce itaque notatis ſi iam differentiatio actu inſtituatur prodibit:

$$\text{ſin.}\,x = \text{ſin.}\,t - \frac{n}{2.\,2}\,2\,\text{ſin.}\,2t - \frac{n^2}{4.\,2.\,3}(3\,\text{ſin.}\,t - 3^2\,\text{ſin.}\,3t)$$
$$+ \frac{n^3}{8.\,2.\,3.\,4}(4.\,2^3.\,\text{ſin.}\,2t - 4^3.\,\text{ſin.}\,4t)$$
$$+ \frac{n^4}{16.\,2.\,3.\,4.\,5}\left(\frac{5.\,4}{2}\,\text{ſin.}\,t - 5.\,3^4\,\text{ſin.}\,3t + 5^4.\,\text{ſin.}\,5t\right)$$
$$- \frac{n^5}{32.\,2.\,3.\,\ldots\,5.\,6}\left(\frac{6.\,5}{2}.\,2^5\,\text{ſin.}\,2t - 6.\,4^5\,\text{ſin.}\,4t + 6^5\,\text{ſin.}\,6t\right)$$
$$- \frac{n^6}{64.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}\left(\frac{7.\,6.\,5}{1.\,2.\,3}\,\text{ſin.}\,t - \frac{7.\,6}{1.\,2}3^6\,\text{ſin.}\,3t + 7.\,5^6.\,\text{ſin.}\,5t - 7^6.\,\text{ſin.}\,7t\right)$$
$$+ \text{ etc.}$$

XVIII. Supponamus iterum eſſe $\psi x = \text{coſ.}\,x$, ideoque $\psi\,t = \text{coſ.}\,t$ et $\psi'\,t = -\,\text{ſin.}\,t$, eritque iam:

$$\text{coſ}\,x = \text{coſ.}\,t + n\,\text{ſin}\,t^2 - \frac{n^2.\,d.\,\text{ſin.}\,t^3}{1.\,2\,d\,t} + \frac{n^3.\,d\,d.\,\text{ſin.}\,t^4}{1.\,2.\,3\;\;d\,t^2} - \frac{n^4\,d^3\,\text{ſin.}\,t^5}{1.\,2.\,3\,d\,t^3} + \text{etc.}$$

quae euoluta praebet:

$$\text{coſ.}\,x = \text{coſ}\,t + \frac{n}{2}(1 - \text{coſ.}\,2t) - \frac{n^2}{4.\,1.\,2}(3\,\text{coſ.}\,t - 3.\,\text{coſ.}\,3t) + \frac{n^3}{8.\,2.\,3}(4.\,2^2\,\text{coſ.}\,2t - 4^2.\,\text{coſ.}\,4t)$$
$$+ \frac{n^4}{16.\,2.\,3.\,4}\left(\frac{5.\,4}{2}\,\text{coſ.}\,t - 5.\,3^3\,\text{coſ.}\,3t + 5^3\,\text{coſ.}\,5t\right)$$
$$- \frac{n^5}{32.\,2.\,3.\,\ldots\,5}\left(\frac{6.\,5}{2}.\,2^4\,\text{coſ.}\,2t - 6.\,4^4\,\text{coſ.}\,4t + 6^4.\,\text{coſ.}\,6t\right)$$
$$+ \text{ etc.}$$

Simili ratione aliae quaeuis functiones anguli x per t exprimi poſſunt, quin et adeo functiones vtcunque ex x et t compoſitae. In genere autem notaſſe meretur, has ſeries non fieri conuergentes niſi excentricitas n ſit ſatis parua, atque pro iis etiam caſibus adeo lente conuergunt, vt vix vllo cum fructu ad quaerendas aequationes centrorum in Aſtronomia adhiberi poſſint.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE VIBRATIONIBVS CHORDARVM, EX DVABVS PARTIBVS, TAM LONGITVDINE QVAM CRASSITIE, AB INVICEM DIVERSIS, COMPOSITARVM.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Poſt fertiliſſimam, quam varii primi ordinis Geometrae meſſuerunt ſegetem de minimis motibus tremulis iſochronis a quibus integra acuſtica, fortaſſis et ipſa optica, pendet, non vereor pro ſpicilegio intacta aliqua, vt vt leuiora videri poſſint, ſuperaddere. Cupidus in perſpicienda vibrationum natura, quas chorda, ex duabus partibus, longitudine aeque ac craſſitie inaequalibus, compoſita atque tenſa affectaret, in varias incidi formulas, quae aliqua indigere interpretatione atque commentatione viſae ſunt, vt omnes et ſingulae vibrationum ſpecies inde determinentur, ſimul ac valores ſonorum ſingulis vibrationum ſpeciebus debitorum: Huiusmodi ſoni, quod fateor, ſi ambae chordae partes nodo aliquo aliue modo ſimili inter ſe eſſent connexae, ob nimiam ſuam raucedinem inter ſonos

ſonos muſicos referri non poſſent at alius fingi poteſt modus obiecto noſtro magis accommodatus: cum nempe fidibus ſaepe vtantur muſici, filo metallico circumducto inuolutis, eo fine vt quantum convenit, ſufficienter tenſae ſonum tanto grauiorem edant: quidni liceat fides ſupponere pro parte tantum filo metallico inuolutas, nuda manente parte reliqua: nec enim hic video quid ſonum obtundere poſſit: huiusmodi autem fides dato pondere tenſae dabunt vtique ſonum acutiorem quam ſi totae eſſent ſuo filo metallico circumuolutae, grauiorem vero quam ſi tota ſua longitudine eſſent nudae. Igitur haud abs re erit, in verum ſoni valorem inquirere ſimulque *reliqua* huc pertinentia explorare.

§. 2. Ante omnia ad analyſin quaeſtionum noſtrarum conducit theoria communis, de chordis vibrantibus tota ſua longitudine vniformibus, paſſim demonſtrata, cuius praecipua theoremata haec ſunt.

Tab III. Fig. 1. Sit $a\,b\,c$ chorda tenſa tota ſua longitudine vniformis eaque inter vibrandum ad momentum aſſumere ponatur curuaturam $c\,d\,a$; cadet vtique maxima amplitudo $b\,d$ in punctum chordae medium b; ſit ſemilongitudo chordae $c\,b = L$, maxima amplitudo $b\,d = a$; ſumto quocunque alio puncto g, ponatur $c\,g = x$, paruula applicata $g\,e = y$; pondus chordam tendens $= P$: ſumatur longitudo quaeuis chordae a atque ponduſculum eius longitudinis ponatur $= p$. Sit denique quadrans circuli vnitatem pro radio habentis $= q$ His factis denominationibus ſequentes habentur valores atque expreſſiones.

A. Pro

A. Pro aequatione ad curuam $c\,d\,a$ obtinetur $y = \alpha$ ſin. Arc. $\frac{x}{L}\,q$, quae aequatio ſiſtit curuam ſinuum, ita vt poſito ſemicirculo = longitudini $c\,a$ et arcu quocunque $= c\,g$ ſit vbique $g\,e$ proportionalis ſinui huius arcus. Haec curuatura conuenit trochoidi veluti infinite elongatae.

B. Pro quouis puncto e ſit ſubtangens $g\,f$ $= \frac{L}{q} \times \frac{\text{ſin. Arc} \frac{x}{L} q}{\text{coſ. Arc.} \frac{x}{L} q}$ ſiue $g\,f = \frac{L}{q}$ tang. Arc. $\frac{x}{L}\,q$: nec ab hoc differre cenſenda eſt valore ipſa tangens $e\,f$, quoniam applicata $g\,e$ veluti infinite parua cenſetur. Notetur autem hanc tangentem modo affirmatiue modo negatiue ſumendam eſſe, prouti punctum g ad vnam vel alteram partem puncti b ſumtum fuerit: ſi itaque affirmatiue accipiatur pro ramo $c\,d$, erit negatiue ſumenda pro ramo $a\,d$ et viciſſim.

C. Longitudo penduli ſimplicis iſochroni cum vibrationibus chordae $= \frac{p\,L\,L}{q\,q\,P\,a}$, vnde tempuſculum vnius vibrationis definitur: ſed et idem tempuſculum absque ſuppoſita circuli ad radium proportione indicatur hac formula $\frac{2\,p}{P} \times \frac{L\,L}{a}$ ſiue ſimplicius, poſita longitudine arbitraria $a = 2\,L$, formula $\frac{p}{P}\,L$, quae deſignat minimam altitudinem quam corpus libere cadendo deſcribit tempuſculo vnius vibrationis. Igitur poſito $t =$ tempori quo corpus delabitur per altitudinem L ſit tempuſculum vnius vibrationis $= t\,\sqrt{\frac{p}{2\,P}}$, vbi nunc per p intelligitur pondus integrae chordae $a\,c$.

 D. Si

D. Si longitudo *a c* diuidatur in quotcunque partes aequales *n*, vibrationes harmonicae fieri poſſunt ſimul ſuper quauis parte, factis alternis chordae in partes contrarias incuruationibus veluti ſerpentinis atque tunc erit tempuſculum ſingularum vibrationum $= \frac{1}{n} \surd \frac{p}{2P}$. Hinc oriuntur ſoni acceſſorii, qui dicuntur *harmonici* in progreſſione numerorum naturalium dum pro integra longitudine chordae formatur ſonus *fundamentalis*, qui vnitati reſpondet. Imo omnes et ſingulas diuerſi generis vibrationes ſimul coexiſtere in vna eademque chorda poſſe, demonſtraui in Commentariis Academicis Berolinenſibus.

Caeterum deſignabo, pro vibrationibus fundamentalibus, curuam *a d c* nomine curuae *vibratoriae primitiuae.*

§. 3. Notetur iam quod ſi pars chordae quaevis *a g* ab chorda integra *a c* reſecetur punctumque *g* connexum ſupponatur cum filo omnis grauitatis experte, cuius longitudo *f g* fuerit aequalis ſubtangenti pro puncto *e*, nulla plane inde oriri poſſit mutatio nec in curuaturam *e d c* nec in vibrationes chordae reſiduae *g c*, filo *f g* omni grauitate experti connexae, figura ſecunda hanc integram mutationem repraeſentat nec differt a figura prima, niſi quod arcus curuae *a e* punctis ſit notatus vt inde appareat quod nullo modo ad ſyſtema propoſitum pertineat atque vnice pro ſupplemento ideali curuae vibratoriae truncatae ſumendus ſit: ſic in vtraque figura curua-

curuatura $aedc$ prorſus erit eadem. Tunc autem requiritur vt longitudo ac vel ſemilongitudo bc definiatur ex datis longitudinibus fg et gc: quo facto omnia innoteſcent; hocque modo facilis erit ſolutio ſequentis quaeſtionis.

§. 4. Sit fg filum grauitatis expers fixum in puncto f atque connexum cum chorda vniformiter grani ge: ponatur potentia tendens $=$ ponderi P dum chordae longitudo a ponduſculum habere ponitur, quod ſit $= p$, tum vtique fiet pro vibrationibus ſimpliciſſimis vel fundamentalibus, vt filum fe perpetuo poſitum ſit in directum dum chorda edc incuruatur, prorſus vt in figura prima, ſimulque vt tangens curuae in extremitate e ſit ipſa fe. Ponatur porro longitudo $fg = l$; longitudo $gc = \lambda$; his omnibus poſitis quaeritur natura vibrationum. Tab. III. Fig. 2.

Ex praemiſſis patet, nil aliud hic requiri quam vt determinetur longitudo ac, quia hac cognita chorda gc vibrationes ſuas prorſus eodem modo faciet, ac ſi longitudinem haberet ac eſſetque fixa in punctis a et c remoto filo fg, ſit igitur longitudo $ac = 2$ L ſiue ſemilongitudo $bc = $ L, habebitur vi §. 2. art. B. haec aequatio $l = \frac{-L}{q} \times$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L} q$, vbi ſignum ponitur negatiuum, quia hic punctum d ſemper cadit intra puncta d et c (§. 2. art. B): atque haec aequatio inſeruit ad determinandum valorem longitudinis ac pro *curua vibratoria primitiua*, quam per 2 L indicauimus: hanc nunc aequationem paulo accuratius proſequemur.

§. 5. Cum quantitas Arc. $\frac{\lambda}{L}q$ indicet quadrantem circuli, vnitatem pro radio habentis, multiplicatum per rationem $\frac{\lambda}{L}$, ponemus breuitatis cauſa $\frac{\lambda}{L}q = z$, vbi z denotat arcum circularem radio vnitate deſcriptum, atque ſic aequatio noſtra abit in hanc alteram $\frac{l}{\lambda} = -\frac{tang.\ Arc.\ z}{Arc.\ z}$, in qua ſignum negatiuum indicat eſſe arcum $\frac{\lambda}{L}q$, ſiue z ſemper quadrante circuli maiorem; mox autem videbimus huic aequationi infinitas conuenire radices: cum arcus z inter omnes poſſibiles minimus eſt inſeruit vibrationibus fundamentalibus explicandis: De hoc caſu ante omnia dicemus.

I. Sit longitudo l ſiue longitudo fili fg infinita, erit tangens in e parallela cum linea fc atque ſic cadet punctum e in ipſum punctum d ſic vt fiat $bc = gc$ ſiue $L = \lambda$ atque adeo $Z = q$: Caſus iſte per ſe obuius immediate aequatione noſtra indicatur, ideo quod tangens quadrantis eſt infinita.

II. Si, e contrario, ponatur $l = 0$ ita vt filum fg euaneſcat, erit punctum e fixum in g et chorda gc vibrationes ſuas pro theoria communi faciet et punctum d cadet in medium chordae gc; ſic igitur oportet vt fiat $L = \frac{1}{2}\lambda$, quod iterum aequatio noſtra indicat, quandoquidem oritur $\frac{\lambda}{L}q = Z = 2q$, cuius tangens $= 0$.

III. Sic igitur, manentibus caeteris omnibus, ſola variante longitudine fili, ſubſiſtent omnes *curuae vibratoriae primitiuae* intra limites $L = \lambda$ et $L = \frac{1}{2}\lambda$, atque adeo

adeo omnes ſoni, qui a diuerſa longitudine fili oriri poſſunt, ſubſiſtent intra *octauam* ſunt enim ſoni longitudinibus L reciproce proportionales.

§. 6. Facile nunc erit longitudinem fili ea conditione determinare, vt ſonus intermedius proveniat qualiscunque datus: etenim hoc dato innoteſcit ratio $\frac{\lambda}{L}$; hinc valor Z atque valor $-\frac{tang.\ Arc.\ z}{Arc.\ z}$, qui poſterior multiplicatus per longitudinem chordae dabit deſideratam longitudinem fili; totum proceſſum vnico illuſtrabo exemplo.

Fuerit longitudo fili fg determinanda ea conditione vt ſonus a vibrationibus $fedc$ reſultans interuallo vnius quintae ſiue diapentes deprimatur infra ſonum, quem chorda gc ſola edit cum eſt fixa in puncto g, pro quo ſcilicet caſu inuenimus $L = \frac{1}{2}\lambda$.

Pro hoc exemplo oportet vt fiat

$bc = L = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\lambda = \frac{3}{4}\lambda$; vnde

$Z = \frac{\lambda}{L} q = \frac{4}{3} q = \text{Arc. } 120°$.

cuius valor proxime $= \frac{44}{21}$ ſiue 2.095 et cuius tangens $= -1.732$; vnde $fg = l = \frac{1732}{2095}\lambda$ ſiue $= 0.827\lambda$ atque ſic facillime determinatur longitudo fili ex data longitudine chordae pro dato ſono producendo; at taedioſior fit calculus, quando ex datis longitudinibus fili atque chordae determinanda eſt longitudo L; quod nunc faciam.

§. 7 Redeamus igitur ad aequationem paragraphi quarti ſcilicet $l = -\frac{L}{q}$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L} q$, in qua

qua ſi longitudines l et λ datae fuerint, poterit longitudo quaeſita L proxime inueniri tentando, quo facto variae ſunt methodi, quibus longitudo haec *e a* qualibet accuratione determinatur. Cognita longitudine L, habetur $ac = 2\,L$, quod indicat, chordam gc filo fg connexam vibrationes facere iſochronas cum vibrationibus chordae eiusdem ſpeciei eodemque pondere tenſae, quae longitudinem habeat ac et quae fixa ſit in punctis a et c, ſimiles olim obtinui aequationes, cum inquirerem in ſonos tibiarum diuerſimode conſtructarum, de quibus tractatum conſcripſi, qui extat, *dans les memoires de l'Academie R. des ſciences de Paris pour l'année 1762. pag.* 431. Praefatam aequationem exemplo aliquo illuſtrabo.

Fuerint longitudines fili fg et chordae gc inter ſe aequales atque ſic habebitur $\lambda = -\frac{L}{q}\,\text{tang. Arc.}\,\frac{\lambda}{L}\,q$ ſiue $\frac{\lambda q}{L} = -\,\text{tang. Arc.}\,\frac{\lambda q}{L}$: ſiue ſimpliciter $\frac{\lambda q}{L} = -\,\text{tang.}\,\frac{\lambda q}{L}$; nam expreſſio Arc. $\frac{\lambda q}{L}$ nil aliud indicat, quam quod quantitas $\frac{\lambda q}{L}$ ſit tanquam arcus circularis, radio vnitate deſcriptus, conſiderandus; igitur exemplum noſtrum poſtulat vt quaeratur arcus circuli, cuius tangens negatiue ſumta ſit ipſi arcui aequalis: hunc arcum inuenio $116^\circ.\,15'$, cuius magnitudo $= 2.028$ et cuius tangens $= -2.028$. Eſt igitur $\frac{\lambda q}{L} = 2.028$ atque poſito $q = \frac{l}{l}$ ſit $L = \frac{11000}{14196}\lambda$; hinc $ac = 2\,L = \frac{11000}{7098}\lambda$: Ergo tandem eſt ſonus chordae ſimplicis gc ad ſonum eiusdem chordae aequali filo fg iunctae vt 11000 ad 7098; ſi prior indicetur per c erit alter

medius

medius inter e et f: interuallum eſt vnius quintae cum dimidio ſemitonio.

Si ponatur generaliter $l = f\lambda$, fit $f. \frac{q\lambda}{L} = - \text{tang.} \frac{q\lambda}{L}$, quae aequatio nos docet arcum inueniendum eſſe, qui ſit ad tangentem ſuam negatiue ſumtam vt vnitas ad numerum f ſiue vt longitudo chordae ad longitudinem fili: ſi arcus iſte, quocunque modo inuentus, ponatur $= A$ erit $\frac{q\lambda}{L} = A$ atque adeo $L = \frac{q}{A}\lambda$. Intelligimus ex ſimplicitate harum formularum, huiusmodi quaeſtiones optime definiri quod fecimus, ex longitudine *curuae vibratoriae primitiuae.*

§. 8. Quae adhuc diximus, pertinent ad vibrationes primarias ſonosque *fundamentales* inde formatos, hae vibrationes dicuntur primi ordinis; notum autem eſt geometris, dari ſimul, in vno eodemque ſyſtemate, infinitas alias vibrationum ſpecies quae pertinent ad ordinem ſecundum, tertium, quartum etc.; hos omnes ordines demonſtraui in diuerſis ſchediasmatibus de chordis inaequaliter craſſis, de laminis elaſticis, quae innumeris modis in vſum adhiberi poſſunt, de tibiis ſeu fiſtulis muſicis etc. quibus Illuſtris *Eulerus* noſter addidit vibrationes in tympanis atque campanis.

In chordis tenſis ſimplicibus atque vniformibus omnes hi, varii ordinis, ſoni progrediuntur vt numeri naturales, quod idem valere demonſtraui pro tibiis cylindricis vtraque extremitate apertis; pro tibiis autem alterutra extremitate clauſis ſonos pro-

 gredi

gredi oſtendi vt numeri naturales impares excluſis numeris paribus; in aliis ſyſtematibus alia lege, quae ſaepiſſime transſcendentalis eſt, ſoni progrediuntur; tanta cum ſit hac de re varietas, non abs re erit etiam vibrationes, de quibus hic ſermo eſt, examini noſtro ſubiicere.

§. 9. Hunc in finem notemus aequationem noſtram $l = -\frac{L}{q}$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L}q$ infinitas habere radices, quae ſucceſſiue longitudinem L diminuunt. In prima radice, vbi L maxima eſt, Arcus $\frac{\lambda}{L}q$ ſemper maior eſt quadrante circuli et minor ſemicirculo; pro ſecunda radice Arcus idem continetur inter limites $3q$ et $4q$; pro tertia radice inter limites $5q$ et $6q$ et ſic porro; erit nempe ſucceſſiue Arcus $\frac{\lambda}{L}q = q + \alpha$; $3q + \beta$; $5q + \gamma$ etc.

In his valoribus arculi ſuperaddendi α, β, γ etc. continue decreſcunt, ita vt tandem negligi poſſint, praeſertim ſi longius filum chordae fuerit annexum, aut ſi illos negligere nolimus, poſſint ſaltem ſine vllo negocio proxime determinari ſecundum legem aequationis: cognito autem, verbi gratia pro tertio ordine arculo γ, erit $\frac{\lambda}{L}q = 5q + \gamma$, vnde $L = \frac{q}{5q + \gamma}\lambda$, hinc ſequitur fore pro primo ordine $L = \frac{q}{q + \alpha}\lambda$: pro ſecundo ordine $L = \frac{q}{3q + \beta}\lambda$: pro tertio ordine $L = \frac{q}{5q + \gamma}\lambda$ atque ſic porro: vbi, quod iam monui, arculi α, β, γ etc. ex aequatione noſtra paragraphi ſeptimi ſunt determinandi. Pro hoc procedendi modo idem, quod aſſumſimus

para-

paragrapho ſeptimo, exemplum proſequemur, in quo ſuppoſuimus longitudinem fili l aequalem longitudini chordae.

§. 10. In iſto exemplo iam vidimus ſumendum eſſe, pro vibrationibus fundamentalibus ſeu primi ordinis, arcum $116°\frac{1}{4}$, cuius nempe valor aequalis eſt ſuae tangenti negatiue ſumtae hic igitur eſt arculus $\alpha = 26\frac{1}{4}$ gradibus atque fit

$$L = \frac{q}{q+\alpha}\lambda = \frac{90}{116\frac{1}{4}}\lambda.$$

Pro vibrationibus ſecundi ordinis fit arcus ſuae tangenti aequalis ſi ſumatur $281°\frac{1}{3}$ atque adeo ponatur $\beta = 11\frac{1}{3}$ gradibus, vnde

$$L = \frac{q}{3q+\beta}\lambda = \frac{90}{281\frac{1}{3}}\lambda.$$

Pro tertio ordine iterum aequalitas oritur inter arcum et tangentem, ſi ſumatur arcus $457\frac{1}{8}$ grad. atque adeo $\gamma = 7\frac{1}{8}$ gradibus, vnde nunc

$$L = \frac{q}{5q+\gamma}\lambda = \frac{90}{457\frac{1}{8}}\lambda.$$

§. 11. Caeterum, cum quaeſtio eſt, arculis α, β, γ etc valorem ſuum proxime aſſignare definita formula algebraica, dico fore proxime

$$\alpha = \frac{q}{qq+1} : \beta = \frac{3q}{9qq+1} : \gamma = \frac{5q}{25qq+1} \text{ etc.}$$

qui valores in gradus circuli conuerſi parum a valoribus indicatis differunt: hoc modo absque vlla

reductione praeuia fit proxime pro primo ordine $L = \frac{qq+1}{qq+2}\lambda$: pro ſecundo ordine $L = \frac{9qq+1}{27qq+6}\lambda$: pro tertio ordine $L = \frac{25qq+1}{125qq+10}\lambda$ atque pro $n^{teſimo}$ ordine $L = \frac{(2n-1)^2 qq+1}{(2n-1)^3 q^2 + 2(2n-1)}\lambda$ atque hae formulae vix a vero aberrant, inſeruiunt autem quam maxime ad legem variationum inſpiciendam. Attamen haec methodus non foret ineunda ſi longitudo fili eſſet admodum parua, intelligimus hinc ſonos, qui in variis ordinibus oriuntur, minime dici poſſe harmonicos, etiamſi a vibrationibus chordae vniformis proprie edantur; admitto quidem principia muſica a D. *Rameau* adhibita; diſplicet autem fundamentum cui principia ſua ſuperſtruit et quod a natura ſonorum acceſſoriorum petit: Duo tamen caſus ſunt, quibus ſoni progreſſionem harmonicam formant. Primus eſt quando longitudo fili l tota euaneſcit; ſecundus quando haec longitudo ponitur infinita. Primus caſus ſiſtit theoriam chordarum communem, pro qua ſinguli arcus α, β, γ etc. fiunt aequales quadranti circuli atque longitudines L ſucceſſiue fiunt aequales $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{1}{6}\lambda$ etc. vnde ſoni progrediuntur in ratione numerorum naturalium. Secundus caſus poſtulat vt ſinguli arcus α, β, γ etc. euaneſcant: hoc modo longitudines L ſucceſſiue fiunt aequales λ, $\frac{1}{3}\lambda$, $\frac{1}{5}\lambda$ ipſique ſoni progrediuntur in ratione numerorum naturalium imparium. In vtroque caſu ſoni ſunt harmonici. Haec omnia quidem non aliter quam *in abſtracto* ſunt accipienda, quia fila grauitatis expertia vtique non dantur; attamen

aliquid

aliquid conferre poſſunt ad pleniorem vibrationum notionem ſibi comparandam, quicquid ſit, non omittenda putaui, quia pro fundamento inſeruiunt iis quae mihi dicenda ſuperſunt, cum de vibrationibus chordae, ex duabus partibus compoſitae, acturus, filo *fg* grauitatis experti ſubſtituam alius chordae portionem cum altera chorda *gc* connexae ambasque data quauis grauitate donatas ſupponam.

§. 12. Sint nunc duae diuerſae chordae *bg* et *gc*, quae inter vibrandum aſſumant ſitum *be* et *ec* atque propoſitum fuerit naturam et proprietates harum vibrationum inquirere. Hunc in finem notabimus ante omnia fieri non poſſe quin ambae chordae in puncto *e*, vbi ſunt connexae, communem habeant tangentem *fe*: patet quoque vtramque chordam *be* et *ec* arcum fore alicuius *curuae vibratoriae primitiuae*, a cuius determinatione omnia pendent phaenomena: ambae vero hae curuae, quamuis ad idem pertineant genus, ſpecie tamen different pro ratione diuerſarum longitudinum et craſſitierum quae in ambabus chordis ſupponuntur. Sit itaque pro chorda leuiori *be curua vibratoria primitiua bed* atque adeo arcus *ed* punctis notatis indicet complementum chordae *be*, pariterque *aec* repraeſentet *curuam vibratoriam primitiuam* pro altera chorda grauiore *ce*, cuius ſic complementum eſt arcus *ae*, haec ita ſunt intelligenda, quod chorda *be* ſuas formet vibrationes eadem plane lege cum chorda ſimplici *bed* fixa in punctis *b* et *d* eodem Tab. III. Fig. 3.

 ponde-

pondere tenſa et tota ſua longitudine eiusdem craſſitiei cum chorda *b e* ſimulque altera chorda *c e* vibrationes ſuas faciat easdem quas faceret integra chorda *c e a* fixa in punctis *c* et *a* aequaliter tenſa. Caeterum integra figura noſtra ita eſt delineata, vt chorda *b e* minoris craſſitiei ſuppoſita fuerit quam chorda altera *c e*; hinc, pro priori, longitudo *b d* maior repraeſentatur quam longitudo *c a*, vt ſynchronismo ſatisfiat. His ita praeparatis quaeſtionem noſtram eo, qui ſequitur modo aggredior.

§. 13. Sit longitudo chordae $cg = \lambda$ atque longitudo $ca = 2\,L$, fiet tangens curuae *c e a* pro extremitate *e* ſiue $fe = -\frac{L}{q}$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L}q$. Eodem modo, poſita longitudine $bg = \lambda'$ atque longitudine $bd = 2\,L'$ fiet eadem tangens $fe = \frac{L'}{q}$ tang. Arc. $\frac{\lambda'}{L'}q$, quae hic affirmatiue ponenda eſt, quoniam haec tangens, vtrique chordae communis, modo contrario poſita eſt pro curua *c e* et pro curua *b e*: Hinc oritur talis aequatio fundamentalis.

$$-L \text{ tang. Arc. } \frac{\lambda}{L}q = L' \text{ tang. Arc. } \frac{\lambda'}{L'}q.$$

Nunc vero diuerſam grauitatem vtriusque chordae vnice tribuamus diuerſae earum craſſitiei ſitque craſſities chordae $cg = p$ atque craſſities chordae $bg = p'$ ita vt aequales longitudines chordarum *c g* et *b g* pondera habeant quae ſint vt p ad p'; tunc erit, vt notum eſt, (ob ſynchronismum vibrationum *c e a* et *b e d*) $pLL = p'L'L'$ atque adeo $L' = L\sqrt{\frac{p}{p'}}$;

hoc

hoc autem ſubſtituto valore, mutabitur praefata noſtra aequatio fundamentalis in hanc alteram

$$\frac{-\text{tang. Arc } \frac{\lambda}{L}\, q}{\sqrt{p}} = \frac{\text{tang. Arc. } \frac{\lambda' \sqrt{p'}}{L \sqrt{p}}\, q}{\sqrt{p'}}.$$

Ad normam huius aequationis vnica, quae ſupereſt, incognita L determinanda reſtat, quo facto erit 2 L ſiue longitudo ac aequalis longitudini chordae ſimplicis eiusdem craſſitiei cum chorda cg quae eodem pondere tenſa vibrationes iſochronas faciet cum ſyſtemate propoſito chordarum cg et bg.

§ 14. Quod ſi iam in aequatione noſtra §. 13. ponatur grauitas chordae bg ſiue $p' = 0$, oritur iterum problema §. 4. pro filo grauitatis experte longitudinis l vel λ': vidimus autem in eodem paragrapho quarto, eſſe tunc l vel nunc $\lambda' = -\frac{L}{q}$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L}\, q$: quaeritur itaque, quod non ſtatim apparet, quomodo haec aequatio ex noſtra aequatione § 13. deduci poſſit? hunc in finem conſideremus grauitatem p' tanquam infinite paruam atque ſic erit Arc $\frac{\lambda' \sqrt{p'}}{L \sqrt{p}}\, q$ infinite paruus et proinde arcus iſte non differt ab ſua tangente. Eſt itaque tang. Arc. $\frac{\lambda' \sqrt{p'}}{L \sqrt{p}}\, q = \frac{\lambda' \sqrt{p'}}{L \sqrt{p}}\, q$ Tab III. Fig. 2.

ſiue $\frac{\text{tang. Arc. } \frac{\lambda' \sqrt{p'}}{L \sqrt{p}}\, q}{\sqrt{p'}} = \frac{\lambda' q}{L \sqrt{p}}$. Subſtituto hoc valore pro poſteriori membro aequationis hacque multiplicata per $\sqrt{p}$ oritur $\frac{\lambda' q}{L} = -$ tang. Arc. $\frac{x}{L}\, q$ ſiue tandem $\lambda' = -\frac{L}{q}$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L}\, q$. Sic itaque problema paragraphi quarti optime deducitur ex problemate paragraphi decimi tertii.

§. 15.

§. 15. Si porro ponatur longitudo bg vel $\lambda' = 0$, oportet vt ſit $-$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L} q = 0$, vnde oritur $\frac{\lambda}{L} q = 2q$ vel $= 4q$ vel $= 6q$ etc. atque $L = \frac{1}{2}\lambda$ vel $= \frac{1}{4}\lambda$ vel $= \frac{1}{6}\lambda$, quae proprietas convenit vtique chordae ſimplici cg longitudinis λ fixae in punctis g et c. Sed ſi ponatur $\lambda = 0$ oportet vt ſit $\frac{\text{tang. Arc} \frac{\lambda' \sqrt{p'}}{L \sqrt{p}} q}{\sqrt{p'}} = 0$, ſiue tang. Arc. $\frac{\lambda'}{L'} q = 0$, vnde nunc $\frac{\lambda'}{L'} q = 2q$, vel $= 4q$, vel $= 6q$ etc. atque $L' = \frac{1}{2}\lambda'$ vel $= \frac{1}{4}\lambda'$ vel $= \frac{1}{6}\lambda'$, quae proprietas competit nunc chordae ſimplici bg longitudinis λ' fixae in punctis g et b.

§. 16. Quod ſi praeterea ponatur $p = p'$ tunc ambae chordae bg et cg vnam eandemque conſtituent chordam bc atque erit etiam $L = L'$: aequatio autem noſtra ſimpliciter mutabitur in hanc $-$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L} q =$ tang. Arc. $\frac{\lambda'}{L} q$, quae nunc indicat eſſe ſummam arcuum $\frac{\lambda}{L} q + \frac{\lambda'}{L} q = 2q$ vel $= 4q$ vel $= 6q$ etc. Ergo L ſiue L' erit $= \frac{\lambda + \lambda'}{2}$ vel $= \frac{\lambda + \lambda'}{4}$ vel $= \frac{\lambda + \lambda'}{6}$ etc. haec autem proprietas competit chordae bc vniformiter craſſae atque fixae in punctis b et c. Omnia haec corollaria per ſe obuia ipſi rei naturae perfecte conueniunt; ſimul autem ab aequatione noſtra, ſi debito modo tractetur, obtime indicantur.

§. 17. Progredior ad caſus, qui integrum poſtulant calculum numericum aequatione noſtra indica-

dicatum; hi vero ab initio non poſſunt aliter quam congruis poſitionibus pro arcu $\frac{\lambda}{L} q$ ſucceſſiue corrigendis euolui, quo facto verus valor huius arcus mox proxime innoteſcet, quod ex ſequenti apparebit exemplo.

Exemplum. Ponantur ambae chordae cg et bg longitudine inter ſe aequales, fuerit autem craſſities ſeu grauitas chordae bg quadrupla alterius chordae cg. Sic fiet $\lambda' = \lambda$ et $p' = 4p$ atque aequatio noſtra §. 13. erit -2 tang. Arc. $\frac{\lambda}{L} q =$ tang. Arc. $\frac{2\lambda}{L} q$. Si ponatur Arc. $\frac{\lambda}{L} q = 55$ graduum, oportet vt ſit -2 tang. $55° =$ tang. $110°$. ſiue $2.856 = 2.747$. Si vero idem arcus ponatur $= 54°$. prodibit $2.752 = 3.077$: vnde iam liquet fore proxime Arc. $\frac{\lambda}{L} q = 54°. 45'$, pro quo obtinetur $2.829 = 2.824$, quod mendacium tuto negligitur. Ergo erit proxime $\frac{\lambda}{L} = \frac{54\frac{3}{4}}{90} = \frac{219}{360}$; vnde $L = \frac{360}{219} \lambda$ atque $L' = \frac{180}{219} \lambda$; ſiue $2L = \frac{720}{219} \lambda$ atque $2L' = \frac{360}{219} \lambda$. Ergo vibrationes ambarum chordarum connexarum iſochronae erunt cum vibrationibus chordae ſimplicis eiusdem craſſitiei cum chorda cg atque eodem pondere tenſae, cuius longitudo ſit $= \frac{720}{219} \lambda$ ſiue etiam cum vibrationibus chordae ſimplicis eiusdem craſſitiei cum chorda bg eodemque pondere tenſae cuius longitudo foret $= \frac{360}{219} \lambda$. Si porro ſumatur ſonus chordae ſimplicis longitudinis bc ſeu 2λ, eiusdem craſſitiei cum chorda bg, pro ſono fundamentali, erit ſonus chordae eiusdem lon-

gitudinis ſed aequaliter craſſae cum chorda cg prioris octaua: ſonus autem ſyſtematis propoſiti exprimetur per $\frac{48}{385}$ atque erit medius inter tertiam minorem et tertiam maiorem ſoni fundamentalis.

§. 18. Apparet ex allato exemplo ante omnia, repetitis tentaminibus, explorandum eſſe arcum ſiue angulum $\frac{\lambda}{L} q$ fundamentalem, qui aequationi paragraphi decimi tertii ſatisfaciat. Fuerit angulus iſte $= \Phi$ habebitur

$$\frac{\lambda}{L} q = \Phi \text{ atque } L = \frac{q}{\Phi} \lambda.$$

At rurſus patet aequationem paragraphi decimi tertii infinitas habere radices, quae longitudinem L ſucceſſiue minorem atque minorem faciunt ſonoque acutiori reſpondent, dum indicant vtramque chordam pluries poſſe axem interſecare atque inflexiones contrarias aſſumere prouti figura quinta et ſequentes indicant. Sic omnes configurationes, quas chordae inter vibrandum aſſumere poſſunt, obtinebuntur, ſi nulla radix praetermittatur. De his configurationibus atque inflexionibus, quae ambas chordas in plures ramos ſiue concamerationes diſpeſcunt, notandum eſt, quod vnica concameratio irregularis ſit, illa ſcilicet quae punctum ambas chordas connectens continet: Reliquae concamerationes omnes in vtraque chorda erunt regulares inſtar chordarum ſimplicium tota ſua longitudine vniformium vibrantium: quae in vna eademque chorda formantur ſunt omnes inter

inter ſe aequales, longiores autem fiunt in chorda tenuiori, breuiores in craſſiori; eritque longitudo concamerationum in vna chorda praeciſe $= 2\,L$ in altera $= 2\,L' = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{p'}}\,L$: haec omnia ex ipſa rei natura absque calculo per ſe patent.

Similes forent vibrationes aëreae in fiſtul's, ſi columna aërea fiſtulae incluſa in duas diuerſas partes diſpeſceretur diuerſa denſitate praeditas aut etiam in aëre libero, in quo ſonus propagatur, ſi aër a ſubita mutatione caloris denſitatem ſuam aliquo in loco confeſt m mutare putetur; annon ſuſpicari licet, ſimile aliquid contingere, quoties radius luminis ex vno medio in aliud incidit. Quicquid ſit, operae pretium erit accuratius in vibrationes altiorum ordinum inquirere, quod exemplo aliquo nunc faciam.

§. 19 Sit iterum, vt §. 13 $\lambda' = \lambda$ atque $p' = 4\,p$, quibus ſuppoſitionibus conuenit aequatio $-\,2$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L}\,q =$ tang. Arc. $\frac{2\lambda}{L}\,q$, pro quo vidimus §. 17. eſſe arcum fundamentalem $\frac{\lambda}{L}\,q = 54^{\circ}.\ 45'$: atque arcum

$$\frac{2\lambda}{L}\,q = 109^{\circ}.\ 30' \text{ ſit } \Phi = \text{ang. } 54^{\circ}.\ 45',$$

atque ſumantur ſucceſſiue anguli

$$\Phi,\ 2q-\Phi,\ 2q+\Phi,\ 4q-\Phi,\ 4q+\Phi,\ 6q-\Phi,\ 6q+\Phi \text{ etc.}$$

patet ſingulos hos arcus communem habere tangentem ſed alternatim affirmatiuam aut negatiuam:

 Dein-

Deinde ſumantur horum angulorum dupli atque obtinebitur

$$2\Phi, 4q-2\Phi, 4q+2\Phi, 8q-2\Phi, 8q+2\Phi\ \ 12q-2\Phi,\ 12q+2\Phi \text{ etc.},$$

quorum iterum ſinguli communi gaudent tangente alternatim affirmatiue et negatiue ſumta: Igitur ſatisfaciente angulo Φ, ſatisfacient omnes reliqui

$$2q-\Phi,\ 2q+\Phi,\ 4q-\Phi,\ 4q+\Phi,\ 6q-\Phi,\ 6q+\Phi \text{ etc.}$$

vnde obtinentur ſucceſſiue pro $\frac{\lambda}{L}q$ ſequentes valores

$$\Phi, 2q-\Phi, 2q+\Phi, 4q-\Phi, 4q+\Phi, 6q-\Phi, 6q+\Phi, \text{ etc.}$$

atque adeo

$$L=\frac{q}{\Phi}\lambda;\ L=\frac{q}{2q-\Phi}\lambda;\ L=\frac{q}{2q+\Phi}\lambda;\ L=\frac{q}{4q-\Phi}\lambda;$$
$$L=\frac{q}{4q+\Phi}\lambda;\ L=\frac{q}{6q-\Phi}\lambda;\ L=\frac{q}{6q+\Phi}\lambda; \text{etc.}$$

Subſtituantur pro q et Φ valores 90°. et $54^{\circ}\frac{3}{4}$, atque ſic pro longitudine L prodibunt ſucceſſiue ſequentes valores

$$\tfrac{360}{219}\lambda : \tfrac{360}{501}\lambda : \tfrac{360}{939}\lambda : \tfrac{360}{1221}\lambda : \tfrac{360}{1659}\lambda : \tfrac{360}{1941}\lambda : \tfrac{360}{2379}\lambda \text{ etc.}$$

Ita quoque pro altera chorda longitudo L', dimidiatis terminis, fit ſucceſſiue aequalis

$$\tfrac{180}{219}\lambda' : \tfrac{180}{501}\lambda' : \tfrac{180}{939}\lambda' : \tfrac{180}{1221}\lambda' : \tfrac{180}{1659}\lambda' : \tfrac{180}{1941}\lambda' : \tfrac{180}{2379}\lambda' : \text{etc.}$$

ſoni autem progrediuntur in ratione denominatorum 219:501:939:1221 etc.

Configurationes, quas ambae chordae inter vibrandum aſſumunt, ſiſtuntur pro quatuor caſibus ſimpli-

ſimpliciſſimis figuris 4. 5. 6. 7. quarum affectiones Tab. III. quisque propria ſua contemplatione conſpiciet. Determinatis longitudinibus L et L' habetur 2 L = longitudini cuiusuis concamerationis in chorda tenuiori et 2 L' = longitudini concamerationum in chorda craſſiore: Fiunt autem in vtraque chorda concamerationes replicandae donec proxime ad punctum *b*, in quo chordae vnitae ſunt, peruentum fuerit; tunc concameratio intermedia vtrobique reliqua ex duabus portionibus vtriusque chordae erit compoſita, ſimul tamen cum reliquis concamerationibus ſynchrona.

Interſectiones, quas curuae cum toto axe formant, fient omnes pro eadem chorda ſub angulis perfecte aequalibus: at vero maximae amplitudines concamerationum in chorda tenuiori, pro noſtro exemplo fiunt maiores quam in chorda craſſiori, quamuis axem ſub angulo minori interſecent, exceptis caſibus, qui figuris 8, 9 etc. reſpondent, de quibus nunc dicam.

§. 20. Notabile eſt, quod praememoratae vibrationum ſpecies diuerſae, quamuis infinitae ſint, nondum tamen omnes, quae oriri poſſunt, expleant. Id quidem non potui non animaduertere, poſtquam vidi tranſitum a configuratione figurae quintae ad ſextam, in qua poſteriori tres ſunt nodi, cum in praecedente vnicus eſſet; vnde intellexi, configurationem dari mediam duobus nodis donatam, qualem

 ſiſtit

ſiſtit figura octaua. Ita quoque deficere video configurationem figurae nonae, quae quinque ſiſtit nodos. In genere methodus praemiſſa praetermittit configurationes pro quibus punctum connexionis b incidit in nodum et in quibus numerus nodorum ſit $= 3n - 1$, ſi per n intelligatur numerus qualiscunque integer. Alteram hanc vibrationum claſſem ita definire licet.

In paragrapho praecedente monui, quod ſi arcus $\frac{\lambda}{L} q = \Phi$ ſatisfaciat aequationi $-2 \tang \text{Arc.} \frac{\lambda}{L} q = \tang. \text{Arc.} \frac{2\lambda}{L} q$, futurum ſit vt ſimul arcus $2q - \Phi$, $2q + \Phi$, $4q - \Phi$, $4q + \Phi$, $6q - \Phi$, $6q + \Phi$, etc. ſatisfaciant. Iam vero patet praefatam aequationem admittere quoque ſuppoſitionem $\Phi = 0$, indeque deduci arcus $2q - 0$, $2q + 0$, $4q - 0$, $4q + 0$, $6q - 0$, $6q + 0$ etc. quorum ſinguli bini, a ſe non differunt ita vt ſimpliciter enumerari debeant arcus $2q$, $4q$, $6q$ etc. Igitur pro hac vibrationum claſſe, faciendum ſucceſſiue erit $\frac{\lambda}{L} q = 2q$; $\frac{\lambda}{L} q = 4q$; $\frac{\lambda}{L} q = 6q$ etc vnde pro L ſucceſſiue proueniunt valores $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{1}{6}\lambda$ etc. atque pro L' valores $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{1}{8}\lambda$, $\frac{1}{12}\lambda$ etc. qui nunc valores figuris 8 et 9 perfecte conueniunt; hae itaque nouae configurationes prioribus erunt ordine ſuo intercalandae, quo facto omnes ordines obtinentur et numerus nodorum cuiuis numero naturali poterit eſſe aequalis.

§. 21.

§ 21. Ad ductum praemiſſi exempli, ſingula alia pertractari atque computari poterunt: Conducet autem praeuio vti examine ſynthetico de proportione, quae intercedit inter Vp et Vp', quae inſeruiet ad proportionem inter tangentes indicandam; tum et de proportione, quae ipſis arcubus competere debet; etenim ſi alterutra tangens multo maior debeat eſſe ſua ſocia, indicium habemus angulum non multum a recto deficere atque ſi ſimul ipſe angulus multum excedere debeat angulum ſocium, indicium quoque habebimus de paruitate poſterioris anguli.

§ 22. Plurima forent ſuperaddenda, veluti quaeſtiones de abbreuiatione alterutrius chordae requiſita, vt ſonus fundamentalis emergens datum inde formet interuallum muſicum cum ſono fundamentali qui editur absque iſta abbreuiatione. In huiusmodi quaeſtionibus ante omnia, longitudo L vel L' per aequationem §. 13. eſt determinanda, quo facto ex interuallo muſico dato innoteſcit valor nouae longitudinis L vel L', vnde determinatur longitudo chordae abbreuiandae. Sic pro exemplo §. 17. ſi chorda craſſior appoſito digito reducatur ad longitudinem $\frac{161}{433}$ longitudinis ſuae naturalis, inde obtinebitur octaua ſoni qui editur remoto digito.

Poteſt etiam alius conſiderari modus, quo lex continuitatis in chorda vibrante interrumpitur, geometra-

metrarum attentione non indignus, ſi ſcilicet chorda, tota ſua longitudine vniformis, in puncto aliquo annexum habere ponatur ponduſculum: Hic equidem ambo ſegmenta chordae in puncto, vbi ponduſculum ſuperadditum habent, neutiquam communem habent tangentem; ambae vero tangentes ſunt tanquam fila grauitatis expertia atque ponduſculo alligata conſideranda, ſimulque efficiendum, vt vibrationes ponduſculi fiant iſochronae, cum vibrationibus vtriusque chordae ſegmenti.

SECTIO

SECTIO QVARTA DE MOTV AERIS IN TVBIS.

Auctore

L. EVLERO.

CAPVT I.

DE AERIS AGITATIONIBVS MINIMIS IN TVBIS AEQVALITER AMPLIS.

Problema 67.

1.

Dum aer in tubo aequaliter amplo horizontaliter poſito ſiue ſit rectus ſiue curuus vtcunque agitatur, aequationes inuenire, quibus eius motus determinatur. Tab. IV. Fig. 70.

Solutio.

Sit A B tubus propoſitus, qui ſiue ſit rectus ſiue curuus, tanquam rectus in figura repraeſentatur,

tur, quoniam vidimus ab eius curuamine motum non perturbari. Sit ergo eius amplitudo conſtans $= ff$. Ad hoc autem problema reſoluendum vti conueniet methodo poſteriori, qua ſtatus aëris in tubo quicunque cum ſtatu initiali comparatur. Solutionem ergo ex problemate 45 petamus quem in finem conſideremus aëris particulam, quae initio, vbi erat tempus $t = 0$, fuerit in S, ac ponamus ſpatium $AS = S$, eius particulae vero denſitatem $= Q$; at amplitudo tubi, quae ibi poſita erat $= \Omega$ hic nobis eſt $= ff$. Iam elapſo tempore $= t$ eadem particula peruenerit in s, ſtatuaturque ſpatium $As = s$, eius denſitas $= q$, preſſio $= p$, et celeritas ſecundum directionem $sB = v = (\frac{ds}{dt})$ amplitudine tubi exiſtente $\omega = ff$. His poſitis prima aequatio ibi inuenta praebet $q(\frac{ds}{dS}) = Q$; deinde quia ob tubum horizontaliter poſitum grauitas motum non afficit, altera aequatio ibi inuenta hanc induet formam $\frac{2g\,dp}{q} = -ds(\frac{dds}{dt^2})$, quae cum tempus hic vt conſtans ſpectetur, ita repraeſentari poteſt

$$\frac{2g}{q}(\frac{dp}{dS}) + (\frac{ds}{dS})(\frac{dds}{dt^2}) = 0;$$

vbi meminiſſe iuuabit quantitates p, q, s functiones eſſe duarum variabilium S et t quantitatem Q vero tantum functionem ipſius S. Aëris autem natura hic praeterea introducatur, qua nouimus preſſionem p perpetuo denſitati q eſſe proportionalem; vnde ſi denſitati datae b conueniat preſſio $= a$, erit $p = \frac{aq}{b}$, ex quo poſterior aequatio fit

$$\frac{2ga}{bq}(\frac{dq}{dS}) + (\frac{ds}{dS})(\frac{dds}{dt^2}) = 0,$$

prima.

prima exiſtente $q\left(\frac{ds}{dS}\right)=Q$. Hinc igitur denſitatem q elidere licet cum ſit

$$\left(\frac{dq}{dS}\right)=\frac{dQ}{dS\left(\frac{ds}{dS}\right)}-\frac{Q\left(\frac{dds}{dS^2}\right)}{\left(\frac{ds}{dS}\right)^2} \text{ ob } q=\frac{Q}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}$$

ideoque

$$\frac{1}{q}\left(\frac{dq}{dS}\right)=\frac{dQ}{QdS}-\frac{\left(\frac{dds}{dS^2}\right)}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}.$$

Quocirca habebimus hanc aequationem, qua motus determinatio continetur

$$\frac{2gadQ}{bQdS}\left(\frac{ds}{dS}\right)-\frac{2ga}{b}\left(\frac{dds}{dS^2}\right)+\left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=0$$

quam aequationem ita reſolui oportet, vt poſito $t=0$ fiat $s=S$, tum autem fiet $\left(\frac{ds}{dS}\right)=1$, ideoque $q=Q$ vt rei natura poſtulat.

Coroll. 1.

2. Si ergo hanc aequationem ita reſoluere liceret, vt qualis futura ſit functio quantitas s binarum variabilium S et t aſſignari poſſet, tum omnes motus, qui quidem in aërem tubo contentum cadere queant, definiri poſſent. Sicque totum negotium ad reſolutionem huius aequationis eſt perductum.

Coroll 2.

3. Cum illa aequatio differentialia ſecundi gradus inuoluat, eius integrale completum duas

ſunctiones indefinitas continere debet, quas deinceps ex ſtatu initiali determinari oportet, et quoniam non ſolum cuiusque particulae locus initio ſumitur datus ſed etiam motus, ad hoc efficiendum vtique binis ſunctionibus indeterminatis opus eſt.

Scholion 1.

4. Determinatio ergo motus aëris opus eſt longe difficilimum cum caſus ſimpliciſſimus quo aerem eodem caloris gradu praeditum in tubo aequaliter amplo, et grauitatis effectu remoto moueri ponimus, ad eiusmodi aequationem ſit perductus, cuius reſolutio nullo adhuc artificio cognito expediri poteſt: quod eo minus eſt mirandum quod ea Analyſis infinitorum pars, quorſum haec aequatio eſt referenda nuper demum excoli eſt coepta, neque in ea vltra prima elementa vix quicquam adhuc eſt praeſtitum. Maxime ergo arduae ſunt iudicandae omnes quaeſtiones, qua circa motum aëris inſtituuntur, etiamſi forte primo intuitu facillimae videantur veluti ſi aër in tubo ope emboli vel condenſetur vel rarefiat, cuius certe motus determinatio fruſtra ſuſciperetur. Quando enim ex vi aëris condenſati vulgo motus globuli in ſclopeto pneumatico definiri ſolet, nullo modo ad motum ipſius aëris reſpicitur ſed is potius quouis momento, quaſi eſſet in quiete ſpectatur, ex quo neglectu etiamſi in motu globuli vix vllus error gigni videatur, minime tamen hoc exemplum proferre licet, in quo circa motum aëris quic-

quicquam fuerit definitum: quin potius confiteri cogimur, nos circa hanc Theoriae motus fluidorum partem etiamnunc in maxima ignoratione verſari.

Scholion 2.

5. Quoniam ſolutionem problematis methodo poſteriori ſupra expoſita ſum aggreſſus, ne quis ſuſpicetur methodum priorem feliciori ſucceſſu forte adhiberi, ſolutionem inde petitam hic apponam. Secundum problema 44 igitur ſine reſpectu ad ſtatum initialem habito ad tempus $= t$ conſideremus aëris particulam in s verſantem vocato ſpatio $As = s$ ſitque ibi denſitas $= q$, preſſio $= p$ et celeritas $= v$ in directione sB: et quoniam amplitudo tubi eſt conſtans ſeu $\omega = ff$ et nullae admittuntur vires ſollicitantes, habebuntur hae duae aequationes:

$$\left(\frac{d.qv}{ds}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0 \text{ et } \frac{2g\,dp}{q} = -v\,dv - ds\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

Cum autem ex natura aëris ſit $p = \frac{aq}{b}$ poſterior aequatio fiet

$$\frac{2ga\,dq}{bq} + v\,dv + ds\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0.$$

quae cum tempus t ponatur conſtans reducitur ad hanc formam:

$$\frac{2ga}{bq}\left(\frac{dq}{ds}\right) + v\left(\frac{dv}{ds}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$$

Quia igitur prior euoluta praebet.

$$v\left(\frac{dq}{ds}\right) + q\left(\frac{dv}{ds}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

 pona-

ponamus $q = e^y$ inde fiet:

$$\upsilon\left(\frac{dy}{ds}\right) + \left(\frac{d\upsilon}{ds}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

ex altera vero

$$\frac{2ga}{b}\left(\frac{dy}{ds}\right) + \upsilon\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right) + \left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) = 0$$

Hinc elicitur

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = -\frac{b\upsilon}{2ga}\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right) - \frac{b}{2ga}\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$$

ex illa vero

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right) + \frac{b\upsilon\upsilon}{2ga}\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right) + \frac{b\upsilon}{2ga}\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$$

Quare cum ſit $\left(\frac{ddy}{ds\,dt}\right) = \left(\frac{ddy}{dt\,ds}\right)$ concludimus.

$$\left(\upsilon\upsilon - \frac{2ga}{b}\right)\left(\frac{dd\upsilon}{ds^2}\right) + 2\upsilon\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right)^2 + 2\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right)\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) + 2\upsilon\left(\frac{dd\upsilon}{dt\,ds}\right) + \left(\frac{dd\upsilon}{dt^2}\right) = 0$$

vnde nunc inueſtigari oportet qualis ſit υ functio binarum variabilium t et s. Haec autem aequatio ea, quam in ſolutione problematis dedimus, non ſolum non eſt tractatu facilior, ſed illa etiam hoc commodo eſt praedita, vt felici ſucceſſu ad aëris agitationes minimas accommodari poſſit quemadmodum in ſequente problemate docebimus.

Problema 68.

6. In caſu praecedentis problematis ſi motum aëris ita comparatum eſſe nouerimus vt ſingulae particulae non niſi quam minime a loco initiali recedant, iſtas aëris agitationes minimas determinare.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 70. Praecedentis problematis ſolutio ad hunc caſum accommodabitur ſi ſpatium Ss, quo aëris particulam

Iam s a ſitu ſuo initiali S remotam ponimus, in calculo tanquam minimum tractemus. In hunc finem ponamus $s = S + z$ ita vt z ſpectanda ſit vt quantitas minima, atque aequatio, motum determinans hanc induet formam:

$$\frac{2\,g\,a\,dQ}{b\,Q\,dS}\left(1+\left(\frac{dz}{dS}\right)\right)-\frac{2\,g\,a}{b}\left(\frac{ddz}{dS^2}\right)+\left(1+\left(\frac{dz}{dS}\right)^2\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)=0$$

quae cum formula $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ prae vnitate quaſi euaneſcat contrahitur in hanc:

$$\frac{2\,g\,a\,dQ}{b\,Q\,dS}-\frac{2\,g\,a}{b}\left(\frac{ddz}{dS^2}\right)+\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=0$$

cuius ſi modo primus terminus abeſſet, integrale ex iis, quae iam in hoc nouo calculi genere ſunt comperta, dari poſſet; foret enim

$$z=\Gamma:\left(S+t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right)+\Delta:\left(S-t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right)$$

Cum autem primus terminus ſolam variabilem S contineat cuius Q eſt functio data, integratio eo non turbatur, eritque aequationis noſtrae integrale completum:

$$z=\int dS\,l\frac{Q}{B}+\Gamma:\left(S+t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right)+\Delta:\left(S-t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right)$$

quo inuento vt reliquae motus conditiones eliciantur, ob $s = S + z$ erit

$$\left(\frac{ds}{dS}\right)=1+l\frac{Q}{B}+\Gamma':\left(S+t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right)+\Delta':\left(S-t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right)\ \text{et}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)=\frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Gamma':\left(S+t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right)-\frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Delta':\left(S-t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right)$$

ex quarum formarum illa colligitur denſitas aëris in s elapſo tempore t quae eſt $q=\frac{Q}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}$; hincque porro

ro preſſio $p = \frac{aq}{b}$, ex hac vero celeritas in eodem loco $\upsilon = (\frac{ds}{dt})$, ſicque ad quoduis tempus ſtatus in quo aer verſabitur, perfecte aſſignari poterit, ſi modo binae functiones indefinitae Γ et Δ ex ſtatu initiali dato debite determinentur: id quod ſequenti modo fieri debet. Status initialis duabus conditionibus continetur quarum altera pro ſingulis locis S datur aëris denſitas Q, altera vero motus ei in initio impreſſus, ponamus ergo tum particulae in S exiſtentis celeritatem in plagam SB fuiſſe $= \Upsilon$, ita vt Q et Υ ſint functiones ipſius S datae. Hinc in formulis generalibus inuentis ponendo tempus $t = 0$, primo fieri neceſſe eſt $s = S$ ſeu $z = 0$, vnde habetur

$$0 = \int dS\, l\frac{Q}{B} + \Gamma : S + \Delta : S$$

hocque modo ſimul illi conditioni ſatisfit, qua poſito $t = 0$ prodire debet $q = Q$. Nam generatim ſi z eiusmodi fuerit functio ipſorum S et t, vt poſito $t = 0$ fiat $z = 0$ tum etiam fieri $(\frac{dz}{dS}) = 0$, ideoque $(\frac{ds}{dS}) = 1$ neceſſe eſt. Deinde pro motu, qui aëri ab initio fuerit impreſſus, haec obtinebitur aequatio

$$\Upsilon = \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Gamma' : S - \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Delta' : S$$

ex quibus duabus ergo conditionibus indoles vtriusque functionis Γ et Δ determinatur. Quo facto deinceps ad quoduis tempus ſtatus motusque aëris in tubo definiri poterit.

Coroll.

Coroll 1.

7. Quoniam per hypotheſin quantitas z minima eſſe debet, vt ſtatus initialis ad hunc caſum ſit accommodatus denſitas aëris Q vbique quam minime a denſitate ad aequilibrium requiſita, quam poſui B diſcrepare debet; ſi enim denſitas nimium alteraretur, quantitas z inde tantum valorem accipere poſſet, qui hypotheſi aduerſaretur.

Coroll. 2.

8. Deinde ne functiones Γ et Δ ipſi z nimis magnum valorem inducant, eas per fractionem quandam minimam α multiplicari conuenit, vt ſtatuatur
$$z = s - S = \int dS\, l\tfrac{Q}{B} + \alpha\Gamma : (S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) + \alpha\Delta : (S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}})$$
hoc modo nil impedit quo minus ipſae functiones valores quantumuis magnos adipiſcantur:

Coroll. 3.

9. Hoc multiplicatore minimo introducto pro ſtatu initiali his duabus aequationibus ſatisfieri oportebit:
$$0 = \int dS\, l\tfrac{Q}{B} + \alpha\Gamma : S + \alpha\Delta : S \text{ et}$$
$$\Upsilon = \tfrac{\alpha\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Gamma' : S - \tfrac{\alpha\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Delta' : S$$
vnde patet etiam in ſtatu initiali non niſi celeritates minimas admitti poſſe.

Coroll. 4.

10. Quod ſi tum ad quoduis tempus t ſtatus aeris definiri debeat, primo pro denſitate $q = \frac{Q}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}$, habebitur:

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + l\frac{Q}{B} + \alpha\,\Gamma' : \left(S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right) + \alpha\,\Delta' : \left(S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right)$$

tum vero pro celeritate $\upsilon = \left(\frac{ds}{dt}\right)$ erit

$$\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Gamma' : \left(S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right) - \frac{\alpha\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Delta' : \left(S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right)$$

vnde et haec celeritas ſemper erit minima.

Scholion 1.

11. Si rem accuratius perpendamus pro motus determinatione non abſolute neceſſarium eſt, vt ipſa quantitas z poſito $s = S + z$ ſit minima, dummodo ea ita ſit comparata, vt formula inde orta $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ fiat valde parua, id quod euenit ſi ad valorem ipſius z ante datum inſuper adiiciamus terminum $\mathfrak{E}t$, exiſtente $\mathfrak{E}$ quantitate quantumuis magna. Quoniam enim hinc neque formulae $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ neque huius $\left(\frac{dds}{dt^2}\right)$ valor immutatur, aequationi propoſitae perinde ſatisfit. Inde autem tantum celeritates Υ et υ quantitate conſtante $\mathfrak{E}$ augebuntur, totumque negotium eo redibit, ac ſi totus tubus cum aëre incluſo motu vniformi deſerretur vel ſi toti maſſae aereae in tubo motus quidam vniformis ab initio eſſet impreſſus, qui deinceps perpetuo conſeruaretur. Cum autem phaenomena hinc oriunda

oriunda per ſe ſint perſpicua, operae non eſt pretium huiusmodi caſus ſeorſim pertractare.

Scholion 2.

12 Quod ſi ratio functionum Γ et Δ pro lubitu aſſumatur, inde ſtatus initialis facile definietur difficilius autem erit viciſſim ex ſtatu initiali dato indolem earum functionum elicere. Quoniam autem ſatisfieri oportet huic conditioni

$$o = \int dS\, l\tfrac{Q}{B} + \alpha\,\Gamma : S + \alpha\,\Delta : S$$

ſtatim atque altera functio Γ : S fuerit aſſumta hinc ſimul altera definitur, id quod ex illa ratione qua functiones per applicatas curuarum repraeſentari ſolent clariſſime hoc modo oſtenditur. Referat recta A B tubi longitudinem in qua capiatur abſciſſa A S = S, ſuper ea conſtruatur linea curua D Q E, cuius ſit applicata $SQ = \int dS\, l\tfrac{Q}{B}$, tum vero pro lubitu alia curua F Γ G, cuius applicata ſit $S\Gamma = \alpha\Gamma : S$. Iam infra axem A B conſtruatur noua curua H Δ I hac lege vt vbique ſit eius applicata $S\Delta = SQ + S\Gamma$, eritque $S\Delta = -\alpha\,\Delta : S$; ſicque hoc modo ex binis prioribus curuis haec tertia functionem Δ : S referens conſtruetur. Hinc autem porro celeritas aëris in ſtatu initiali pro quouis loco S facile innoteſcet ex hac aequatione: Tab. IV. Fig. 71.

$$\Upsilon \sqrt{\tfrac{b}{2ga}} = \alpha\,\Gamma' : S - \alpha\,\Delta' : S$$

quandoquidem eſt

$$\alpha\,\Gamma' : S = \tfrac{d.\,S\Gamma}{d.\,AS} \text{ et } \alpha\,\Delta' : S = \tfrac{-d.S\Delta}{d.\,AS}$$

ita vt ſit

$$\Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} = \frac{d.(S\Gamma + S\Delta)}{d.AS} = \frac{d.\Gamma\Delta}{d.AS},$$

ſicque tangentibus ducendis facile aſſignatur. Quando autem viciſſim celeritas Υ in ſingulis locis S pro ſtatu initiali datur, quomodo inde viciſſim ambas curuas $F\Gamma G$ et $H\Delta I$ definiri oporteat, in ſequente problemate inueſtigabimus.

Problema 69.

13. Datis in ſtatu initiali pro quouis tubi loco S tam aëris denſitate Q quam celeritate Υ in plagam SB directa, elapſo inde tempore t definire ſtatum et motum aëris in tubo, ſiquidem ſtatus initialis valde parum a ſtatu aequilibrii fuerit diuerſus.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 72. Totum negotium iam eo eſt perductum, vt indoles functionum Γ et Δ ex his duabus aequationibus determinetur:

$$0 = \int dS\, l\frac{Q}{B} + \alpha\Gamma : S + \alpha\Delta : S \text{ et}$$

$$\Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} = \alpha\Gamma' : S - \alpha\Delta' : S$$

Iam prior differentiata praebet

$$-l\frac{Q}{B} = \alpha\Gamma' : S + \alpha\Delta' : S$$

ex qua cum altera combinata deducimus:

$$\alpha\Gamma' : S = \tfrac{1}{2}\Upsilon\sqrt{\frac{b}{2ga}} - \tfrac{1}{2}l\frac{Q}{B} \text{ et}$$

$$\alpha\Delta' : S = -\tfrac{1}{2}\Upsilon\sqrt{\frac{b}{2ga}} - \tfrac{1}{2}l\frac{Q}{B}.$$

quos

quos valores ſequenti modo conſtruere licebit. Ex data in puncto S denſitate Q valde parum a denſitate B quae in aequilibrio ſubſiſtit, diſcrepante, colligatur $l\frac{Q}{B}$ pro quo ſumſiſſe ſufficiet $\frac{Q-B}{B}$ hincque deſcribatur ſuper axe A B linea curua C Q D, et cuique abſciſſae A S = S conueniat applicata $SQ = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$. Deinde cum etiam detur celeritas in S, qua vno minuto ſecundo conficiatur ſpatium $= \Upsilon$, conſtituatur in S applicata $S\Upsilon = \Upsilon\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ſicque deſcribatur curua E Υ F. His iam duabus lineis conſtructis C Q D et E Υ F ſuper eodem axe A B duae nouae lineae formentur primo ſcilicet linea G Γ H ſupra axem A B ſumendo applicatas $S\Gamma = \frac{1}{2}S\Upsilon - \frac{1}{2}SQ$, tum vero linea I Δ K infra axem ſumendo applicatas $S\Delta = \frac{1}{2}S\Upsilon + \frac{1}{2}SQ$; quo facto erit $\alpha\Gamma':S = S\Gamma$ et $\alpha\Delta':S = -S\Delta$, hinque integralia per areas exhibendo: Tab IV. Fig. 71.

$$\alpha\Gamma:S = AGS\Gamma \text{ et } \alpha\Delta:S = -AIS\Delta$$

Per binas autem ſolas ſuperiores curuas (fig. 72) habebimus:

$$\alpha\Gamma':S = \tfrac{1}{2}(S\Upsilon - SQ);\ \alpha\Delta':S = -\tfrac{1}{2}(S\Upsilon + SQ)$$

$$\alpha\Gamma:S = \tfrac{1}{2}(AES\Upsilon - ACSQ);\ \alpha\Delta:S = -\tfrac{1}{2}(AES\Upsilon + ACSQ)$$

Iam elapſo tempore quocunque t minutorum ſecundorum in axe A B vtrinque a puncto S capiatur ſpatium $ST = St = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, vt ſit $AT = S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ et $At = S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ hincque euidens eſt fore Tab. IV. Fig. 72.

$$\alpha\,\Gamma' : (S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) = \tfrac{1}{2}(TN - TM)$$

$$\alpha\,\Delta' : (S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) = -\tfrac{1}{2}(tn + tm)$$

$$\alpha\,\Gamma : (S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) = \tfrac{1}{2}(AETN - ACTM)$$

$$\alpha\,\Delta : (S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) = -\tfrac{1}{2}(AEtn + ACtm)$$

His inuentis poſt hoc tempus $= t$ particula aëris, quae initio erat in S nunc erit translata in tubi locum s vt ſit

$$Ss = ACSQ + \tfrac{1}{2}AETN - \tfrac{1}{2}ACTM - \tfrac{1}{2}AEtn - \tfrac{1}{2}ACtm$$

quae ſpatia rediguntur ad hanc formam:

$$Ss = \tfrac{1}{2}TNtn - \tfrac{1}{2}SQTM + \tfrac{1}{2}SQtm$$

Deinde aëris particulae, quae nunc in s verſatur denſitas inuenta $q = \frac{Q}{(\frac{ds}{dS})}$, formulis autem ſupra erutis ad figuram relatis fit

$$(\tfrac{ds}{dS}) = 1 + SQ + \tfrac{1}{2}TN - \tfrac{1}{2}TM - \tfrac{1}{2}tn - \tfrac{1}{2}tm$$

cuius expreſſionis membra poſteriora cum prae vnitate ſint minima erit proxime

$$q = Q(1 - SQ - \tfrac{1}{2}TN + \tfrac{1}{2}TM + \tfrac{1}{2}tn + \tfrac{1}{2}tm).$$

Denique pro motu quo haec particula iam agitabitur, eius celeritas ſecundum directionem sB erit

$$v = \tfrac{1}{2}(TN - TM + tn + tm)\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}.$$

Coroll 1.

14. Data ergo agitatione, qua aër in tubo contentus ab initio de ſtatu aequilibrii fuerit perturbatus,

batus, et quae per binas lineas C Q D et E Υ F repraeſentatur, deinceps ad quoduis tempus translatio, denſitas et motus cuiusque aëris particulae in tubo aſſignari poterit

Coroll. 2.

15. Si initio aëris aequilibrium prorſus non fuerit turbatum, vt vbique fuerit $Q = B$ et motus nullus ſeu $\Upsilon = 0$, tum binae lineae CQD et EΥF fient rectae et in ipſum axem A B incident. Cum igitur tam omnes areae quam applicatae euaneſcant nulla mutatio neque in loco neque denſitate ſingularum particularum orietur, ideoque aequilibrium perſeuerabit.

Coroll 3.

16. Si initio denſitati naturali tantum mutatio quaedam ſine vllo motu fuerit inducta, linea E Υ F in rectam A B incidet, indeque fiet:

$Ss = -\frac{1}{2}SQTM + \frac{1}{2}SQtm$; tum vero

$q = Q(1 - SQ + \frac{1}{2}TM + \frac{1}{2}tm)$ et $\vartheta = \frac{1}{2}(tm - TM)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$.

Coroll. 4.

17. Si initio aëri in tubo motus quicunque fuerit impreſſus neque ſimul denſitas primo ſaltem inſtanti vllam mutationem fuerit paſſa, linea CQD cum axe congruet, et pro agitatione ſequente ad quoduis tempus t habebitur:

$Ss = \frac{1}{2}TNtn$; $q = Q(1 - \frac{1}{2}TN + \frac{1}{2}tn)$ et $\vartheta = \frac{1}{2}(TN + tn)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$.

Scho-

Scholion. 1.

18. Obſeruari hic oportet binarum noſtrarum curuarum C Q D et E Y F applicatas non quantitatibus linearibus ſed numeris abſolutis exponi, ex quo earum conſtructio poſtulat, vt linea quaedam recta ad libitum aſſumta pro vnitate accipiatur; ex qua deinceps quantitas ſingularum applicatarum debite determinetur; eam ergo rectam tantam ſtatui conueniet, vt mutationes etiam minimae aëri inductae ſatis ſenſibiliter in figura referantur. Hinc meminiſſe iuuabit, quaenam litterae in calculum introductae numeros abſolutos, et quaenam quantitates lineares ſignificent. Primum autem tempus t vtpote in minutis ſecundis exprimendum numerum denotat abſolutum tum vero etiam litterae b, B, Q et q, quibus denſitates indicamus, quoniam referuntur ad certam quandam denſitatem vnitate ſignatam, qua in preſſionibus definiendis vtor, ſunt numeri abſoluti. Reliquae litterae in calculum ingredientes ſunt quantitates lineares; primo namque littera g denotat altitudinem qua grauia vno minuto ſecundo delabuntur, quae aeſtimatur 15,625 ped. Rhen. litterae vero Y et v pro celeritatibus vſurpatae ſpatia denotant linearia, quae his celeritatibus vno minuto ſecundo percurrerentur: litterae denique pro preſſionibus introductae a et p altitudines ſicque etiam quantitates lineares ſignificant. Iis enim denotatur altitudo columnae materia vniformi, cuius denſitas ponitur $= 1$, conſtantis, cuius pondus aequale eſt pres-

preſſioni parem baſin vrgenti. Cum igitur noſtrarum curuarum, quarum alteram CQD ſcalam denſitatum, alteram EΥF ſcalam celeritatum appellare licet, applicatae ſint numeri abſoluti, abſciſſae vero quantitates lineares, areae iis comprehenſae quoque erunt quantitates lineares. His animaduerſis perſpicuum eſt formulam ex tempore formatam $t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ eſſe quantitatem linearem, vt abſciſſae $AS = S$ addi ab eaque ſubtrahi poſſit; tum vero expreſſionem pro translatione Ss inuentam eſſe quantitatem linearem perinde atque eam, quae pro celeritate v eſt exhibita; rationem denique denſitatum q et Q numero abſoluto exprimi vti rei natura poſtulat. Poſtremo probe teneatur vtramque ſcalam ita conſtrui debere vt ſi initio ad s fuerit denſitas $= Q$ et celeritas $= \Upsilon$ pro ſcala denſitatum capi debeat applicata

$$SQ = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$$

pro ſcala celeritatum vero applicata

$$S\Upsilon = \Upsilon\sqrt{\frac{b}{2ga}}.$$

Scholion 2.

19. Commodiſſime hic vſu veniſſe mirandum eſt, quod ex datis binis ſcalis denſitatum et celeritatum ad ſtatum initialem relatis tam expedite ad quoduis tempus elapſum aëris agitatio inde orta aſſignari poſſit, cum tamen quaeſtio haec primo intuitu vires analyſeos ſuperare ſit viſa, atque etiam

certo ſuperaret, niſi agitationes quam minimae eſſent aſſumtae; praeterea vero etiam hypotheſis, qua tubo vbique eandem amplitudinem tribuimus, plurimum ad hanc commodam ſolutionem contuliſſe eſt cenſenda, quandoquidem pro tubis inaequaliter amplis grauiſſima adhuc obſtacula occurrunt. Quanquam autem haec ſolutio ad motus ſpeciem maxime ſpecialem reſtringitur, in inueſtigationibus tamen phyſicis ampliſſimum praeſtat vſum, indeque iam feliciſſimo ſucceſſu duo phaenomena, quae adhuc maxime fuerunt abſcondita fruſtraque a naturae ſcrutatoribus tractata, ſi ſolum Geometram acutiſſimum Taurinenſem *Ludouicum la Grange* excipiamus, explicari poſſunt. Alterum phaenomenon conſiſtit in propagatione ſoni, vbi explicari oportet quomodo, dum aëri vno in loco quaedam agitatio minima inducitur, inde ſimiles agitationes ſucceſſiue ad maximas diſtantias proferantur. Alterum vero phaenomenon, in quo multo adhuc minus ab auctoribus eſt praeſtitum verſatur in explicatione ſoni, quem tibiae edunt inflatae, cuius quidem olim pulcra a me ſimilitudo cum cordis vibrantibus eſt obſeruata; nullo autem modo ipſam aëris agitationem, qua hi ſoni producuntur, definire licuit. Vtrumque igitur phaenomenon, quatenus in tubis aequaliter amplis producitur, deinceps omni cura ſum perſecuturus.

Scholion 3.

20. Antequam autem hoc opus aggrediar circa ambas ſcalas denſitatum et celeritatum, earumque

que continuationem, quaedam circumſtantiae maximi momenti ſunt euoluendae. Primo quidem obſeruo ſi tubus vtrinque in infinitum extendatur, ſolutionis noſtrae applicationem nulli difficultati eſſe ſubiectam; quia enim tum pro ſtatu initiali ambae ſcalae per ſe vtrinque in infinitum continuantur; elapſo quantumuis magno tempore t, ſi a quouis axis puncto S vtrinque abſcindantur interualla S T $= S t = t \surd \frac{2ga}{b}$, his punctis T et t in vtraque ſcala determinatae ſemper reſpondebunt applicatae, ex quibus ſtatus aëris vbique in tubo ad hoc tempus definiri poterit. Sin autem tubus vel vtrinque vel ex altera ſaltem parte fuerit terminatus, ibique ſiue clauſus ſiue apertus, ibidem quoque ambae ſcalae ad ſtatum aëris initialem extractae terminentur neceſſe eſt; hinc neceſſario eueniet vt tempore labente interualla S T et S t vel alterum ſaltem vltra ſcalarum terminum cadat, ita vt tum ipſae ſcalae nullas plane ſuppeditent applicatas, ex quibus aëris ſtatus ad haec tempora definiri queat. Cum igitur ſolutionis datae natura ſemper poſtulet, vt ſcalae vtrinque in infinitum ſint continuatae, etiamſi tubus finitam habeat longitudinem maximum ſolutionis momentum in eo verſatur, vt definiamus, qua lege his caſibus vtramque ſcalam continuari oporteat, vt inde vera ſolutio eliciatur. Atque idem quoque praeſtari debebit, quando tubus habet figuram in ſe redeuntem; quanquam enim hic tubi directricem vt lineam rectam repraeſento, tamen jam

ſatis eſt oſtenſum curuaturam ideo non excludi, quoniam hinc motus non alteratur.

Problema 70.

21. Si tubus aequaliter amplus in puncto B terminetur, ibique ſit apertus, vtramque ſcalam tum denſitatum quam celeritatum quae ex ſtatu initiali ſuper eo fuerit extructa, vltra punctum B ſuper axe A B producto continuare.

Solutio.

Quia tubus in B eſt apertus ideoque aër in tubo contentus cum aëre externo communicatur, in ipſa tubi extremitate B preſſio aëris interni a preſſione externi diuerſa eſſe nequit, quamobrem etiam denſitas aëris interni in hoc loco conuenire debet cum denſitate externi, quae ſi vocetur $=$ B, erit non ſolum initio ſed etiam perpetuo pro hac tubi extremitate B tam denſitas initialis $Q = B$ quam
Tab. V. elapſo tempore quocunque $q = B$. Pro ſcala ergo
Fig. 74. denſitatum C Q D ex ſtatu initiali formata in extremitate B, ob $Q = B$ fit applicata $BD = 0$. Sit igitur A B tubus propoſitus in B terminatus et apertus vltra A autem vtcunque extenſus, atque ex ſtatu initiali formata ſit ſcala denſitatum C m B in B cum axe A B concurrens; ſcala autem celeritatum ſit E n F. Quia iam elapſo tempore quocunque $= t$ denſitas aëris ad B perpetuo debet eſſe eadem $=$ B, primum obſeruo hanc conditionem perinde locum habere

habere debere, quaecunque fuerit ſcala celeritatum; hoc eſt ſiue aëri in tubo impreſſus fuerit initio quispiam motus, ſiue tota agitatio tantum in perturbatione celeritatis ſubſtiterit. Quanquam autem haec proprietas illi aëris elemento, quod quouis tempore in orificio B B verſatur, conuenit, tamen quia translatio ſingulorum elementorum eſt quam minima, etiam illi elemento, quod initio orificium B B occupauerat, conſtanter tribui poteſt. Effluxerit ergo tempus quodcunque $= t$ at a puncto B ſumto vtrinque interuallo $B t = B T = t \sqrt{\frac{2ag}{b}}$, continuatio ſcalarum ita eſſe debet comparata, vt fiat $q = Q = B$, quare ob $S Q = 0$ hoc caſu fieri oportet

$$-\tfrac{1}{2} T N + \tfrac{1}{2} T M + \tfrac{1}{2} t n + \tfrac{1}{2} t m = 0$$

ſeu $T M + t m - T N + t n = 0$,

quod cum euenire neceſſe ſit quaecunque fuerit ſcala celeritatum ſeorſim debet eſſe

$$\text{et } T M + t m = 0 \text{ et } T N - t n = 0.$$

Ex priori conditione patet ſcalam denſitatum $C m B$ ita vltra B continuari debere vt curua $B M c$ ſimilis fiat et aequalis curuae $B m C$, ſed ad partem axis contrariam diſponatur. Deinde pro ſcala celeritatum continuatio $F N e$ pariter ſimilis et aequalis ſtatuatur curuae $F n E$ ſimulque ad eandem axis partem poſita, hacque lege vtramque ſcalam denſitatum et celeritatum vltra terminum B continuari conuenit.

Coroll. 1.

22. Si tubus ex parte A in infinitum extendatur, hac conſtructione vtraque ſcala B in infinitum continuabitur. At ſi tubus in A quoque ſit terminatus, tum hoc modo ſcalas non vltra terminum *a* exiſtente $Ba = AB$ continuari licebit. Quia vero ſimilis continuatio vltra A inſtitui debet hac ratione vtrinque in infinitum progredi poterimus.

Coroll. 2.

23. In hac ergo ſcalarum continuatione neutiquam earum indoles interna ſpectatur, neque ſi eae fuerint curuae algebraicae vel aequatione quadam comprehenſae continuatio ex hac aequatione eſt petenda, ſed ſola figura externa eiusue ductus continuationem, qua hic opus eſt ſuppeditat. Atque regula hic data perinde eſt obſeruanda, ſiue ſcalae illae ſint in ſe lineae continuae, ſiue irregulares cuiusmodi libero manus ductu deſcribuntur.

Scholion.

24. Haec circumſtantia eo maiore eſt attentione digna, quod vulgo in analyſi nullae aliae lineae curuae, niſi quae certa quadam aequatione earum naturam exprimente contineantur, admitti, lineaeque diſcontinuae nulla huiusmodi lege comprehenſae inde penitus excludi ſolent. Analyſis enim tam finitorum, quam ea pars infinitorum quae adhuc potiſſimum eſt exculta, vtique ad nullas alias lineas

lineas curuas, niſi quae certa continuitatis lege ſint complexae, applicari poteſt, quandoquidem his caſibus aequatio earum naturam exprimens ſemper in calculum introduci debet; neque ante lineis discontinuis, nulla certa lege ductis locus in Analyſi concedi potuit, quam ſublimior Analyſeos infinitorum pars, quae circa functiones duarum pluriumue variabilium verſatur excoli eſt coepta, cuius equidem naturam primus ita comparatam eſſe obſeruaui, vt huiusmodi lineae discontinuae ad eam aeque referri debeant, atque lineae curuae regulares certa quadam aequatione expreſſae, neque adeo his poſterioribus vlla praerogatiua ſit tribuenda; cum hic earum quaſi interna natura neutiquam ſpectetur. Quare ſi forte linea C *m* B fuerit arcus circuli in noſtro inſtituto ad circuli naturam plane non reſpicitur, ſed in continuatione illi alius arcus aequalis B M *c* inuerſo ſitu adiungitur, prorſus vti fieri deberet, ſi linea C *m* B nulla certa ratione eſſet ducta, quod etiam de altera ſcala E *n* F eſt tenendum, cuius continuatio F N *e* illi ſemper ſimilis et aequalis ſtatui debet, etiamſi forte illius natura longe aliam continuationem inuoluat. Quoniam haec linearum curuarum conſideratio prorſus eſt noua, iisque qui huic calculi generi nondum ſunt aſſueti, a receptis Analyſeos principiis maxime abhorrere videri ſolet, hanc circumſtantiam ſaepius inculcaſſe minime ſuperfluum eſt iudicandum.

Pro-

Problema 71.

Tab. V. Fig. 75. 25. Si tubus aequaliter amplus in B termine- tur, ibique ſit clauſus, vtramque ſcalam tam denſitatum quam celeritatum ad ſtatum initialem conſtructum, vltra terminum B ſuper axe A B producto continuare.

Solutio.

Quia tubus A B in B eſt clauſus in hac ipſa extremitate aëri in tubo contento nullus plane motus ineſſe poteſt, aërisque vltimum ſtratum operculo B B adiacens perpetuo in quiete perſeuerare debet, ex quo non ſolum in initio ſed etiam omni tempore celeritas aëris in puncto B nihilo debet eſſe aequalis. Hinc ſcalae celeritatum E Υ F (fig. 72.) extremum punctum F in axis punctum B incidat, neceſſe eſt; habeatque propterea haec ſcala figuram E n B ſcala vero denſitatum ſit C m D. Cum nunc elapſo tempore quocunque t formula pro celeritate ſupra inuenta, ſi ad punctum B applicetur, ſemper euaneſcere debeat; idque pro omni ſcala denſitatum, continuationem vtriusque ſcalae ad hoc requiſitum accommodari oportet. Super axe ergo vtrinque a termino B capiantur interualla aequalia B t $=$ B T $= t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, et quia celeritas in puncto B ſupra ita exprimi eſt inuenta, vt eſſet:

$$v = \tfrac{1}{2}(\mathrm{TN} + tn - \mathrm{TM} + tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$$

hinc

hinc duplicem aequationem elicimus, alteram pro ſcala celeritatum $TN + tn = 0$ alteram pro ſcala denſitatum $TM = tm$; vnde diſcimus ſcalam celeritatum EnB ita continuari debere vt ſit $TN = -tn$, ideoque partem continuatam BNe ſimilem fore et aequalem ſcalae BnE, ad contrariam autem axis partem diſpoſitam. Cum autem pro ſcala denſitatum ſit $TM = tm$, eius continuatio DMc omnino ſimilis et aequalis erit lineae DmC, ad easdem axis partes diſpoſita. Vtraque ſcilicet ſimilitudo refertur ad punctum B ita vt inde ſumtis vtrinque abſciſſis aequalibus $BT = Bt$, in vtraque ſcala etiam applicatae fiant aequales $TN = tn$ et $TM = tm$, illa quidem ad contrariam haec vero eandem axis partem ſita.

Coroll. 1.

26. Prout ergo tubus in B fuerit vel apertus vel clauſus vtriusque ſcalae continuatio diuerſo quidem ratione axis ſed pari modo reſpectu ipſarum applicatarum inſtitui debet. Illo ſcilicet caſu ſcalae denſitatum, hoc vero ſcalae celeritatum continuatio ad contrariam axis partem eſt diſponenda.

Coroll. 2.

27. Quoniam caſu quo tubus in BB eſt clauſus, aeris ad B ſiti celeritas ſemper eſt nulla, hinc ſponte ſequitur eum nunquam de loco ſuo recedere: vnde translationis ſpatium Ss ſupra in genere defini-

 tum

tum hic quoque euaneſcere debet. Puncto autem S in B tranſlato fit vtique.

$$Ss = \tfrac{1}{2}TNtn - \tfrac{1}{2}BDTM + \tfrac{1}{2}BDtm + = \tfrac{1}{2}TNtn = 0$$

quia eſt $TNtn = Btn - BTN = 0$, area enim BTN in contrariam axis partem cadens negatiue capi debet.

Problema 72.

28. Si tubus aequaliter amplus fuerit in ſe rediens, quamcunque habuerit figuram, vtramque ſcalam denſitatum et celeritatum ad ſtatum initialem extructam vtrinque in infinitum continuare.

Solutio.

Tab. V. Fig. 76. Longitudo tubi in directum extenſa in tabula repraeſentetur linea recta ASA', ita vt punctum A' tota perimetro percurſa in punctum A recidere ſit concipiendum. Exſtructa ergo ſuper hac linea ASA' tam ſcala denſitatum CQC' quam ſcala celeritatum $E\Upsilon E'$ ita vt ſi in S initio fuerit denſitas $= Q$ et celeritas ſecundum directionem $SA' = \Upsilon$ ſint applicatae $SQ = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$ et $S\Upsilon = \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, euidens eſt in puncto A' eſſe debere $A'C' = AC$ et $A'E' = AE$ quandoquidem punctum A' cum puncto A conuenit. Simili modo tubum pluries percurrendo pro ſingulis reuolutionibus repetitis in axe capiantur interualla $A'A''$, $A''A'''$, $A'''A''''$ etc. tubi longitudini AA' aequalia, et quia ſingula puncta A, A', A'', A''', A'''' etc. reuera idem tubi punctum

A re-

A repraeſentant, continuatio ambarum ſcalarum ita debet eſſe comparata, vt applicatae in omnibus his punctis ſint eaedem. Idem quoque tenendum eſt de omnibus punctis S, S', S'', S''' etc. ſumtis interuallis $AS = A'S' = A''S'' = A'''S'''$ etc. quae omnia cum vnicum tubi punctum exhibere ſint cenſenda, in omnibus quoque ambae applicatae congruere debent. Quare quaecunque fuerint ambae curuae CQC' et EYE' eaedem continuo ſuper axe prolongato repetitae repraeſententur, quod pariter ſuper altera axis prolongatione in infinitum fieri eſt concipiendum. Cum autem hoc modo ambae ſcalae vtrinque in infinitum fuerint continuatae, manifeſtum eſt ſi pro quouis tempore elapſo aëris elementi, quod initio fuerat in S ſecundum praecepta ſupra data tam translatio Ss quam eius denſitas et celeritas Y definiatur eosdem prodituros eſſe valores, ac ſi eadem inueſtigatio pro punctis S', S'', S''' etc. inſtitueretur.

Coroll. 1.

29. Neque ergo hoc caſu ad naturalem vtriusque ſcalae CQC' et EYE' continuationem, quam ex ſua propria indole eſſent habiturae, eſt reſpiciendum, ſed vtraque continuo eadem ſuper axe AA' vtrinque producto conſtrui debet.

Coroll. 2.

30. Haec autem vtriusque ſcalae continuatio vtrinque in infinitum facta tam hoc caſu quam prae-

cedentibus ideo eſt neceſſaria vt elapſo tempore quantumuis magno t a quouis puncto S vtrinque tanta ſpatia $t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ abſcindi queant, in iisque punctis applicatae reſpondentes reperiantur.

CAPVT II.

DE PROPAGATIONE PVLSVVM AERIS IN TVBIS AEQVALITER AMPLIS AD SONI GENERATIONEM ET PROPAGATIONEM ILLVSTRANDAM.

Problema 73.

31. In tubo vtrinque in infinitum extenſo ſi alicubi in ſpatio minimo excitetur pulſus, quo aër vtcunque de ſtatu aequilibrii deturbetur, huius agitationis propagationem ad quoduis tempus definire.

Solutio.

Tab. V. Fig. 77. Sit A B tubi directrix in directum extenſa et in ſpatiolo $GH = b$ aëri in tubo contento eiusmodi agitatio inducta ſit, vt linea $GM'mH$ exhibeat ſcalam denſitatum, linea vero $GN'nH$ ſcalam celeritatum, cuius applicatae tn, quatenus in figura ſupra axem A B cadunt motum verſus B indicent illius

lius vero curuae applicatae $t\,m$ ſupra axem cadentes maiorem ſolito denſitatem, contrariae vero $T'M'$ minorem ſolito denſitatem oſtendant, quam ſcilicet ſtatus aequilibrii poſtulat vtrinque autem vltra hoc interuallum GH aër etiam nunc in quiete verſetur; ita vt ibi ambae ſcalae in ipſum axem incidant, earumque applicatae euaneſcant, quam ob cauſam etiam vtramque ſcalam in terminis G et H cum axe conuenientes feci. Hoc ſtatu initiali conſtituto conſideremus locum tubi quemcunque S verſus B ſitum, et quia ad aeris hoc loco contenti agitationem inueniendam pro tempore quouis t ab initio elapſi vtrinque a puncto S in axe abſcindi oportet interualla $= t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$; ante omnia obſeruo quamdiu fuerit $t\sqrt{\frac{2ga}{b}} < HS$ nullam agitationem ad punctum S peruenire, ibique adeo aequilibrium eſſe futurum donec tempus ab initio elapſum euadat $= HS\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, ac tum demum aërem in S agitationem eſſe ſenſurum. Elapſum ergo iam ſit maius tempus t capiaturque interuallum $St = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, ad alteram enim partem non opus eſt aequale ſpatium ST abſcindi, quia ibi ſcalae in axem incidunt. Nunc igitur aeris elementum ex S translatum erit in s, vt ſit ſpatiolum $Ss = \frac{1}{2}Htn + \frac{1}{2}Htm$, tum vero denſitas huius elementi erit $q = B(1 + \frac{1}{2}tm + \frac{1}{2}tn)$ et celeritas verſus B tendens $v = \frac{1}{2}(tm + tn)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, poſtquam autem elapſum fuerit tempus $t = SG\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, ob $tm = 0$, et $tn = 0$ eius motus iterum extin-

guitur denſitasque naturalis B reſtituitur, in quo ſtatu deinceps perpetuo perſeuerabit.

Simili modo in altera tubi parte res ſe habebit, punctumque S′ quieſcet donec elapſum fuerit tempus $t = S' G \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, deinceps autem elapſo tempore $t = S' T' \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, translatio fiet per ſpatiolum $S' s' = \frac{1}{2} G T' N' + \frac{1}{2} G T' M'$ quia in figura applicata $T' M'$ infra axem cadit; tum autem denſitas erit $q = B(1 - \frac{1}{2} T' N' - \frac{1}{2} T' M')$ et celeritas verſus B directa $\vartheta = \frac{1}{2}(T' N' + T' M') \sqrt{\frac{2ga}{b}}$. Statim autem ac tempus $t = S' H \sqrt{\frac{b}{2ga}}$ effluxerit aer in S' in aequilibrium reſtituetur, omniaque aeris elementa non diutius agitationi erunt ſubiecta quam durante tempore $= G H \sqrt{\frac{b}{2ga}} = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2ga}}$ min. ſec. Manifeſtum ergo eſt, quomodo pulſus initio in interuallo G H excitatus labente tempore vtrinque in tubo propagetur.

Coroll. I.

32. Poſita ergo diſtantia $HS = s$, pulſus initio in ſpatio G H excitatus ad S vsque propagatur tempore $= \frac{s\sqrt{b}}{\sqrt{2ga}}$ min. ſec. vnde patet propagationem eſſe vniformem et tempore vnius minuti ſecundi fieri per ſpatium $= \sqrt{\frac{2ga}{b}}$: quod ſi denſitas mercurii ſumatur pro vnitate, vt ſit a altitudo barometri quaſi $2\frac{1}{2}$ ped. lond. erit denſitas aeris $b = \frac{1}{14.750} = \frac{1}{10500}$, ob $g = 16$ ped. lond. fiet circiter 916 ped.

Coroll.

Coroll. 2.

33. Ex ſolutione etiam intelligitur, cuiusmodi agitatione particula aeris S concitetur, primo nempe propellitur per ſpatiolum $Ss = \frac{1}{2} H\, tn + \frac{1}{2} H\, tm$ deinde denſitatem obtinebit $q = B(1 + \frac{1}{2} tm + \frac{1}{2} tn)$ ac tertio celeritatem verſus B acquiret $\vartheta = \frac{1}{2}(tn + tm) \sqrt{\frac{2ga}{b}}$, vnde patet celeritatem hanc exceſſui denſitatis ſupra denſitatem naturalem eſſe proportionalem; quandoquidem eſt $\frac{q - B}{B} = \vartheta \sqrt{\frac{b}{2ga}}$.

Coroll. 3.

34. Imprimis autem hic notari meretur pulſus in ſpatio GH excitati propagationem in plagam A non neceſſario aeque eſſe fortem atque in plagam B. Si enim in pulſu initiali ſcala denſitatum congrueret cum ſcala celeritatum vt eſſet $T'M' = -T'N'$ et $tm = tn$, tum propagatio verſus A prorſus euaneſceret, altera vero verſus A maxime vigeret.

Scholion 1.

35. Hac pulſuum promotione ſoni propagatio pulcerrime illuſtratur; quocunque enim modo ſonus producatur, ſemper copia quaedam aëris in ſpatio GH contenta de ſtatu aequilibrii deturbatur, ſiue in ſola denſitate ſiue ſola celeritate ſiue vtraque coniunctim ipſi mutatio inducatur. Quocunque autem modo hoc eueniat propagatio huius pulſus vtrinque in tubo pari abſoluitur celeritate, etiamſi forte in alteram tubi plagam multo ſit vehementior quam

quam in alteram. Id autem tantum hic obiici, poteſt, quod experientia ſpatium per quod ſonus interuallo vnius minuti ſecundi propagatur multo maius, ſcilicet 1040 ped. lond. exhibeat; quam noſtra Theoria oſtendit. Cuius phaenomeni cauſa vel in eo eſt poſita quod hic in calculo pulſus tantum minimos admittimus, ii autem ſoni, quorum propagatio per experimenta eſt definita, tam fuerint vehementes, vt calculus noſter ad eos non debeat accommodari; ideoque adhuc in dubio relinquatur annon ſoni maxime debiles ea ipſa celeritate quam inuenimus, reuera progrediantur. Vel ſi etiam hic experientia refragetur, ſuſpicari liceret, accelerationem hanc ingenti particularum ſolidarum in aëre volitantium copiae tribui debere, dum enim agitatio ad vnum terminum huiusmodi particulae pertingit, eodem inſtanti etiam terminus oppoſitus impellitur neque tempore opus foret ad ſonum per ſubſtantiam harum particularum propulſandum. Huic certe circumſtantiae, quod hic ſonum in tubo includimus hic diſſenſus ab experientia tribui nequit, quoniam infra videbimus etiam in aëre vndique aperto eandem celeritatem pro ſoni propagatione inveniri. Interim tamen hic diſſenſus non obſtat, quo minus hinc tam productio quam propagatio ſoni recte explicari ſit cenſenda. Fortaſſe etiam rationem huius diſſenſus in eo quaeri licebit quod aërem tantum 750 vicibus rariorem ſtatuimus aqua; ſi enim ei raritatem 966 vicibus maiorem tribuamus, calculus cum experientia pulcre conſentiet.

Scho-

Scholion 2.

36. Quoniam elapſo tempore $t = S t V \frac{b}{2ga}$ agitatio puncti S ita per ambas applicatas $t\,m$ et $t\,n$ ſcalarum definitur, vt ſit ibi denſitas $q = B(1 + \frac{1}{2}t\,m + \frac{1}{2}t\,n)$ et celeritas $\mathfrak{v} = \frac{1}{2}(t\,m + t\,n)V\frac{2ga}{b}$ euidens eſt totum pulſum initialem G H hoc tempore transferri in ſpatium Y X = G H vt ſit $H X = t V \frac{2ga}{b}$, reliquo aëre in aequilibrio exiſtente praeterquam in ſimili ſpatio ad alteram partem in tubo ſumto. In hoc autem ſpatio Y X agitatio per vnicam ſcalam Y Z X ita formatam vt applicata S Z ſit ſemiſummae illarum $t\,m + t\,n$ aequalis, repraeſentabitur quippe quae eadem ſimili modo quo in pulſu initiali et denſitatem et celeritatem in S exhibebit, cum iam pro puncto S ſit $q = B(1 + SZ)$ ſeu $l\frac{q}{B} = SZ$, et $\mathfrak{v} = SZ\,V\frac{2ga}{b}$, hincque translatio elementi S ita determinetur vt ſit $S\,s$ = areae XSZ. Haec ergo noua ſcala ſimplex Y Z X ex binis initialibus formata indolem pulſuum verſus B propagatorum declarat vnde etiam diuerſae ſonorum qualitates explicari debebunt. Primum autem hic diſtinguitur latitudo pulſuum Y X = H G quae prout fuerit maior minorue, ſonus inde certam indolem habebit: Deinde ex ipſa curuae Y Z X figura prout vel maiorem minoremue habuerit amplitudinem S Z, vel tota ad eandem axis partem vel partim ſupra axem partim infra eum fuerit ſita, vel alia quacunque ratione fuerit affecta, ſonus quoque diuerſo modo ſenſum auditus afficiet. Ab amplitudine

quidem S Z fortitudo ſeu vehementia ſoni pendere videtur quales autem qualitates reliquis proprietatibus figurae Y Z X reſpondeant haud ſatis liquet; id ſaltem perſpicuum eſt infinitam fere ſonorum varietatem hinc explicari debere; cuiusmodi ſunt ſoni diuerſas litteras vocales *a*, *e*, *i*, *o*, *u* exprimentes, aliaeque innumerae differentiae. Deinde etiam ratio ſingularis phaenomeni adhuc non explicati hinc intelligitur, quomodo fiat, vt ſi agitatio Y Z X tanquam initialis conſideretur, ea tantum in vnam plagam B vlterius propagetur, neque vllos nouos pulſus retro verſus A excitet. Videmus enim ſi ipſe pulſus initialis G H iam ita eſſet comparatus, vt binae ſcalae inter ſe conuenirent, quemadmodum fit in pulſibus propagatis, tum etiam nullam propagationem in plagam A eſſe ſecuturam. Imprimis etiam hic notandum eſt, eosdem pulſus propagatos ex infinitis pulſibus initialibus oriri poſſe, quoniam infinitis modis ex binis ſcalis diuerſis pulſus initialis G H, eadem ſcala pro pulſibus propagatis Y X produci poteſt, vnde non mirum ſi ſaepe diuerſae cauſae ſimiles ſonos efficiunt.

Scholion 3.

Tab. V. Fig. 78. 37. Hactenus vnicum tantum pulſum ſum contemplatus neque propterea ad eas ſonorum affectiones reſpexi, quae ex ſucceſſione et ordine plurium pulſuum naſcuntur, quales ſunt grauitas et acumen; ex quo fonte ſoni etiam infinitam varietatem adipiſcuntur. Quoniam vero hic non vniuer-

ſam

ſam ſonorum doctrinam tradere eſt propoſitum, tantum obſeruo ſi initio non vnus ſed plures pulſus α, β, γ in aëre ſint excitati quemlibet eorum perinde propagari ac ſi reliqui plane abeſſent, neque propterea plures ſonos ſimul excitatos inter ſe confundi. Quod phaenomenon cum alias ſolutu perquam difficile ſit viſum, ex principiis ſtabilitis ſponte ſequitur. Cum enim ſuper directrice A B ambae ſcalae vbique praeterquam in locis α, β, γ cum ipſo axe congruant, ſi locum quemcunque S conſideremus, ad eum elapſo tempore $t = S\gamma V \frac{b}{2ga}$ ſolus pulſus γ cum ſuis affectionibus propagatur, neque reliqui pulſus α et β quicquam turbant; elapſo autem tempore $t = S\beta V \frac{b}{2ga}$, quo ille pulſus iam vltra eſt promotus, ad locum S pulſus β cum ſuis affectionibus perfertur, ac deinceps poſt tempus $t = S\alpha V \frac{b}{2ga}$ pulſus α. Ex quo clariſſime intelligitur, quemadmodum plures ſoni vel ſimul vel ſucceſſiue excitati ita ſtatis temporibus ad quemuis locum S proferantur, vt nullus eorum reliquis ſit impedimento, ſed quilibet aeque aërem in S excitet, ac ſi reliqui plane abeſſent. Ceterum quatenus hic pulſus tubo aequaliter amplo incluſos conſideramus; huic cauſae eſt tribuendum, quod ſinguli pulſus propagati perpetuo eandem vim retineant, quantumuis enim punctum S a pulſibus primitiuis diſtans accipiatur, pulſus propagati ſemper per ſimilem ſcalam repraeſentantur vnde non ſolum eandem vim ſed etiam easdem affectiones retineant neceſſe eſt. Quando autem tales

pulſus in libero aere quaquauerſus propagantur, tum vtique videbimus eos in maioribus diſtantiis continuo magis debilitari.

Problema 74.

Tab. V. Fig. 79. 38. Si tubus in B ſit apertus ex altera parte vero A in infinitum extenſus, in eoque alicubi GH pulſus quicunque excitetur, eius propagationem in tubo definire.

Solutio.

Pro pulſu in ſpatio GH excitato ſit G*m*H ſcala denſitatum et G*n*H ſcala celeritatum, quarum ergo vtraque extra ſpatium GH per totum tubum cum axe confundatur. Quia vero tubus in BB eſt terminatus et apertus, vtriusque ſcalae continuatio vti in fig. 74. inſtitui debet: hinc ſcala denſitatum BH*m*GA in partem oppoſitam inuerſa fiet B*h*M*ga* ſcala celeritatum vero BH*n*GA ad eandem axis partem circa B inuerſa dabit continuationem B*h*N*ga*. Vnde in tubo pulſus GH propagatio perinde fiet, ac ſi extra tubum ad parem ab orificio BB diſtantiam ſimilis pulſus *gh* exiſteret, ſcala denſitatum tantum ad alteram axis partem conuerſa ita vt ſumta abſciſſa BT = B*t*, ſint applicatae TN = *tn* et TM = *tm*. Nunc igitur videamus quando et quomodo pulſus in quemuis tubi locum ſit peruenturus, ac primo quidem in orificio BB aer quieſcet, quoad ab initio effluerit tempus $t = BH\surd\frac{b}{2ga}$; deinceps

deinceps vero ita agitari incipiet, vt elapſo tempore $t = \mathrm{B}\,t\,\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ibi futura ſit denſitas

$$q = \mathrm{B}(1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{TN} - \tfrac{1}{2}\mathrm{TM} + \tfrac{1}{2}tn + \tfrac{1}{2}tm) = \mathrm{B}$$

et celeritas

$$v = \tfrac{1}{2}(\mathrm{TN} + \mathrm{TM} + tn + tm)\sqrt{\tfrac{2ga}{b}} = (tn + tm)\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}$$

denſitas ſcilicet ibi nullam mutationem patietur, celeritas vero verſus a eo maior erit, quo maior fuerit ſumma applicatarum tn et tm, quarum tn denotat celeritatem verſus B directam tm vero denſitatem naturali maiorem in pulſu initiali. Agitatio haec aeris in ipſo orificio BB durabit per tempus $= \mathrm{GH}\sqrt{\frac{b}{2ga}}$. Intra tubum autem in S ſucceſſiue duae generabuntur agitationes, prior ſcilicet quando pulſus GH eo appellit, indeque elapſo tempore $t = \mathrm{S}\,t\,\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ibi erit denſitas $q = \mathrm{B}(1 + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$ et celeritas $v = \frac{1}{2}(tn + tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$: Deinde vero de nouo agitabitur, quando pulſus ſecundarius hg eo transferetur; tempore enim elapſo $t = \mathrm{ST}\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ibi fiet denſitas

$$q = \mathrm{B}(1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{TN} - \tfrac{1}{2}\mathrm{TM}) = \mathrm{B}(1 - \tfrac{1}{2}tn - \tfrac{1}{2}tm)$$

et celeritas $v = \frac{1}{2}(tn + tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$: in agitatione ſcilicet poſteriori denſitas eo minor erit naturali, quando priori fuerat maior, celeritate exiſtente eadem. In ipſo autem loco GH poſtquam pulſus primarius ceſſaverit elapſo tempore $t = \mathrm{H}b\sqrt{\frac{b}{2ga}} = 2\,\mathrm{BH}\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ denuo agitari incipiet, ibique quaſi echo prioris percipietur. In quouis autem tubi loco A pone pulſum

primarium G H eiusmodi duplex agitatio ſentietur, vt pro priori elapſo tempore $= A t \sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ibi ſit denſitas $q = B(1 - \frac{1}{2} t n + \frac{1}{2} t m)$ celeritas vero $v = \frac{1}{2}(t n - t m) \sqrt{\frac{2ga}{b}}$; pro poſteriori vero elapſo tempore $= A T \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, futura ſit denſitas $q = B(1 + \frac{1}{2} t n - \frac{1}{2} t m)$ et celeritas $v = \frac{1}{2}(t n - t m) \sqrt{\frac{2ga}{b}}$. Tardius autem pulſus hic poſterior ad A pertinget tempore $= 2 B H \sqrt{\frac{b}{2ga}}$. Vnde patet ſi in pulſu principali vbique eſſet $t n = t m$ tum verſus A nullas plane agitationes excitatum iri, contra vero nullas verſus B ſi fuerit $t n = - t m$.

Coroll. 1.

39. In ipſo ergo orificio B B tubi pulſus ſimplex excitabitur, ibique vnicus ſonus exaudietur; in tubo autem ad pulſus locum accedendo duo ſoni ſucceſſiue ſe excipient, quorum poſteriorem vt reſonantiam prioris ſpectare licebit; eorumque interuallum eo maius euadet, quo magis ad pulſum principalem G H appropinquemus.

Coroll. 2.

40 In ipſo autem pulſus principalis loco GH et poſt eum verſus A binae agitationes eo perlatae interuallo temporis $= 2 B H \sqrt{\frac{b}{2ga}}$ a ſe inuicem diſtabunt, quod ſi fuerit ſatis notabile poſterior prioris quaſi *echo* exhibebit.

Coroll.

Coroll. 3.

41. Si initio plures in tubo excitati fuerint pulſus eodem modo atque in praecedente problemate oſtendi poteſt, ſingulorum propagationem a reliquis minime perturbari, ſicque etiam hic plures ſonos inuicem non confundi.

Scholion 1.

42. Solutio huius problematis nos praeter expectationem ad explicationem duorum phaenomenorum imprimis memorabilium manuducit, reſonantiae ſcilicet et *echo*. Primum autem videmus horum phaenomenorum cauſam vulgo perperam repercuſſioni cuipiam eſſe adſcriptam; cum enim in tubo ad B B aperto, in altera vero parte ad A A quaſi in infinitum extenſo ſi vspiam in L pulſus ſeu ſonus excitetur, is nonniſi in orificio B B ſimplex exaudiatur; inde vero ad L recedendo ita duplicetur, vt interuallum continuo fiat maius primo hic reſonantia oritur, tum vero in L et vltra hunc locum verſus A, ſi modo interuallum LB ſatis ſit magnum vt tempus, quo a ſono eius duplum percurreretur, ſentiri queat, repetitio illius ſoni exaudietur, cum tamen hic nulla reflexio cernatur, niſi forte dicere velimus repercuſionem hic in B B fieri ab aere externo quod tamen ab opinione vulgari plurimum abhorret. Ita ſi interuallum BL eſſet 1040 pedum ſonus in L editus poſt duo minuta ſecunda ibi iterum audiretur, et quod hic de tubis eſt dictum, Tab. V. Fig. 80.

quo-

quodammodo etiam ad ambulacra et vicos anguſtos praecipue ſi ſuperne fuerint tecti, transferri licet, vnde plurium phaenomenorum in huiusmodi locis obſeruatorum ratio reddi poterit.

Scholion 2.

43. Deinde etiam hinc rationem tubarum ſtentorearum iam quodammodo colligere poterimus, ſi enim in tubo ad L ſonus fuerit excitatus, pulſus inde per orificium B B pari propemodum vi in liberum aërem expellitur, et quia hic non amplius indolem habet pulſuum propagatorum, qua tantum in vnam plagam proferantur etiam quaqua verſus expanditur. Quia vero orificium B B non eſt maius quam pulſus initialis, e longinquo ſonus non fortior ſed cum quadam reſonantia coniunctus audietur. Sin autem tubus vt vulgo fieri ſolet circa orificium magis dilatetur, nullum eſt dubium, quin ſcopo propoſito magis ſatisfiat: quoniam in B B multo maior aëris copia agitatur, ideoque in aëre externo fortiores pulſus generat. Nunc autem etiam propagationem pulſuum in tubis ex altera parte clauſis ſcrutemur.

Problema 75.

Tab VI. Fig. 81. 44. Si Tubus aequaliter amplus ad B B ſit clauſus, ad alteram vero partem A A in infinitum extenſus, in eoque alicubi veluti in ſpatiolo G H pulſus quicunque excitetur, huius pulſus propagationem per totum tubum inueſtigare.

Solutio.

Solutio.

Si in ſpatii G H quo pulſus excitatur puncto t fuerit denſitas $= Q$ naturali exiſtente $= B$, et celeritas verſus B directa $= \Upsilon$ ſtatuantur applicatae $tm = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$ et $tn = \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, vt obtineantur ſcalae denſitatum et celeritatum GmH et GnH, quae per reliquam tubi extenſionem cum ipſo axe conuenire ſunt cenſendae. Axe iam A B extra tubum in infinitum prolongato, ſumtoque interuallo $BT = Bt$ ſtatuatur applicata $TM = tm$ ad eandem axis partem, ad contrariam vero $TN = tn$, vt ſic ſcalae quaſi pulſus ſecundarii hMg et hNg extruantur. Hinc in ipſo termino B B aer tamdiu quieſcet, quoad vterque pulſus eo propagetur, quod ſimul continget elapſo tempore $= BH\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ elapſo autem tempore maiore $t = Bt\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, eiusmodi in B B agitatio excitabitur, vt futura ſit denſitas $q = B(1 + \frac{1}{2}TN + \frac{1}{2}TM + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm) = B(1 + tn + tm)$, celeritas vero υ nulla quia aër in B B non poteſt non eſſe quieſcens. In alio vero quouis tubi loco S intra terminum B et locum primi pulſus G H accepto ad eum hic primus pulſus prius appellet, et elapſo tempore $t = St\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ denſitas ibi erit $q = B(1 + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$ celeritas vero $\upsilon = \frac{1}{2}(tn + tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$. Deinde vero etiam alter pulſus ſecundarius gh eo perferetur, et elapſo tempore $t = ST\sqrt{\frac{b}{2ga}} = (Bt + BS)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ibi erit denſitas $q = B(1 + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$ vt ante celeritas vero $\upsilon = -\frac{1}{2}(tn + tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$,

illi contraria. In ipſo autem pulſus G H loco et pone eum verſus A ambo pulſus ſe excipient elapſo tempore $2\,BH\sqrt{\frac{b}{2ga}}$; atque in A pro pulſu principali elapſo tempore $t = A\,t\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ erit denſitas $q = B(1 - \tfrac{1}{2}t\,n + \tfrac{1}{2}t\,m)$ et celeritas $\upsilon = \tfrac{1}{2}(t\,n - t\,m)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, qua agitatione finita pro pulſu ſecundario elapſo tempore $t = A\,T\sqrt{\frac{b}{2ga}} = (A\,t + 2\,B\,t)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ reperietur ad A denſitas $q = B(1 - \tfrac{1}{2}t\,n + \tfrac{1}{2}t\,m)$ et celeritas $\upsilon = -\tfrac{1}{2}(t\,n - t\,m)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$. Sicque propagatio pulſus primum excitati G H per totum tubum innoteſcit.

Coroll. 1.

45. Perinde ergo atque in caſu praecedente per ſpatium B H quaedam ſoni repetitio percipietur, quae niſi temporis interuallum ſentiri queat, pro reſonantia erit habenda, in ipſo autem loco G H et poſt eum in A echo eo magis erit diſtinctum, quo maius fuerit ſpatium B H.

Coroll. 2.

46. Pulſus autem in ſpatio G A pone pulſum principalem excitati alius erunt indolis, ac pulſus ante eum in ſpatio B H producti, fierique adeo poteſt vt in alterutram plagam nulla propagatio contingat, quoniam altero caſu agitatio definitur ſumma applicatarum $t\,n + t\,m$, altero vero earum differentia $t\,n - t\,m$.

Scho-

Scholion.

47. Diſſimilitudini pulſuum in tubo vtrinque propagatorum experientia neutiquam aduerſari eſt putanda, ſi in ſonis nullum diſcrimen animaduertitur. Etiamſi enim binae ſcalae G *m* H et G *n* H ita ſint comparatae, vt prouti vel ſumma vel differentia applicatarum *t m* et *t n* capi debeat, maximum diſcrimen oriri debeat, tamen perpendendum eſt, quoniam omnes ſoni pluribus pulſibus ſucceſſiue productis conſtant; qui a motu quodam reciproco naſcuntur, eos ſemper ita eſſe comparatos, vt alternatim ſcalas illas contrario modo diſpoſitas praebeant, ideoque ſi vnus pulſus in vnam plagam fuerit fortior quam in alteram, contrarium in ſequente eueniet, et quoniam ſenſus noſtri ſingulos diſcernere non valent, etiam illud diſcrimen in ſenſus non cadit. Quodſi alterni pulſus in alteram plagam prorſus non propagentur, ſonus percipietur vna *octaua* grauior, etiamſi corpus ſonorum duplo plures edat vibrationes. An autem huiusmodi caſus vnquam eueniant, in dubio eſt relinquendum.

Problema 76.

48. Si in tubo aequaliter amplo et vtrinque aperto A A B B alicubi in *t* pulſus quicunque excitetur, eius propagationem per totum tubum determinare. Tab. VI. Fig. 82.

Solutio.

Etſi agitatio ſemper in quodam ſpatio, vti hactenus aſſumſimus fieri debet, tamen nunc a latitudine pulſus animum abſtrahamus, quandoquidem ex praecedentibus effectus inde oriundus ſatis intelligitur, et agitationem in vnico puncto t factam hic contemplemur, vbi ſi fuerit denſitus $= Q$ naturali exiſtente $= B$, et celeritas in plagam A B directa $= \Upsilon$ capiatur $t\,m = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$ et $t\,n = \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, in reliquis autem tubi punctis hae binae applicatae euaneſcant. Producto iam axe A B vtrinque in infinitum, ſumtisque ſpatiis B A′, A′ B″ etc. A B′, B′ A″ longitudini tubi aequalibus, ex praeceptis ſupra datis continuatio ambarum ſcalarum ita inſtitui debet. Primo ſumto interuallo B T B t, quia tubus in B eſt apertus capiatur T M $= t\,m$ infra, at T N $= t\,n$ ſupra axem: tum ſimili modo ad alteram partem ſumto A T′ $=$ A t, quia tubus in A etiam eſt apertus capiatur T′ M′ $= t\,m$ infra et T′ N′ $= t\,n$ ſupra axem. Iam hac ſcala T′ M′ N′ cum orificio B B collato, ſumatur B t' $=$ B T′, $t'\,m' =$ T′ M′ et $t'\,n' =$ T′ N′ vtrumque ſupra axem, ſicque vtrinque in infinitum progrediendo applicatae T N et $t\,n$ omnes ſupra axem, alterae vero T M et $t\,m$ alternatim ſupra et infra axem erunt diſpoſitae, et in quouis ſpatio interualla A T et A t primo A t, vti et interualla B T, B t etiam primo B t erunt aequalia. His poſitis ad quoduis tubi punctum S ſucceſſiue plures adeoque infiniti pulſus per-

perſerentur, primo nempe pulſus principalis tmn poſt tempus $= St\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, tum pulſus TMN poſt tempus $= ST\sqrt{\frac{b}{2ga}} = (Bt + BS)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, tertio pulſus $T'M'N'$ poſt tempus $= ST'\sqrt{\frac{b}{2ga}} = (At + AS)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ et ita porro, quorum pulſuum ſucceſſiuorum indoles in ſequente tabella exhibetur :

Elapſo tempore ab initio:	In tubi puncto S erit denſitas	celeritas ſec. AB
$St\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1+\frac{1}{2}tn+\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn+tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2Bt-St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1-\frac{1}{2}tn-\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn+tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2At+St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1+\frac{1}{2}tn-\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn-tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2At+2Bt-St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1-\frac{1}{2}tn+\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn-tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2At+2Bt+St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1+\frac{1}{2}tn+\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn+tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2At+4Bt-St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1-\frac{1}{2}tn-\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn+tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(4At+2Bt+St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1+\frac{1}{2}tn-\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn-tm)\sqrt{\frac{2ra}{b}}$
$(4At+4Bt-St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1-\frac{1}{2}tn+\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn-tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
etc.	etc.	etc.

Coroll. 1.

49. Pulſus ergo ſucceſſiue aërem in S concitantes ratione indolis ſunt quadruplices, quartus enim quisque eadem indole eſt praeditus, tempore autem $= 2AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ quaterni pulſus in eundem tubi locum appellunt, hique paribus interuallis ſe inſequentur, ſi fuerit $Bt = At$ et $St = \frac{1}{2}Bt$.

Coroll. 2.

50. Cum tempore $2\,AB\,\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ quatuor pulſus edantur, ſingulis minutis ſecundis euenient $\frac{2}{AB}\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ pulſus, qui numerus ſi AB in pedibus Lond. exprimatur fit $=\frac{1912}{AB}$. Si hi pulſus ſint ſatis fortes ſonum referent, qui ergo ab vnico aëris pulſu ortus eſt cenſendus.

Coroll. 3.

51. Si primus pulſus in ipſo orificio BB excitetur, ibidemque quaſi auris teneatur, ob $St = 0$, $Bt = 0$ et $At = AB$, omnes pulſus erunt geminati, ſeque ſequentur temporibus $2\,AB\,\sqrt{\frac{b}{2ga}} = \frac{AB}{450}$ ſec. ſiquidem AB in pedibus exprimatur. Hinc ſi longitudo AB ſit quaſi 500 ped. plures eiusdem ſoni repetitiones ſingulis minutis ſecundis ſe excipient et exaudientur.

Scholion.

52. Hinc intelligere licet quomodo echo plurium repetitionum generetur, cum tubus ſatis longus tale phaenomenum exhibere poſſit, neque tamen vlla ſoni repercuſſio eueniat. Secundum calculum quidem ſingulae repetitiones aeque deberent eſſe fortes verum tamen facile intelligitur plures eſſe cauſas quibus ſequentes repetitiones continuo debilitentur quoniam conditionibus in calculo aſſumtis, in praxi neutiquam ſatisfieri poteſt. Cum tamen exempla non deſi-

deficiant, quibus eiusdem vocis plures repetitiones ſatis diſtincte eduntur, nullum eſt dubium, quin earum cauſa in ſimili aëris agitatione qualem hic ſumus contemplati, ſit quaerenda. Deinde etiam reſonantiae ratio hinc potiſſimum explicari debere videtur etiamſi laterum tubi natura, quatenus ab aëre interno ſimul motum vibratorium recipiunt, eo non parum conferat. Praeterea ex praecedentibus ſatis eſt manifeſtum ' his ſimilia phaenomena prodire debere, ſi tubus vtrinque clauſus accipiatur, pulſus enim deriuati ſuper axe eodem plane modo erunt diſpoſiti, hoc tantum diſcrimine, quod hic applicatae *t n* ex celeritatibus natae alternatim infra et ſupra axem collocari debeant: neque ergo opus eſſe arbitror vt hunc caſum ſeorſim euoluam. Inde autem non contemnendae dilucidationes pro motu tympanorum deriuari poterunt; etſi enim membranae quibus tympana teguntur, eorumque latera ſonum potiſſimum moderantur, tamen in aëre incluſo quoque ratio repetionis pulſuum quaerenda videtur. Supereſt igitur in hoc capite tantum, vt agitationem aëris in tubis ex altera parte clauſis, ex altera vero apertis inueſtigemus.

Problema 77.

53. Si tubus aequaliter amplus A A B B fuerit in altero termino A A apertus, in altero vero B B clauſus atque in eo ad *t* pulſus quicunque fuerit excitatus, eius propagationem in tubo inueſtigare. Tab. VI. Fig. 83.

Solutio.

Solutio.

In aere ad t agitato ſit denſitas $= Q$ naturali exiſtente $= B$, et celeritas ſecundum directionem A A $= \Upsilon$, inde capiatur $tm = l\frac{Q}{B}$ et $tn = \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, ita vt punctum m referat ſcalam denſitatum, punctum n vero ſcalam celeritatum ſiquidem reliqua vtriusque ſcalae puncta in ipſum axem incidunt. Iam eo vtrinque producto ſumtoque interuallo B T $=$ B t, quia tubus in B B eſt clauſus, applicata T M $= t\,m$ ſupra, altera vero T N $= t\,n$ infra axem eſt ponenda. Ad alteram vero partem quia tubus in A A eſt apertus, ſumto ſpatio A T′ $=$ A t, applicata T′ M′ $= tm$ infra, altera vero T′ N′ $= tn$ ſupra axem ſtatuatur, ſimilique modo ſumto A t'' $=$ A T, fieri oportet $t''\,m'' = -$ T M $= -\,t\,m$ et $t''\,n'' = +$ T N $= -\,t\,n$. Tum iterum vltra B progrediendo ſumto interuallo B t' $=$ B T′ capi debet $t'\,m' = +$ T′ M′ $= -\,t\,m$ et $t'\,n' = -$ T′ N′ $= -\,t\,n$, ſic porro vtrinque in infinitum. Nunc videamus quomodo omnes iſti pulſus ſucceſſiue ad tubi punctum quodcunque S perueniant, id quod ex adiuncta tabella perſpicietur:

Elapſo

Elapſo ab initio tempore	In tubi puncto S erit Denſitas	Celeritas ſec. A B
$St\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1+\frac{1}{2}tn+\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn+tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2Bt-St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1+\frac{1}{2}tn+\frac{1}{2}tm)$	$-\frac{1}{2}(tn+tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2At+St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1+\frac{1}{2}tn-\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn-tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2At+2Bt-St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1+\frac{1}{2}tn-\frac{1}{2}tm)$	$-\frac{1}{2}(tn-tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2At+2Bt+St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1-\frac{1}{2}tn-\frac{1}{2}tm)$	$-\frac{1}{2}(tn+tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2At+4Bt-St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1-\frac{1}{2}tn-\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn+tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(4At+2Bt+St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1-\frac{1}{2}tn+\frac{1}{2}tm)$	$-\frac{1}{2}(tn-tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(4At+4Bt-St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1-\frac{1}{2}tn+\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn-tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(4At+4Bt+St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1+\frac{1}{2}tn+\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn+tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
etc.	etc.	etc.

Coroll. 1.

54. Hoc ergo caſu maior diſparitas in pulſibus ſucceſſiuis ad eundem locum appellentibus cernitur, quoniam hic demum octauus quisque ad eandem indolem reuertitur. Temporis autem interualla eandem legem tenent vt ante.

Coroll. 2.

55. Si ſit $St = 0$ et $At = 0$, ita vt ſonus in A edatur ibique auris conſtituatur, ordo et indoles pulſuum ad aurem ſucceſſiue delatorum ita ſe habebit:

Elapſo tempore	denſitas	celeritas
$2\,AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1)$	$-2tn\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$4\,AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1)$	$+2tn\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$6\,AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1)$	$-2tn\sqrt{\frac{2ga}{b}}$

denſitas ergo hic nullam ſubit mutationem, vnde ſi primus pulſus nullam habuerit celeritatem, ſequentes omnes ſe mutuo deſtruunt.

Coroll. 3.

56. Sin autem ſonus in B B excitetur, ibique a ſenſu auditus pulſus ſequentes excipiantur, vt ſit $St = 0$, $Bt = 0$ et $At = AB$ tum celeritas in pulſibus appellentibus erit nulla, denſitas ſola alternatim erit $= B(1 - 2tm)$ et $B(1 + 2tm)$ hique pulſus temporis interuallis $2\,AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ſe inſequentur. His autem duobus caſibus quaterni pulſus in vnum vniuntur quam ob cauſam etiam hi pulſus complexi alia proprietate praediti ſunt ac pulſus ſimplices propagati.

Scholion 1.

57. Quae hactenus hic ſunt tradita de pulſuum indole et propagatione, Phyſicis occaſionem praebere poſſunt in naturam tam ſonorum quam auditus
Tab. VI. accuratius inquirendi. In quo negotio imprimis erit
Fig. 34. perpendendum, ſi pulſus a quacunque cauſa excitatus ſecundum directionem A B in aere propagetur, et nunc quidem ſpatium Y X occupet; eius naturam ſemper

ſemper vna quadam linea curua XZY repraeſentari poſſe, quae ſimul ſit ſcala denſitatum et celeritatum etiamſi in pulſu principali hac duae ſcalae maxime fuerint diuerſae; hoc autem de pulſibus ſimplicibus eſt intelligendum, non vero de complexis, qui ex pluribus ſimplicibus a contrariis plagis in eundem locum venientibus coaleſcunt, cuiusmodi ſunt ii, quos in coroll. 2 et 3 deſcripſi. Dum igitur pulſus ille ſimplex in ſpatio X Y verſatur, primum eius latitudo X Y conſiderari debet intra quam aër de ſtatu aequilibrii eſt deturbatus, extra eam vero vbique quieſcit: quo enim haec latitudo fuerit maior eo plenior quaſi erit ſonus. Deinde curua illa XZY hoc modo aeris agitationem declarat: ea ſcilicet aeris particula quae ante pulſus aduentum erat in S nunc erit translata in s, vt ſit ſpatiolum $Ss =$ areae X S Z ad lineam illam rectam, qua vnitas deſignatur, applicatae: tum vero eius denſitas q ita erit comparata, vt ſit $q = B(1 + SZ)$ denotante B denſitatem naturalem ſeu erit $SZ = l\frac{q}{B}$, motu autem ſimul verſus B feretur, cuius celeritas erit $= SZ\sqrt{\frac{2ga}{b}}$. Eadem autem hic recta pro vnitate aſſumta eſt intelligenda, qua in ſcalis pulſus principalis conſtruendis fuerimus vſi. Quodſi ergo aër hac agitatione ad aurem perferatur, hinc erit colligendum, quomodo auditus organum afficiatur.

Scholion 2.

58. In figura totam curuam X Z Y ſupra axem deſcriptam exhibeo; id quod euenit, cum in

toto pulſus interuallo denſitas aeris naturali eſt maior, ſimulque ſingulae aeris particulae motu verſus B directo ſint praeditae: quod ſi eueniat poſtrema pulſus particula ex Y in y erit translata vt ſit ſpatiolum $Yy =$ areae X Z Y, hoc ſcilicet caſu vniuerſus aër poſt pulſum ab agitatione praecedente per tantum ſpatiolum ſucceſſiſſe eſt intelligendus. Tab. VI. Quod ſi talis ſucceſſio non contingat vt Fig. 85. poſtrema pulſus particula Y in loco ſuo naturali perſiſtat, curua X Z Y agitationem exhibens ita erit comparata vt partim ſupra partim infra axem ſit diſpoſita, eiusque area negatiua Y Z' O poſitiuae X Z O fiat aequalis. Tum igitur ſi pars ſuperior antecedat, ad aurem prius perferentur aëris particulae naturali denſiores et in plagam B motae, poſt vero ſequentur particulae rariores, motum retro directum habentes. Ex quo concludendum videtur, eſſentiale ſonorum diſcrimen in hoc eſſe conſtituendum, prout pars ſuperior X Z O vel praecedat vel ſequatur. Si eueniret vt haec curua ter vel quinquies axem X Y ſecaret, inde ſine dubio peculiares affectiones in ſonum redundarent. Semper autem figura huius curuae X Z Y, maxime eſſentiale diſcrimen ſonorum repraeſentare eſt cenſenda; eo nimirum diſcrimine remoto quod a ſucceſſione plurium pulſuum proficiſcitur. Quanquam autem haec ex ſola conſideratione tuborum aeque amplorum ſunt deducta, tamen multo latius patent, et per ea quae circa tubos inaequaliter amplos perſcrutari licebit confirmabuntur.

CAPVT

CAPVT III.

DE MOTV OSCILLATORIO AERIS IN TVBIS AEQVALITER AMPLIS AD SONOS TIBIARVM EXPLICANDOS.

Problema 78.

59. Si tubus A A B B vtrinque fuerit apertus, aerque in eo contentus quomodocunque de ſtatu aequilibrii deturbetur, motum oſcillatorium, quo aer in tubo deinceps agitabitur, determinare. Tab. VI. Fig. 86.

Solutio.

Aequilibrii primam perturbationem ad calculum reuocaturi ponamus in loco tubi quocunque S denſitatem eſſe $= Q$ naturali exiſtente $= B$, et celeritatem ſecundum directionem A B ibi eſſe $= \Upsilon$; hinc ſupra axem A B in puncto S erigantur duae applicatae $S Q = l \frac{Q}{B}$ et $S \Upsilon = \Upsilon \surd \frac{b}{2 g a}$, certa quadam linea recta pro vnitate aſſumta, quo facto punctum Q erit in ſcala denſitatum, Υ vero in ſcala celeritatum. Quia autem tubus in A et B eſt apertus, neceſſe eſt vt ſcala denſitatum in vtroque termino A et B in axem incidat, vti A Q B tota autem ſcala celeritatum ſit E Υ F. Nunc pro motu ſequente definiendo vtramque ſcalam ſecundum praecepta ſupra data vtrinque in infinitum continuari

 ri

ri oportet. Hunc in finem axe vtrinque producto, in eoque abſciſſis interuallis B A′, A′ B′, A B″, B″ A″ etc. longitudi tubi aequalibus ſcala primo denſitatum A Q B alternatim infra et ſupra axem applicetur, ſcala vero celeritatum ad eandem axis partem repetatur F E′, E′ F′, etc. E F″, F″ E″ etc. eo ordine quem figurae inſpectio oſtendit, ſingulas partes alternatim dextrorſum et ſiniſtrorſum diſponendo. His ita praeparatis ſi ad tempus quodcunque elapſum $= t$ ſtatum aëris qui initio erat in S, cognoſcere velimus a puncto S vtrinque in axe abſcindamus interualla $ST = St = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, atque in punctis T et t ad vtramque ſcalam ductis applicatis ſupra oſtendimus fore (13)

denſitatem $q = Q(1 - SQ - \frac{1}{2}TN + \frac{1}{2}TM + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$
et celeritatem $v = \frac{1}{2}(TN - TM + tn + tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$

quo motu aër in S verſus B promotus erit interuallo

$$= \tfrac{1}{2}TNtn - \tfrac{1}{2}SQTM + \tfrac{1}{2}SQtm,$$

quod ergo ſi tota ſcala celeritatum ſupra axem ſit ſita quantumuis magnum euadere poteſt, id quod euenit, dum aër continuo per tubum A B transfluit, eoque continuo nouus aer intrat, locum egreſſi occupans; cuius autem ſtatus binis prioribus formulis pro q et v datis definitur. Iam obſeruo, ſi tempus t tantum capiatur vt fiat $t\sqrt{\frac{2ga}{b}} = 2AB$, tum puncta T et t in s et s' cadere, quae puncta ipſi S ſunt analoga, indeque fieri $q = Q$ et

$v =$

$\upsilon = S\Upsilon \sqrt{\frac{2ga}{b}} = \Upsilon$ ita vt nunc punctum S ſimulque omnis aër in tubo contentus in eundem ſtatum ſit reductus, in quo initio verſabatur. Interea ergo hic aer duas oſcillationes abſoluiſſe eſt cenſendus, ex quo ſingularum oſcillationum tempora erunt $= AB \sqrt{\frac{b}{2ga}}$ perſpicuum enim eſt omnia haec tempora inter ſe eſſe aequalia, quia ſiue capiatur $t\sqrt{\frac{2ga}{b}} = 2\,AB$ ſiue $= 4\,AB$ ſiue $= 6\,AB$ ſemper prodit $q = Q$ et $\upsilon = \Upsilon$, notandum autem eſt formulam $\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ exprimere diſtantiam, per quam ſonus vno minuto propagatur. Ponamus hoc ſpatium breuitatis gratia $= k$ quod eſt circiter 1000 pedum, et quia tempus cuiusque oſcillationis eſt $= \frac{AB}{k}$, vno minuto ſecundo abſoluentur $\frac{k}{AB}$ oſcillationes, cui numero ſonus inde editus proportionalis ſtatuitur.

Coroll 1.

60. Si igitur tubi vtrinque aperti et aequaliter ampli longitudo ſit $AB = d$, aerque in eo contentus de ſtatu aequilibrii deturbetur, motum oſcillatorium recipiet, quo ſingulis minutis ſecundis $\frac{k}{d}$ oſcillationes abſoluentur, denotante k ſpatium, per quod ſonus vno minuto ſecundo propagatur: hincque auditus percipiet ſonum numero $\frac{k}{d}$ repraeſentatum.

Coroll. 2.

61. Quia autem eſt $k = \sqrt{\frac{2ga}{b}}$, vbi a denotare poteſt altitudinem mercurii in barometro, ſi denſi-

denſitas mercurii vnitate exhibeatur, et pro b denſitas aëris ſcribatur, inde patet hos ſonos partim ab elaſticitate aëris pendere partim ab eius denſitate: ita vt maior elaſticitas ſonum acutiorem reddat, maior vero denſitas grauiorem.

Coroll 3.

62. Si tubi longitudo ſit vnius pedis, ob $k = 1000$ ped. ſingulis minutis ſecundis edentur 1000 oſcillationes; et a tubo longitudinis 8 pedum 125 oſcillationes, cui numero reſpondet ſonus in inſtrumentis muſicis littera C indicari ſolitus. Hinc pro quouis ſono muſico longitudo tubi aperti conſoni aſſignari poteſt.

Scholion 1.

63. Quaecunque ergo agitatio aëri in tubo A B contento fuerit inducta, ſiue motus impreſſione ſiue denſitatis immutatione, eiusmodi motus oſcillatorius in eo generabitur qualis eſt inuentus. Interim tamen euenire poteſt, vt numerus oſcillationum vel duplo vel triplo, vel quadruplo vel in ratione quacunque multipla fiat maior; id quod a certa indole primae agitationis pendet. Si enim ambae ſcalae agitationem determinantes A Q B et E Y F ita formentur, vt ſimiles fiant ſcalis per duplum ſpatium A A′ continuatis, vel per triplum A B′, vel per quadruplum A′ A″ etc. motus oſcillatorius perinde ſe habebit ac ſi tubus A B eſſet vel duplo vel triplo vel quadruplo breuior, ſicque numerus

merus oſcillationum vno minuto ſecundo editarum fiet vel duplo vel triplo vel quadruplo maior; vnde ſoni continuo acutiores ſecundum numeros 1, 2, 3, 4 etc. orientur. Cum autem ad hos ſonos acutiorês ſingularis proprietas primae agitationis requiratur, ii pro ſecundariis ſunt habendi, dum ſonus primarius eſt is qui formula $\frac{k}{AB}$ indicatur, quia hic nullam huiusmodi conditionem ſingularem poſtulat. Exiſtente ergo ſono principali $= \frac{k}{AB}$ ſoni ſecundarii erunt $\frac{2k}{AB}$, $\frac{3k}{AB}$, $\frac{4k}{AB}$ etc.

Scholion 2.

64. Haec ſonorum proprietas tam pulcre conuenit cum iis, quos tibiae inflatae edunt, vt nullum ſit dubium, quin ſoni tibiarum ex hoc principio explicari debeant. Dum enim tibia inflatur, aer in tubo contentus non ſolum ratione denſitatis de ſtatu aequilibrii deturbatur, ſed etiam ad motum quendam concitatur quo per tubum A B propellitur; vnde naſcetur ſcala quaedam denſitatum A Q B et celeritatum E Y F, cuius applicatae erunt poſitiuae motum ſecundum directionem A B indicantes. Ex huiusmodi igitur agitatione eiusmodi motus oſcillatorius indeque ſonus naſcitur, qualem definiuimus; omnesque circumſtantiae obſeruatae cum noſtra Theoria egregie conueniunt; dum etiam eadem tibia omnes illos ſonos ſecundarios praeter primarium edere poſſe deprehenditur. Imprimis autem hic notandum eſt, continua inflatione aërem in tubo con-

tentum etiam motu oſcillatorio imbutum continuo ex tubo expelli, ſicque eo facilius propagationem in aëre externo effici; huicque cauſae eſſe tribuendum, quod ceſſante inflatione ſonus ſubito quoque extinguatur cum tamen ſecundum Theoriam motus oſcillatorius in ipſo tubo diu durare deberet.

Scholion 3.

65. Sic quidem intelligitur, cur inflatione ceſſante tibiae nullum amplius ſonum edant, verumtamen in genere, quando idem aer in tubo manet, ratio minus eſt perſpicua, cur motus oſcillatorius in eo mox extinguatur? et cur in caſibus praecedentis capitis neutiquam tot vocis repetitiones percipiantur, quot Theoria indicat, in quo Theoria plurimum ab experientia diſſentit. In praeſente enim caſu elapſo tempore quantumuis magno calculus etiam nunc aeque vehementem aeris agitationem in tubo oſtendit ac ſtatim ab initio, interim tamen experientia nouimus totam agitationem initio productam mox penitus interire, niſi continuo de nouo inſtauretur, vnde certe grauiſſimum argumentum contra noſtram Theoriam peti poſſe videtur. Verum praeter plurima alia motus impedimenta ipſa tubi indoles ad hanc obiectionem diluendum potiſſimum ſpectari debet etiamſi enim tubus ex duriſſima materia ſit confectus tamen ea aëris agitationibus ſemper aliquantillum cedit, cum tamen in calculo latera tubi tanto rigore praedita aſſumantur, vt nullius plane impreſſionis et agitationis ſint capacia; cui

cui conditioni cum praxis maxime aduerſetur, minime mirum eſt, quando huiusmodi aëris agitationes tam cito pereunt. Pleraeque autem materiae, ex quibus tales tubi confici ſolent, manifeſto eo rigoris gradu deſtituuntur, qui ad perennitatem motus oſcillatorii requireretur, ob eamque ſolam cauſam, etiamſi alia impedimenta non adeſſent, is motus diu durare non poſſet. Interim tamen quo fortior et durior fuerit tubi materia, eo minus experientia a Theoria recedere deprehenditur.

Problema 79.

66. Si tubus aequaliter amplus in altero termino A A fuerit apertus, in altero vero B B clauſus, aerque in eo contentus vtcunque de ſtatu aequilibrii deturbetur, motum oſcillatorium quo aer in tubo deinceps agitabitur, determinare. Tab. VII. Fig. 87.

Solutio.

Primo agitationis momento aëri in tubo circa S verſanti ſit inducta denſitas $= Q$ naturali exiſtente $= B$ ſimulque celeritas $= \Upsilon$ ſecundum directionem A B, inde binae ſcalae ita formentur, vt pro ſcala denſitatum A D ſit applicata $SQ = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$, pro ſcala vero celeritatum E B applicata $S\Upsilon = \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, quarum illa ſcala, quia tubus ad A A eſt apertus per punctum A, haec vero quia tubus ad B B eſt clauſus per punctum B tranſire debet. Has iam ſcalas vtrinque ita continuari oportet, vt ſumtis in

axe A B producto interuallis B A′, A′B′, B′A′ etc. item A B″, B″ A″ etc. ipſi A B aequalibus B D ſit diameter ſcalae denſitatum vnde ea per A′ ita tranſibit, vt rami circa A′ ſint alternatim aequales, ita vt ramus A′ D′ aequalis ſit et ſimilis arcui A′ D ſed ad axis partes contrarias poſitus, quod idem de puncto A valet, tum vero rectae B′ D′ et B″ D″ iterum erunt diametri, punctaque A″ et A‴ centra ramorum alternatim aequalium vt puncta A, et A′, ſicque porro vtrinque in infinitum. Pro ſcalae celeritatum E B continuatione autem recta A E eſt eius diameter puncta vero B et B′ centra ramorum alternatim aequalium, vnde rectae A′ E′, A″ E″ iterum erunt diametri ſicque ambae ſcalae facile in infinitum continuantur. Quodſi iam a prima agitatione elapſum ſit tempus $= t$, a puncto S vtrinque ſuper axe abſcindantur ſpatia $ST = St = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, ibique ductis ad vtramque ſcalam applicatis T M, T N, tm, tn, quia eae hic contra cadunt ac ſupra aſſumſimus, particulae aëris quae initio erat in S nunc erit

denſitas $q = Q(1 - SQ + \frac{1}{2}TN - \frac{1}{2}TM - \frac{1}{2}tn - \frac{1}{2}tm)$
et celeritas

$$v = -\tfrac{1}{2}(TN - TM + tn + tm)\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}$$

ſecundum A B, ipſa vero haec particula translata erit in s vt ſit ſpatiolum

$$Ss = \tfrac{1}{2}TN\,tn - \tfrac{1}{2}SQ\,TM + \tfrac{1}{2}SQ\,tm$$

quatenus

quatenus ſcilicet hae areae ſupra axem cadunt, quae partes enim infra axem cadunt negatiuae ſunt cenſendae.

Ponamus autem tantum elapſum eſſe tempus t, vt ſit $ST = St = 2AB$ ideoque $t = 2AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, et manifeſtum eſt puncta T et t in interuallis $A'B'$ et $A''B''$ ſimiliter eſſe ſita ac punctum S in interuallo AB, ideoque fore $TM = tm = SQ$ et $TN = tn = S\Upsilon$; vnde poſt hoc tempus erit denſitas in S nempe $q = Q(1 - 2SQ)$ et celeritas $\upsilon = -S\Upsilon\sqrt{\frac{2ga}{b}} = -\Upsilon$. Hinc ſi initio fuerit in S denſitas $Q = B + O$ naturali ſcilicet B tantillo maior, ob $SQ = \frac{O}{B}$ erit nunc $q = B - O$, tantundem minor naturali, tum vero etiam celeritas υ primae eſt aequalis ſed in plagam oppoſitam directa; ex quo ſtatu, qui primo directe eſt contrarius, intelligitur jam aërem vnam oſcillationem abſoluiſſe, quia nonniſi poſt tempus duplo maius in ſtatum initialem reuertetur, ita vt tempus cuiusque oſcillationis ſit cenſendum $= 2AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$. Quod autem ad translationis ſpatiolum Ss attinet, ob

$$TNtn = -AE\Upsilon S - ABE + BS\Upsilon + AE\Upsilon S + AEB - BS\Upsilon = 0$$
$$SQTM = SQDB + ABD - ASQ \text{ et}$$
$$SQtm = ASQ - ABD - SQDB = SQTM$$

vnde patet hanc translationem euaneſcere. Concludimus ergo ſi ſpatium a ſono vno minuto ſecundo percurſum ponatur $\sqrt{\frac{2ga}{b}} = k$, tempus vnius oſcillationis fore $= \frac{2AB}{k}$, et ſingulis minutis ſecundis ab-

ſolui oſcillationes $\frac{k}{2AB}$, qui numerus ſimul naturam ſoni hinc editi exhibet.

Coroll. 1.

67 Quando ergo tubus ex altera parte eſt clauſus ſingulae oſcillationes duplo longius durant, quam ſi idem tubus vtrinque eſſet apertus, eodemque propterea tempore dimidium tantum oſcillationum numerum abſoluit. Seu tubus ex altera parte clauſus ſonum vna octaua edit grauiorem, quam ſi eſſet vtrinque apertus.

Coroll. 2.

68. Soni autem hic aeque atque in tubis vtrinque apertis inter ſe tenent rationem reciprocam longitudinum, ita vt quo tubus fuerit longior, eius ſonus eo futurus ſit grauior; vnde ſi tubi longitudo ſonum C edentis ſit cognita, quae hoc caſu quaſi 4 erit pedum, pro omnibus reliquis ſonis muſicis longitudo facile aſſignabitur.

Scholion. 1.

69. Hic autem primam agitationem non ita accommodare licet, vt oſcillationes duplo fiant frequentiores, quemadmodum in caſu tuborum vtrinque apertorum vſu venit, ſi enim hic iisdem manentibus ſcalis tubo longitudinem duplam AA' tribuamus eumque in A' clauſum ponamus, figura ſcalae celeritatum, quae in punctum A' incidere deberet

beret huic hypotheſi aduerſatur, eademque repugnantia deprehenditur, ſi longitudinem tubi quater vel ſexies vel octies vel ſecundum quemuis numerum parem, multiplicare vellemus, ita vt huiusmodi tubus nullo modo ad ſonum, qui ad principalem teneat rationem vt $2:1, 4:1, 6:1$ ſeu $2i:1$ edendum ſit aptus. Secundum numeros impares autem haec reductio egregie ſuccedit: concipiamus enim tubum triplo longiorem AB' in A apertum in B vero clauſum, in quo aeri eiusmodi ſit agitatio inducta, vt ſcala denſitatum ſit $ADA'D'$ et ſcala celeritatum $EBE'B'$, quarum forma conditionibus praeſcriptis vtique conuenit; et cum continuatio ambarum ſcalarum ſe quoque habeat vt ante oſcillationes etiam eaedem inde naſcentur, ex quo intelligitur in huiusmodi tubo primam agitationem ita comparatam eſſe poſſe, vt motus oſcillatorius inde genitus prorſus conueniat cum tubo triplo breviori, quod etiam de quintuplo, ſeptuplo etc. brevioribus valet. Cum igitur tubi AB in altera parte clauſi ſonus principalis ſit $= \frac{k}{2AB}$ idem tubus quoque ſub certis circumſtantiis edere poterit hos ſonos $\frac{3k}{2AB}$; $\frac{5k}{2AB}$; $\frac{7k}{2AB}$ etc.

Scholion 2.

70. Cum ex praecedente problematae naturam tibiarum ſuperne apertarum tam dilucide explicaverimus, multo minus hic dubitare licet, quin motus oſcillatorius hic definitus rationem contineat tibiarum ſuperne

ſuperne clauſarum. Experimenta autem conſulentes omnia egregie cum hac theoria conſentire deprehendimus cum conſtet eandem tibiam, ſi ſuperne claudatur, ſonum vna octaua grauiorem eſſe edituram: deinde etiam iam obſeruatum eſt, ſi huiusmodi tibiae ſuperne clauſae certo modo inflentur, fieri poſſe vt ſonus edatur triplo vel quintuplo altior, nunquam autem duplo altior, qui ſcilicet principali foret vna octaua altior. In huiusmodi autem tibiis iam videmus aerem alternis vicibus in eas intrare iterumque expelli, qui aer expulſus et iam deſcripto motu oſcillatorio praeditus, cum externo aëre hunc motum eo facilius communicabit, in eoque propagabit, interim tamen ob hanc ipſam cauſam diſcrimen aliquod inerit inter ſonos tibiarum apertarum et clauſarum, vnde eos dignoſcere liceat. Deinde etiam mirum non eſt, quod tibiarum ſoni haud parum a materia, ex qua tibiae ſunt confectae pendeant, indeque notam quandam manifeſtam ſecum gerant. Iam enim animaduertimus materiam tuborum motum oſcillatorium plurimum impedire poſſe, et nunc addere licet, ab aëre etiam quendam motum gyratorium cum ipſo tubo communicari a quo deinceps ſonus tibiae viciſſim afficitur. At ſi grauitatem et acumen ſonorum tantum ſpectemus, ſolius longitudinis ratio eſt habenda, neque materia vel forma tubi quicquam eo conferet, dummodo ſint tubi aequaliter ampli. Cuiusmodi tamen ſonos ſint editurae tibiae inaequaliter amplae quaeſtio eſt altioris indaginis, cuius ſolutionem vix adhuc ſperare licet.

Pro-

Problema 80.

71. Si tubus aequaliter amplus in vtroque termino AA et BB fuerit clauſus, et aer in eo contentus vtcunque de ſtatu aequilibrii deturbetur, motum oſcillatorium aëris inde oriundum determinare. Tab. VII. Fig. 88.

Solutio.

Sit denſitas aëris initio in tubi loco S inducta $= Q$, naturali exiſtente $= B$ celeritas vero in plagam $AB = \Upsilon$, capiaturque $SQ = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$ et $S\Upsilon = \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, vnde vtraque ſcala denſitatum CD, et celeritatum $A\Upsilon B$ conſtruatur, quarum haec neceſſario per puncta A et B tranſire debet. Tum ſecundum praecepta data vtraque ſcala vtrinque ſuper axe producto per continuam replicationem, vti ex figura videre licet continuetur. Quo facto ſi poſt tempus quodcunque elapſum $= t$ a puncto S vtrinque capiantur interualla $ST = St = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, ex vtriusque ſcalae applicatis in punctis T et t definitur nunc aëris, qui initio fuerat ad S

I. denſitas $q = Q(1 - SQ - \frac{1}{2}TN + \frac{1}{2}TM + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$

II. celeritas $\Upsilon = \frac{1}{2}(TN - TM + tn + tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$

ac praeterea ſpatium, quo is verſus B erit promotus nempe

III. ſpatiolum $S\sigma = \frac{1}{2}TNtn - \frac{1}{2}SQTM + \frac{1}{2}SQtm$

hincque ergo ſtatus aëris in tubo ad quoduis tempus t definietur. Ponamus nunc tempus elapſum

 eſſe

eſſe $t = 2\,AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, vt puncta T et t cadant in S′ et S″ puncta ipſi S homologa, eritque tum in loco S

I. denſitas $q = Q(1 - SQ - \frac{1}{2}S\Upsilon + \frac{1}{2}SQ + \frac{1}{2}S\Upsilon + \frac{1}{2}SQ) = Q$

II. celeritas $\vartheta = \frac{1}{2}(S\Upsilon - SQ + S\Upsilon + SQ)\sqrt{\frac{2ga}{b}} = S\Upsilon\sqrt{\frac{2ga}{b}} = \Upsilon$

III. ſpatiolum $S\sigma = 0$

ita vt nunc aër in ipſum ſtatum primitiuum ſit reductus, cum elapſo tantum tempore dimidio $t = AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ſtatum fere contrarium habuiſſet. Cum igitur illo tempore duas oſcillationes abſoluiſſe ſit cenſendus, tempus ſingularum oſcillationum erit $= AB\sqrt{\frac{b}{2ga}} = \frac{AB}{k}$, denotante $k = \sqrt{\frac{2ga}{b}}$ ſpatium, per quod aër vno minuto ſecundo propagatur; vnde numerus oſcillationum ſingulis minutis ſecundis editarum erit $= \frac{k}{AB}$, qui ſimul pro menſura ſoni hoc motu producti habetur.

Coroll. 1.

72. Si tubus eſſet duplo longior $= AA'$ iisdem manentibus ſcalis, quippe quae huic tubo vtrinque clauſo conuenire poſſunt, motus oſcillatorius idem oriretur, vnde fieri poteſt, vt tubus vtrinque clauſus eundem edat ſonum, ac tubus duplo breuior quod idem valet ſi tubus triplo, vel quadruplo etc. longior acciperetur.

Coroll.

Coroll. 2.

73. Cum igitur ſonus principalis ſit $= \frac{k}{AB}$, idem tubus vtrinque clauſus, ſi prima agitatio certo quodam modo temperetur, hos quoque ſonos $\frac{2k}{AB}$, $\frac{3k}{AB}$, $\frac{4k}{AB}$ etc. edere poterit: omninoque horum tuborum eadem erit ratio ac tuborum vtrinque apertorum, dum contra ii, qui ex altera parte ſunt aperti, ex altera vero clauſi ſonos vna octaua graviores edunt.

Scholion 1.

74. Quemadmodum autem aeri huiusmodi tubo incluſo agitatio induci poſſit, haud liquet vnde etiam nulla exempla ſonorum hac ratione genitorum proferre licet: quin etiam quamuis ibi quaedam agitatio excitaretur, tamen quia tubus vndique eſt clauſus, motus oſcillatorius neque cum aere externo communicari neque ſonus exaudiri poſſet. Si enim tubi latera ſimul contremiſcant, eorum ſonus proprius potius quam aeris incluſi per aerem externum propagabitur: ſtatim autem atque ipſa tubi materia motum vibratorium concipit, aeris incluſi motus maxime turbatur, neque amplius leges per calculum inuentas ſequitur: ſi enim aeri vbi eſt magis compreſſus ipſa tubi latera aliquantillum cedant, eo debilius inde aer vicinus concitabitur, haecque praecipua cauſa eſſe videtur, cur talis aeris motus tam cito extinguatur, cum tamen ſecundum Theoriam

perennis eſſe deberet; quod non ſolum de his tubis vtrinque clauſis ſed etiam reliquis omnibus eſt intelligendum. Quomodocunque autem haec motus debilitatio ob tubi materiam eueniat inde tamen duratio ſingularum oſcillationum non afficitur, quarum tempora cum calculo ſemper conſentire deprehenduntur etſi ob illam cauſam motus oſcillationum continuo debilitetur, et mox prorſus extinguatur.

Scholion 2.

75. Quanquam autem in his tubis ſingulae oſcillationes certis temporibus abſoluuntur, atque in eodem tubo ſoni ratione grauitatis et acuminis diſcrepare non poſſunt tamen in iis ratione reliquarum qualitatum maximum diſcrimen ineſſe poteſt, a diverſa indole pulſuum in aere excitatorum oriundum. Cum enim aer in huiusmodi tubis infinitis modis de ſtatu aequilibrii deturbari poſſit, dum vel ſola denſitas in ſingulis aëris elementis alteratur, vel iis tantum motus quidam inducitur, vel vtrumque ſimul euenit, hinc maxima diuerſitas in motu ſingularum oſcillationum oriri poterit, vnde mirum videbitur quod eadem tibia inflata ſonum ſemper eiusdem indolis edat; non loquor autem hic de grauitate, quae nullam variationem patitur, ſed de ea qualitate, qua ſonos tibiarum a ſonis cordarum aliorumque inſtrumentorum diſtinguimus. Quia autem tibiae inflatione ad ſonos edendos excitantur, facile intelligitur, hinc ambas ſcalas denſitatum et celeritatum non in infinitum variari poſſe, ſed ſemper ab aëre inflato tam

tam certam condenſationem quam certum motum produci debere, ita vt hic non amplius infinita varietas locum inuenire queat: huicque cauſae qualitas illa qua ſoni tibiarum a reliquis inſtrumentis diſcrepant, ſine dubio eſt tribuenda. Vnde ſi forte quocunque modo aeri in tubis vtrinque clauſis agitatio induci poſſet, ſonus quidem ratione grauitatis et acuminis calculo foret conſentaneus, ſed a ſono tibiarum maxime differre poſſet.

CAPVT IV.

DE AGITATIONE MINIMA AERIS IN TVBIS INAEQVALITER AMPLIS.

Problema 81.

76. Dum aer quomodocunque in tubo inaequaliter amplo mouetur, eius motum ad formulas analyticas reuocare, quibus eius determinatio ad quoduis tempus contineatur.

Solutio.

Initio ſtatum aeris tanquam cognitum ſpectamus; tum igitur pro loco tubi quocunque S vocata diſtantia $AS = S$ ponamus fuiſſe denſitatem $= Q$, et celeritatem ſecundum tubi directionem $AB = \Upsilon$,

ita vt Q et Υ ſint functiones datae quantitatis S; cuius etiam functio erit amplitudo tubi in hoc loco, quae ſit $= \Omega$, perinde atque eius altitudo ſuper plano quodam horizontali fixo, quae ſit $= Z$, ſiquidem et grauitatis rationem in motu aeris habere velimus. Iam elapſo tempore $= t$ illam aeris particulam ponamus perueniſſe in s, vt ſit ſpatium A $s = s$, et tubi amplitudo $= \omega$, eiusque altitudo ſuper illo plano horizontali $= z$, quae quantitates ω et z ſunt functiones datae ipſius s, ipſa vero haec quantitas s eſt functio duarum variabilium S et t; nunc vero in hoc loco s ſit aeris denſitas $= q$, celeritas verſus B $= \Upsilon$, quae eſt $= (\frac{dt}{ds})$, et preſſio $= p$, quam per denſitatem q ita determinari nouimus, vt ſit $p = \frac{aq}{b}$; denſitas q eſt quoque functio binarum variabilium S et t. His poſitis principia ſupra ſtabilita pro hoc caſu praebent has duas aequationes:

$$q\omega(\frac{ds}{dS}) = Q\Omega \text{ et } \frac{2g\,dp}{q} = -2g\,dz - ds(\frac{dds}{dt^2}) = \frac{2ga\,dq}{bq}$$

in qua poſteriori tempus t vt conſtans ſpectatur, quae propterea ita exhiberi poteſt

$$\frac{2ga}{bq}(\frac{dq}{dS}) + 2g(\frac{dz}{dS}) + (\frac{ds}{dS})(\frac{dds}{dt^2}) = 0.$$

Ex priori autem habemus $lq = lQ + l\Omega - l\omega - l(\frac{ds}{dS})$ vnde ſolam S variabilem ſumendo colligimus:

$$\frac{1}{q}(\frac{dq}{dS}) = \frac{dQ}{Q\,dS} + \frac{d\Omega}{\Omega\,dS} - \frac{1}{\omega}(\frac{d\omega}{dS}) - \frac{(\frac{dds}{dS^2})}{(\frac{ds}{dS})}.$$

Quo

Quo valore ſubſtituto aequationem habebimus a q liberam hanc:

$$\frac{2ga}{b}\left(\frac{dQ}{Q\,dS}+\frac{d\Omega}{\Omega\,dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right)-\frac{2ga}{b\omega}\left(\frac{d\omega}{dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right)-\frac{2ga}{b}\left(\frac{dds}{dS^2}\right)$$
$$+2g\left(\frac{dz}{dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right)+\left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=0$$

vbi Q et Ω ſunt functiones datae ipſius S, quantitates vero ω et z functiones ipſius s, quae ipſa eſt functio binarum variabilium S et t, eiusque natura hinc determinari debet. Quodſi ergo ponatur $d\omega = u\,ds$ et $dz = r\,ds$, vt u et r ſint functiones ipſius s datae, aequatio noſtra hanc induet formam:

$$\frac{2ga}{b}\left(\frac{dQ}{Q\,dS}+\frac{d\Omega}{\Omega\,dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right)+2g\left(r-\frac{au}{b\omega}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right)^2-\frac{2ga}{b}\left(\frac{dds}{dS^2}\right)$$
$$+\left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=0$$

vnde qualis s ſit functio ipſarum S et s inueſtigari oportet, ea autem inuenta ſtatim cognoſcitur celeritas $v=\left(\frac{ds}{dt}\right)$, tum vero denſitas

$$q=\frac{Q\,\Omega}{\omega\left(\frac{ds}{dS}\right)},$$

ſimulque preſſio $p=\frac{aq}{b}$.

Scholion.

77. Ex hac aequatione generali, quae omnes motus, qui in aerem in tubis quibuscunque cadere poſſunt, in ſe complectitur, ſatis liquet quantopere etiamnunc ab eius ſolutione perfecta ſimus remoti, idque ob ſolum Analyſeos defectum. Cum enim functio s quae quaeritur praeter formulas differentia-

rentiales etiam in litteris ω, u et r inuoluatur, haec tanta complexio in cauſa eſt, quod generalem noſtri problematis ſolutionem nullo modo ſperare queamus. Quare vt ſupra iam obſeruauimus, omnia quae hic praeſtare licet, ad ſolos motus minimos reſtringuntur, cuiusmodi ſunt generatio et propagatio ſoni, dum interea caſus, qui alias ſimpliciſſimi videantur, veluti ſi aer in tubo comprimitur vel relaxatur, prorſus intactos relinquere cogimur. Mirum igitur eſt quod ii caſus, qui primo intuitu maxime ardui ſunt viſi, et ab Auctoribus vix ſuſcepti, nunc ſoli noſtrae inueſtigationi permittuntur, reliquis omnibus excluſis. Quocirca aequationem generalem hic inuentam ad eum caſum accommodabo, quo agitatio aeris vt minima ſpectari poteſt.

Problema 82.

78. Si aeris agitatio in tubo inaequaliter amplo excitata fuerit quam minima, aequationem invenire qua huius motus continuatio continetur.

Solutio.

Maneant omnes denominationes, vti in praecedente problemate ſunt conſtitutae, et quia ibi erat $u = \frac{d\omega}{ds}$ et $r = \frac{dz}{ds}$ reſtituantur hi valores, inſuperque breuitatis gratia ponatur $\frac{2ga}{b} = cc$ vt c denotet ſpatium, per quod ſonus vno minuto ſecundo propagatur; quo facto aequatio inuenta hanc induet formam:

$$\frac{1}{cc}\left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \left(\frac{dds}{dS^2}\right) + \frac{d\omega}{\omega dS}\left(\frac{ds}{dS}\right)^2 - \frac{d\Omega}{\omega ds}\left(\frac{ds}{dS}\right) - \frac{b\,dz}{a\,ds}\left(\frac{ds}{dS}\right)^2 - \frac{dQ}{QdS}\left(\frac{ds}{dS}\right)$$

qua

qua reſoluta porro habebitur pro tempore elapſo $= t$:

denſitas $q = \frac{Q\,\Omega}{\omega\left(\frac{ds}{dS}\right)}$; celeritas $\upsilon = \left(\frac{ds}{dt}\right)$ et preſſio $p = \frac{aq}{b}$.

Iam ponamus $s = S + v$ vt v ſit eiusmodi functio ipſarum S et t quae euaneſcat poſito tempore $t = 0$, quandoquidem tum fieri debet $s = S$; $q = Q$; $\omega = \Omega$ et $\upsilon = \Upsilon$, hicque ſpectamus v vt quantitatem valde paruam prae S, vel ſaltem talem vt $\left(\frac{dv}{ds}\right)$ prae vnitate negligi queat. Cum igitur ſit

$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right)$; $\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dt^2}\right)$; $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \left(\frac{dv}{dS}\right)$ et $\left(\frac{dds}{dS^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dS^2}\right)$;

vbi in noſtra aequatione occurrit $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ eius loco vnitatem ſcribere licet praeterquam in duobus terminis

$$\frac{d\omega}{\omega\, ds}\left(\frac{ds}{dS}\right)^2 - \frac{d\Omega}{\Omega\, dS}\left(\frac{ds}{dS}\right),$$

quia hic ob differentiam inter s et S minimam fere eſt

$$\frac{d\omega}{\omega\, ds} = \frac{d\Omega}{\Omega\, dS},$$

ideoque prae differentia non amplius particula $\left(\frac{dv}{dS}\right)$ vt euaneſcens ſpectari poteſt. Qua circumſtantia obſeruata habebimus

$$\frac{1}{cc}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dS^2}\right) + \frac{d\omega}{\omega\, ds} - \frac{d\Omega}{\Omega\, dS} + \frac{d\Omega}{\Omega\, dS}\left(\frac{dv}{dS}\right) - \frac{b\, dz}{a\, ds} - \frac{dQ}{Q\, ds}$$

vbi cum puncta S et s ſibi ſint proxima, loco $\frac{dz}{ds}$ ſcribere licet $\frac{dZ}{dS}$ functionem ipſius S tantum. Deinde ob eandem rationem quia formula $\frac{d\omega}{\omega\, ds}$ naſci-

tur ex formula $\frac{d\Omega}{\Omega dS}$ ſi hic loco S ſcribatur S + v, erit

$$\frac{d\omega}{\omega dS} = \frac{d\Omega}{\Omega dS} + \frac{v}{dS} d.\frac{d\Omega}{\Omega dS}.$$

Ponamus ergo breuitatis gratia $\frac{d\Omega}{\Omega dS} = U$, quae erit functio data ipſius S, vnde fit amplitudo $\Omega = Ae^{\int U dS}$: fietque noſtra aequatio:

$$\frac{1}{cc}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dS^2}\right) + U\left(\frac{dv}{dS}\right) + \frac{v\,dU}{dS} - \frac{b\,dZ}{a\,dS} - \frac{dQ}{Q\,dS}$$

qua reſoluta erit pro motus determinatione:

$$q = \frac{Q\,\Omega}{\omega\left(1+\left(\frac{dv}{dS}\right)\right)} = \frac{Q}{(1+Uv)\left(1+\left(\frac{dv}{dS}\right)\right)} = Q\left(1-Uv-\left(\frac{dv}{dS}\right)\right)$$

quia eſt $\omega = \Omega + \frac{v\,d\Omega}{dS} = A\,e^{\int U dS}(1+Uv)$

deinde celeritas $u = \left(\frac{dv}{dt}\right)$ et preſſio $p = \frac{aq}{q}$.

Coroll. 1.

79. Totum ergo negotium huc redit vt ex aequatione differentiali ſecundi gradus inuenta inueſtigetur, qualis functio ſit quantitas v binarum variabilium S et t, vbi quidem obſeruo binos terminos poſtremos $-\frac{b\,dZ}{a\,dS} - \frac{dQ}{Q\,dS}$ reſolutionem non impedire quoniam functionem ſolius variabilis S continent.

Coroll. 2.

80. Conditiones autem, ſub quibus aequationis inuentae integrale completum eruere licet ope methodorum quidem adhuc cognitarum, ab indole functionis U, qua ea per variabilem S definitur pendent.

Pro

Pro eiusque natura fieri poteſt, vt integratio modo ſuccedat modo calculi vires ſuperet.

Scholion.

81. Hic igitur confugiendum eſt ad ea analyſeos ſublimioris, quae circa functiones duarum variabilium verſatur artificia, quibus huiusmodi aequationes

$$\frac{1}{cc}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dS^2}\right) + U\left(\frac{dv}{dS}\right) + vT$$

tractare docui; vbi in eos caſus functionum U et T, quae ſolam variabilem S inuoluere aſſumuntur, inquiri oportet quibus integrale completum exhibere licet. Ante omnia autem hic obſeruari oportet, quoties haec integratio ſuccedit per methodos quidem cognitas, integrale ſemper huiusmodi forma exprimi vt ſit

$$v = Lf:(S \pm ct) + Mf':(S \pm ct) + Nf'':(S \pm ct) \text{ etc.}$$

vbi circa haec functionum ſigna tenendum eſt; ſi fuerit

$$f:u = V \text{ eſſe } f':u = \frac{dV}{du};\ f'':u = \frac{ddV}{du^2}, \text{ etc.}$$

Hinc patet infinitas ſolutiones locum habere poſſe, prout huius formae progreſſio vlterius continuetur. Primam ergo ſolutionem ſeu primos integrabilitatis caſus ex ſolo primo termino huius progreſſionis inveſtigabo, deinde duos eius terminos in ſubſidium vocando ſecundos integrabilitatis caſus eliciam, ſicque porro ad altiores aſcendere licebit, plures continuo terminos accipiendo.

Problema 83.

82. Inuenire rationem amplitudinis tubi, in quo aer minimas peragit agitationes, vt motus determinatio per primam ſoluendi methodum ſuccedat.

Solutio.

Cum poſita tubi amplitudine $\Omega = A\, e^{\int U dS}$ haec aequatio integrari debeat:

$$\frac{1}{cc}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dS^2}\right) + U\left(\frac{dv}{dS}\right) + \frac{v\,dU}{dS} - \frac{b\,dZ}{a\,dS} - \frac{dQ}{Q\,dS}$$

ſtatuamus $v = Lf:(S+ct) + O$ vbi L et O tantum ſint functiones ipſius S, et facta ſubſtitutione obtinebimus:

$$\begin{array}{ll}
\left(\frac{ddv}{dS^2}\right) = & Lf'':(S+ct) + \frac{2dL}{dS}f':(S+ct) + \frac{ddL}{dS^2}f:(S+ct) + \frac{ddO}{dS^2} \\
U\left(\frac{dv}{dS}\right) = & ULf':(S+ct) + \frac{UdL}{dS}f:(S+ct) + \frac{UdO}{dS} \\
\frac{v\,dU}{dS} = & + \frac{LdU}{dS}f:(S+ct) + \frac{OdU}{dS} \\
-\frac{b\,dZ}{a\,dS} - \frac{dQ}{Q\,dS} & -\frac{b\,dZ}{a\,dS} - \frac{dQ}{Q\,dS}
\end{array}$$

quae iunctim ſumta ipſi $\frac{1}{cc}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = Lf'':(S+ct)$ aequari oportet: vnde naſcuntur hae aequationes:

I. $\frac{2dL}{dS} + LU = 0$

II. $\frac{ddL}{dS^2} + \frac{UdL + LdU}{dS} = 0$

III. $\frac{ddO}{dS^2} + \frac{UdO + OdU}{dS} - \frac{bdZ}{adS} - \frac{dQ}{QdS} = 0$

quarum ſecunda integrata dat $\frac{dL}{dS} + LU = C$, quae cum prima collata praebet $-\frac{dL}{dS} = C$, hincque $L = \alpha S + \beta$ et $U = \frac{-2\alpha}{\alpha S + \beta} = \frac{d\Omega}{\Omega\, dS}$. Quare cum

ſit

ſit $\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{-2\alpha dS}{\alpha S + \beta}$ fiet amplitudo tubi $\Omega = \frac{ff}{(\alpha S + \beta)^2}$, ſolutionem ope primae methodi admittens. Tertia vero aequatio integrata dat:

$$\frac{dO}{dS} + UO - \frac{b}{a}Z - lQ = C \text{ ſeu ob } U = \frac{-2\alpha}{\alpha S + \beta}$$

$$dO - \frac{2\alpha O dS}{\alpha S + \beta} - \frac{b}{a}Z dS - dS\, lQ = C dS$$

quae per $(\alpha S + \beta)^2$ diuiſa et integrata producit

$$\frac{O}{(\alpha S + \beta)^2} = \int \frac{dS(\frac{b}{a}Z + lQ + C)}{(\alpha S + \beta)^2}.$$

Quare ſi amplitudo tubi ita ſit variabilis, vt longitudini $AS = S$ reſpondeat amplitudo $\Omega = \frac{ff}{(\alpha S + \beta)^2}$, tum aequationis motum determinantis integrale completum erit

$$v = (\alpha S + \beta)^2 \int \frac{dS(C + \frac{b}{a}Z + lQ)}{(\alpha S + \beta)^2} + (\alpha S + \beta)\Gamma:(S + ct)$$
$$+ (\alpha S + \beta)\Delta:(S - ct)$$

quandoquidem functionem aſſumtam $f:(S + ct)$ geminare licet introducendo tam $-c$ quam $+c$.

Coroll. 1.

83. In hac ſolutione ſtatim continetur caſus tuborum aeque amplorum conſtantes ita definiendo vt ſit $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Haec autem ſolutio multo latius patet, cum eius ope agitationes aeris in tubis eiusmodi inaequaliter amplis quoque definiri queant, quorum amplitudo in hac formula continetur $\Omega = \frac{ff}{(\alpha S + \beta)^2}$.

Coroll. 2.

84. Inuenta autem hac functione v elapſo tempore t aer qui initio erat ad S translatus erit per interuallum $Ss = v$ tum vero eius denſitas ob $U = \frac{-2\alpha}{\alpha S + \beta}$ erit

$$q = Q\left(+\frac{2\alpha v}{\alpha S+\beta} - \left(\frac{dv}{dS}\right)\right) \text{ et celeritas } u = \left(\frac{dv}{dt}\right).$$

Coroll. 3.

85. Cum autem differentiando ſit:

$$\left(\frac{dv}{dS}\right) = 2\alpha(\alpha S+\beta)\int\frac{dS(C+\frac{b}{a}Z+lQ)}{(\alpha S+\beta)^2} + C+\frac{b}{a}Z+lQ+\alpha\Gamma:(S+ct)+\alpha\Delta:(S-ct)$$
$$+(\alpha S+\beta)\Gamma':(S+ct)+(\alpha S+\beta)\Delta':(S-ct)$$

habebitur pro denſitate:

$$\frac{q}{Q} = 1 - C - \frac{b}{a}Z - lQ + \alpha\Gamma:(S+ct) + \alpha\Delta:(S-ct)$$
$$-(\alpha S+\beta)\Gamma':(S+ct) - (\alpha S+\beta)\Delta':(S-ct)$$

et pro celeritate:

$$u = c(\alpha S+\beta)\Gamma':(S+ct) - c(\alpha S+\beta)\Delta':(S-ct).$$

Scholion.

85. Si tubos, ad quos haec ſolutio eſt accommodata, rotundos ſtatuamus, vt omnes ſectiones ad eius directionem normaliter factae ſint circuli, eorum figura eſt conoidica hyperbolica conuerſione hyper-
Tab. VII. bolae aequilaterae KCM circa alteram aſſymtotam
Fig. 80. IB nata. Cum enim in hac hyperbola ſit SM. $IS = aa$, erit amplitudo in $S = \pi SM^2 = \frac{\pi aa}{IS^2}$, ſumto

ſumto ergo interuallo $IA = \frac{\beta}{\alpha}$, et poſito $AS = S$ ob $IS = \frac{\alpha S + \beta}{\alpha}$, fiet amplitudo $\Omega = \frac{\pi \alpha \alpha a a}{(\alpha S + \beta)^2}$, ideoque $ff = \pi \alpha \alpha a a$. Quoties ergo tubus habuerit huiusmodi figuram conoidicam hyperbolicam, aeris agitationes in huiusmodi tubis, dummodo ſint minimae, perinde definiri poterunt, atque in tubis aequaliter amplis. Interim tamen ipſa motus determinatio aliquanto erit operoſior. Ceterum hic obſeruari conuenit aeris grauitatem, quam in ſuperioribus capitibus neglexîmus, inueſtigationem plane non turbare: id quod etiam de aliis viribus, quae forte aerem ſollicitarent eſt tenendum.

Problema 84.

86. Inueſtigare rationem qua tubi amplitudo debet eſſe comparata vt aequationis differentiodifferentialis integrale completum per ſecundam formam exhiberi poſſit.

Solutio.

Hic ſcilicet quaeritur indoles functionis U a ſola variabili S pendentis, vt aequationis noſtrae integrale completum huiusmodi forma exprimi queat:

$$v = O + Mf' : (S + ct) + Lf : (S + ct)$$

vbi L, M, O ſint functiones ſolius variabilis S. Faciamus ergo ſubſtitutionem in noſtra aequatione, ac reperiemus:

o =

$$\begin{array}{llll}
0=\frac{ddO}{dS^2}+Mf''':(S+ct) & +\frac{2dM}{dS}f'':(S+ct) & +\frac{ddM}{dS^2}f':(S+ct) & \\
+\frac{UdO}{dS} & +L & +\frac{2dL}{dS} & +\frac{ddL}{dS^2}f:(S+ct) \\
+\frac{OdU}{dS} & +UM & +\frac{UdM}{dS} & \\
-\frac{bdZ}{adS} & & +UL & +\frac{UdL}{dS} \\
-\frac{dQ}{QdS}-Mf''':(S+ct) & -Lf'':(S+ct) & +\frac{MdU}{dS} & +\frac{LdU}{dS}
\end{array}$$

cuius ſingula membra, quatenus diuerſas functiones complectuntur ſeorſim ad nihilum redigi oportet: ex quo ſequentes quatuor aequationes naſcuntur.

$$\text{I. } \frac{2dM}{dS}+UM=0$$

$$\text{II. } \frac{ddM}{dS^2}+\frac{2dL}{dS}+\frac{UdM+MdU}{dS}+UL=0$$

$$\text{III. } \frac{ddL}{dS^2}+\frac{UdL+LdU}{dS}=0$$

$$\text{IV. } \frac{ddO}{dS}+UdO+OdU-\frac{b}{a}dZ-\frac{dQ}{Q}=0$$

Tertia integrata dat $\frac{dL}{dS}+UL=A$, quae cum prima combinata eliminando U praebet $MdL-2LdM=AMdS$, vnde colligitur $L=AMM\int\frac{dS}{MM}$, et $U=-\frac{2dM}{MdS}$. His valoribus in ſecunda aequatione ſubſtitutis peruenitur ad hanc aequationem,

$$-\frac{ddM}{dS^2}+2A+\frac{2AMdM}{dS}\int\frac{dS}{MM}=0$$

Ad hanc reſoluendam ſit $\int\frac{dS}{MM}=R$, hincque $dS=MMdR$, et quia eſt $\frac{ddM}{dS}=d.\frac{dM}{dS}=d.\frac{dM}{MMdR}$, illa aequatio per dS multiplicata praebet

$$-d.\frac{dM}{MMdR}+2AMMdR+2AMRdM=0$$

qua

qua reſoluta habebitur $dS = MMdR$; $L = AMMR$ et $U = -\frac{2dM}{M^3 dR}$. Verum iſta aequatio per R multiplicata integrabilis redditur cum ſit

$$\int R\, d\, \frac{dM}{MMdR} = \frac{RdM}{MMdR} + \frac{1}{M},$$ ideoque habebimus:

$$\frac{RdM}{MMdR} + \frac{1}{M} = AMMRR + B = \frac{MdR + RdM}{MMdR}$$

Ponatur denique $MR = x$, ſeu $M = \frac{x}{R}$ erit $Axx + B = \frac{RRdx}{xxdR}$ hincque $\frac{dR}{RR} = \frac{dx}{xx(Axx+B)}$ ſeu $\frac{BdR}{RR} = \frac{dx}{xx} - \frac{Adx}{Axx+B}$; ideoque $\frac{B}{R} = \frac{1}{x} + \int \frac{Adx}{Axx+B}$.

vnde R datur per x, tum ob $M = \frac{x}{R}$ reliquae quantitates omnes per x dabuntur: fit autem $dS = \frac{xxdR}{RR} = \frac{dx}{Axx+B}$ et $UdS = \frac{d\Omega}{\Omega} = -\frac{2dM}{M}$ ita vt ſit amplitudo $\Omega = \frac{C}{MM} = \frac{CRR}{xx}$. Euoluamus hinc caſus quibus amplitudo Ω per variabilem S algebraice definitur, quod fit ſi conſtans $B = 0$, tum enim erit $\frac{dR}{RR} = \frac{dx}{Ax^4}$, ideoque $\frac{1}{R} = \frac{1+Dx^3}{3Ax^3}$, et $R = \frac{3Ax^3}{1+Dx^3}$, atque $M = \frac{1+Dx^3}{3Axx}$. Cum autem ſit $dS = \frac{dx}{Axx}$ erit $\frac{1}{x} = -AS - E$, ſeu $x = -\frac{1}{AS+E}$ hincque

$$M = \frac{(AS+E)^3 - D}{3A(AS+E)}, \text{ et } R = -\frac{3A}{(AS+E)^3 - D};$$

vnde porro colligimus

$$\Omega = \frac{9AAC(AS+E)^2}{((AS+E)^3 - D)^2}, \text{ et } L = -\frac{(AS+E)^3 + D}{3(AS+E)^2}$$

Denique pro quantitate O obtinemus:

$$\frac{dO}{dS} + UO - \frac{b}{a}Z - lQ + lF = 0 \text{ ſeu}$$

$$dO + \frac{Od\Omega}{\Omega} - \frac{b}{a}ZdS - dS\, l\frac{Q}{F} = 0. \text{ Ergo}$$

$$O = \frac{1}{\Omega}\int \Omega\, dS\left(\frac{b}{a}Z + l\frac{Q}{F}\right)$$

Immutemus parumper conſtantes, et quando amplitudo tubi Ω pro abſciſſa $AS = S$ ita fuerit comparata, vt ſit $\Omega = \frac{ff(\alpha S + \beta)^2}{((\alpha S + \beta)^3 - \gamma)^2}$, tum ſumtis

$$O = \frac{1}{\Omega}\int \Omega\, dS \left(\frac{b}{a} Z + l \frac{Q}{B}\right)$$

$$M = \frac{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma}{3\alpha(\alpha S + \beta)} \text{ et } L = -\frac{(\alpha S + \beta)^3 + \gamma}{3(\alpha S + \beta)^2}$$

erit noſtrae aequationis integrale completum,

$$v = O + M\Gamma' : (S + ct) + L\Gamma : (S + ct)$$
$$+ M\Delta' : (S - ct) + L\Delta : (S - ct)$$

vnde porro definitur denſitas $q = Q\left(1 - \frac{v\, d\Omega}{\Omega\, dS} - \left(\frac{dv}{dS}\right)\right)$ et celeritas $u = \left(\frac{dv}{dt}\right)$.

Coroll. 1.

87. Hic primum obſeruandum eſt quantitates pro L et M inuentas per quantitatem quamcunque conſtantem multiplicari poſſe, quam functiones indefinitae complecti ſunt cenſendae, hinc ſumi poterit

$$M = \frac{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma}{\alpha\delta(\alpha S + \beta)} \text{ et } L = -\frac{(\alpha S + \beta)^3 + \gamma}{\delta(\alpha S + \beta)^2}$$

quod tenendum eſt ſi forte illi valores fiant infiniti.

Coroll. 2.

88. Si enim capiatur $\gamma = \infty$, et $f = n\gamma$, vt amplitudo fiat $\Omega = nn(\alpha S + \beta)^2$, ſumatur quoque $\delta = \gamma$, eritque

$$M = \frac{-1}{\alpha(\alpha S + \beta)} \text{ et } L = \frac{1}{(\alpha S + \beta)^2}.$$

Hoc

Hoc autem caſu tubi habebuntur conici vel pyramidici, in quibus ergo pariter agitationes aeris minimas definire licebit.

Coroll. 3.

89. Si ſumatur $\gamma = 0$, tubus ita erit formatus vt ſit $\Omega = \frac{ff}{(\alpha S + \beta)^4}$ ſeu amplitudines erunt reciproce vt biquadrata abſciſſarum: tum autem fit

$M = \frac{1}{\alpha}(\alpha S + \beta)^2$ et $L = -(\alpha S + \beta)$.

Coroll. 4.

90. In genere autem haec ſolutio ad eiusmodi tubos conoidicos applicari poteſt qui oriuntur ex conuerſione huiusmodi curuae hyperbolicae circa axem I B, pro qua poſita abſciſſa $AS = x$, et applicata $SM = v$, ſit $y = \frac{a^2 x}{x^3 + b^3}$: quae curua axem in A ſecans duas habet aſymtotas G H et K L inter ſe normales. Tab. VII. Fig. 90.

Scholion 1.

91. Si etiam figuras tubi transcendentes cognoſcere velimus faciamus $B = A\,mm$ et $A = \frac{\alpha}{m}$ et aequatio $dS = \frac{dx}{Axx + B}$ ſeu $\alpha\, dS = \frac{m\, dx}{xx + mm}$ dabit $x = m$ tang. $(\alpha S + \beta)$, vnde porro colligitur $\frac{\alpha mm}{R} = \alpha S + \gamma + \cot.(\alpha S + \beta)$ ſeu $R = \frac{\alpha mm}{\alpha S + \gamma + \cot.(\alpha S + \beta)}$ hincque

$M = \frac{1 + (\alpha S + \gamma)\,\mathrm{tang.}(\alpha S + \beta)}{\alpha m}$ et $L = \frac{1 + (\alpha S + \gamma)\,\mathrm{tang.}(\alpha S + \beta)}{m\,\cot.(\alpha S + \beta)}$

 Deinde

Deinde fit amplitudo $\Omega = \frac{C}{(1 + (\alpha S + \gamma)\,tang.\,(\alpha S + \beta))^2}$,
quantitas vero O hinc definitur vt ante

$$O = \frac{1}{\Omega} \int \Omega\, dS \left(\frac{b}{a} Z + l \frac{\Omega}{B}\right).$$

Ex his autem formis colligimus methodum aequationes primum erutas multo facilius reſoluendi. Cum enim prima det $U = -\frac{2\,dM}{M\,dS}$, tertia vero integrata $\frac{dL}{dS} + UL = A$, erit $dL - \frac{2\,L\,dM}{M} = A\,dS$, ponamus $L = My$, fietque $M\,dy - y\,dM = A\,dS$. Nunc ſecunda quod fieri poteſt integrata praebet

$$\frac{dM}{dS} + 2L + UM + \int UL\,dS = 0$$

quae ob

$$UM = -\frac{2\,dM}{dS} \text{ et } \int UL\,dS = -2\int \frac{L\,dM}{M} = -2\int y\,dM$$

tranſit in:

$$\frac{dM}{dS} + 2My - \frac{2\,dM}{dS} - 2\int y\,dM = 0,$$

quae contrahitur in hanc $2\int M\,dy - \frac{dM}{dS} = 0$. Ex illa autem fit

$$2M\,dy = A\,dS + y\,dM + M\,dy \text{ ita vt ſit}$$

$$2\int M\,dy = AS + My + B = \frac{dM}{dS}$$

vnde cum parum colligere liceat, conſideremus has duas aequationes:

$$M\,dy - y\,dM = A\,dS \text{ et } 2\int M\,dy = \frac{dM}{dS}$$

quas ambas differentiemus ſumto elemento dS conſtante

$$M\,ddy - y\,ddM = 0 \text{ et } 2M\,dy = \frac{ddM}{dS}$$

vnde

vnde fit

$$\frac{d\,l\,M}{M} = \frac{d\,d\,y}{y} = 2\,dy\,dS \text{ ſeu } d\,d\,y = 2\,y\,dy\,dS$$

cuius integrale eſt $dy = dS\,(yy + mm)$, hincque porro Ang. tang. $\frac{y}{m} = mS + n$ et conuertendo $y = m$ tang. $(mS + n)$. Iam ex aequatione

$$\frac{M\,dy - y\,dM}{yy} = \frac{A\,dS}{yy} = \frac{A\,dS}{mm\,tang.\,(mS + n)^2} \text{ fit}$$

$$-\frac{M}{y} = -\frac{M}{m\,tang.\,(mS + n)} = \frac{A}{mm}\int\frac{dS\,coſ.\,(mS + n)^2}{ſin.\,(mS + n)^2}$$

$$= \frac{A}{mm}\int\frac{dS}{ſin.\,(mS + n)^2} - \frac{AS}{mm} = -\frac{A}{m^3\,tang.\,(mS + n)} - \frac{AS}{mm} - \frac{Ak}{m^2}$$

vnde fit

$$M = \frac{A}{mm}\,(1 + (mS + k)\,\text{tang.}\,(mS + n)),$$

hincque porro

$$L = \frac{A\,(1 + (mS + k)\,tang.\,(mS + n))}{m\,coſ.\,(mS + n)}$$

ac denique prodit amplitudo $\Omega = \frac{Conſt.}{MM}$ ſeu

$$\Omega = \frac{ff}{(1 + (mS + k)\,tang.\,(mS + n))^2}.$$

Scholion 2.

92. Adhuc facilius hanc reſolutionem inſtituere licet hoc modo: cum ex prima aequatione ſit $U = -\frac{2\,l\,M}{M\,dS}$ ponatur ſtatim $L = M\,y$, eritque

$$M\,U = -\frac{2\,dM}{dS} \text{ et } L\,U = -\frac{2\,y\,dM}{dS},$$

ex quo ſecunda aequatio fiet

$$\frac{d\,l\,M}{dS} + 2\,d.\,My - 2\,d.\,\frac{dM}{dS} - 2\,y\,dM = 0 \text{ ſeu}$$

$$-\frac{d\,l\,M}{dS} + 2\,M\,dy = 0 \text{ ſeu } \frac{ddM}{M} = 2\,dy\,dS$$

 ſimili

ſimili modo tertia abit in hanc formam:

$$\frac{dd.My}{dS} - 2d.\frac{ydM}{dS} = 0.$$

factaque euolutione

$$Mddy + 2dMdy + yddM - 2dydM - 2yddM = 0$$

hoc eſt

$$Mddy - yddM = 0 \text{ ſeu } \frac{ddM}{M} = \frac{ddy}{y}$$

Ex his coniunctis fit vt ante $ddy = 2ydydS$. Quod ſi hinc ſtatim tubi formas algebraicas elicere velimus ſumatur ſuperior conſtans $m = 0$, vt ſit $dy = yydS$ ideoque $\frac{1}{y} = -S - \frac{\beta}{\alpha}$, ſeu $y = \frac{-\alpha}{\alpha S + \beta}$. Tum aequatio $Mdy - ydM = AdS$ dat

$$-\frac{M}{y} = \frac{A}{\alpha\alpha}\int dS(\alpha S + \beta)^2 = \frac{A}{3\alpha^3}((\alpha S + \beta)^3 - \gamma),$$

ideoque

$$M = \frac{A((\alpha S + \beta)^3 - \gamma)}{3\alpha\alpha(\alpha S + \beta)} \text{ et } L = -\frac{A((\alpha S + \beta)^3 - \gamma)}{3\alpha(\alpha S + \beta)^2},$$

ac denique amplitudo $\Omega = \frac{C(\alpha S + \beta)^2}{((\alpha S + \beta)^3 - \gamma)^2}$ prorſus vt ante.

Scholion 3.

93. Praeter hos duos caſus autem, quibus forma tubi vel eſt algebraica, vel a circulo pendet, tertium non omitti conuenit, quo ea per quantitates exponentiales determinatur. Pro eo autem aequationis $ddy = 2ydydS$ integrale ſumitur $dy = dS(yy - mm)$ vnde fit $2mS + 2n = l\frac{y - m}{y + m}$ vnde fit

$$y = \frac{1 + e^{2mS + 2n}}{1 - e^{2mS + 2n}} m,$$

tum

tum vero porro

$$-\frac{M}{y}=\frac{A}{mm}\int\frac{dS(1-e^{2mS+2n})^2}{(1+e^{2mS+2n})^2}=\frac{A}{m^3}\cdot\frac{e^{2mS+2n}(mS+k-1)+mS+k+1}{1+e^{2mS+2n}}$$

ideoque

$$M=-\frac{A}{mm}\cdot\frac{e^{2mS+2n}(mS+k-1)+mS+k+1}{1-e^{2mS+2n}}$$

et

$$L=-\frac{A}{m}\cdot\frac{e^{2mS+2n}(mS+k-1)+mS+k+1}{(1-e^{2mS+2n})^2}(1+e^{2mS+2n})$$

atque amplitudo

$$\Omega=\frac{C(1-e^{2mS+2n})^2}{(e^{2mS+2n}(mS+k-1)+mS+k+1)^2}.$$

Certum eſt ex hoc caſu perinde atque ex priori a circulo pendente caſum algebraicum prodire debere, ſi ſtatuatur $m=0$ quae tamen euolutio minus eſt obuia, et haud exiguam induſtriam Analyſtae poſtulat.

Problema 85.

92. Inueſtigare caſus pro tubi amplitudine, vt aequatio differentio-differentialis inuenta per operationes tertii ordinis integrari queat, vel eius integrale completum per tertiam formam ſupra explicatam exhiberi queat.

Solutio.

Hoc ergo caſu integrale quaeſitum talem formam habere debebit:

$$v=O+Nf'':(S+ct)+Mf':(S+ct)+Lf:(S+ct)$$

et

et quia iam patet quantitatem O vt ante definitum iri, tantum diuerſas functionum ſpecies notemus:

$f^{IIII}:(S+ct)$	$f^{III}:(S+ct)$	$f^{II}:(S+ct)$	$f^{I}:(S+ct)$	$f:(S+ct)$
$+N$	$+\frac{2dN}{dS}$	$+\frac{ddN}{dS^2}$		
	$+M$	$+\frac{2dM}{dS}$	$+\frac{ddM}{dS^2}$	
		$+L$	$+\frac{2dL}{dS}$	$+\frac{ddL}{dS^2}$
	$+UN$	$+\frac{UdN}{dS}$		
		$+UM$	$+\frac{UdM}{dS}$	
			$+UL$	$+\frac{UdL}{dS}$
		$+\frac{NdU}{dS}$	$+\frac{MdU}{dS}$	$+\frac{LdU}{dS}$
$-N$	$-M$	$-L$		

vnde deducimus quatuor ſequentes aequationes:

$$\text{I.}\quad \frac{2dN}{dS}+UN=0$$

$$\text{II.}\quad \frac{ddN}{dS^2}+\frac{2dM}{dS}+\frac{UdN+NdU}{dS}+UM=0$$

$$\text{III.}\quad \frac{ddM}{dS^2}+\frac{2dL}{dS}+\frac{UdM+MdU}{dS}+UL=0$$

$$\text{IV.}\quad \frac{ddL}{dS^2}+\frac{UdL+LdU}{dS}=0.$$

Cum nunc ex prima ſit $U=\frac{-2dN}{NdS}$, ponamus $M=Ny$ et $L=Nz$, vt fiat

$$UN=\frac{-2dN}{dS};\ UM=\frac{-2ydN}{dS};\ \text{et}\ UL=\frac{-2zdN}{dS};$$

quibus valoribus ſubſtituendis aequatio II. fit

$$\frac{ddN}{dS^2}+\frac{2Ndy+2ydN}{dS}-\frac{2ddN}{dS^2}-\frac{2ydN}{dS}=0$$

quae contrahitur in hanc formam:

$$\text{II.}\quad \frac{-ddN}{dS}+2Ndy=0$$

Tertia

Tertia aequatio vero hinc euadit:

$$\frac{Nddy+2dNdy+yddN}{dS^2}+\frac{2Ndz+2zdN}{dS}-\frac{2yddN-2dydN}{dS^2}-\frac{2zdN}{dS}=0$$

quae contrahitur in hanc formam:

III. $\frac{Nddy-yddN}{dS}+2Ndz=0.$

Quarta denique ita euoluitur:

$$\frac{Nddz+2dNdz+zddN}{dS^2}-\frac{2zddN-2dzdN}{dS^2}=0$$

quae ergo praebet hanc formam:

IV. $\frac{Nddz-zddN}{dS}=0.$

Ex his triplici modo fit:

$$\frac{ddN}{N}=2dydS=\frac{ddy+2dzdS}{y}=\frac{ddz}{z}$$

vnde hae duae aequationes reſoluendae proponuntur:

$$2ydydS=ddy+2dzdS \text{ et } yddz-zddy=2zdzdS$$

quarum poſterior integrata ſtatim dat

$$ydz-zdy=dS(zz+A)$$

prior vero pariter integrata praebet:

$$dy+2zdS=dS(yy+B)$$

ſeu $dy=dS(yy-2z+B)$.

Iam illa per hanc diuiſa ſuppeditat hanc aequationem ab elemento dS liberam

$$\frac{ydz-zdy}{dy}=\frac{zz+A}{yy-2z+B}$$

ſit $z=uy$ et haec aequatio fit

$$\frac{yydu}{dy}=\frac{uuyy+A}{yy-2uy+B}$$

ſeu $y^4du-2uy^3du+Byydu-uuyydy-Ady=0.$

Neceſſitas hic vrget, vt faciamus $A = 0$ et $B = 0$; quo facto habebimus:

$$yy\,du - 2uy\,du - uu\,dy = 0 \quad \text{ſeu} \quad yy\,du = d.\,uuy$$

diuidamus per $u^4 y^2$ erit $\frac{du}{u^4} = \frac{d.\,uuy}{u^4 yy}$, eiusque integrale:

$$\frac{1}{3u^3} = \frac{1}{uuy} - \frac{1}{3m^3} \quad \text{ſeu} \quad y = \frac{3m^3 u}{m^3 + u^3} \quad \text{et} \quad z = \frac{3m^3 uu}{m^3 + u^3},$$

vnde fit

$$dS = \frac{dy}{yy - 2uy} = \frac{y\,dz - z\,dy}{zz}, \text{ ſiue}$$

$$dS = \frac{du}{uu} = -d.\,\frac{y}{z}, \text{ ita vt ſit } \frac{1}{u} = -S - \frac{\beta}{\alpha} \text{ et } u = \frac{-\alpha}{\alpha S + \beta}.$$

Ergo iam per S habebimus hos valores:

$$y = \frac{-3\alpha m^3(\alpha S + \beta)^2}{m^3(\alpha S + \beta)^3 - \alpha^3} \quad \text{et} \quad z = \frac{3\alpha^2 m^3(\alpha S + \beta)}{m^3(\alpha S + \beta)^3 - \alpha^3}.$$

Ponamus breuitatis gratia $\frac{\alpha^3}{m^3} = \gamma^3$ vt fiat

$$y = \frac{-3\alpha(\alpha S + \beta)^2}{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma^3} \quad \text{et} \quad z = \frac{3\alpha\alpha(\alpha S + \beta)}{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma^3}.$$

Nunc porro ex aequatione IV colligimus:

$$N\,dz - z\,dN = A\,dS = \frac{A\,du}{uu}$$

quae ob $z = \frac{3\alpha^3 uu}{\alpha^3 + \gamma^3 u^3}$ diuiſa per zz dat

$$-d.\,\frac{N}{z} = \frac{B\,du}{u^6}(\alpha^3 + \gamma^3 u^3)^2 \text{ et integrando}$$

$$-\frac{N}{z} = C + B\left(\gamma^6 u - \frac{\alpha^3\gamma^3}{u^2} - \frac{\alpha^6}{5u^5}\right)$$

hinc $N = \frac{Bz}{5u^5}(\alpha^6 + 5\alpha^3\gamma^3 u^3 - 5\gamma^6 u^6) - Cz$ et euoluendo

$$N = \frac{A(\alpha S + \beta)^6 - 5A\gamma^3(\alpha S + \beta)^3 - 5A\gamma^6 + B(\alpha S + \beta)}{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma^3}$$

mutatis ſcilicet conſtantibus, vnde ſtatim definitur amplitudo tubi $\Omega = \frac{C}{NN}$, tum vero erit

$$M = \frac{-3\alpha(\alpha S + \beta)^2}{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma^3}N \quad \text{et} \quad L = \frac{3\alpha\alpha(\alpha S + \beta)}{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma^3}N.$$

Pro

Pro quantitate autem O vt ante eſt

$$O = \frac{1}{\Omega} \int \Omega\, dS \left(\frac{b}{a} Z + l \frac{\Omega}{B}\right).$$

Quoties ergo amplitudo Ω hoc modo definitur, ſolutio completa noſtri problematis ita ſe habebit vt ſit:

$$v = O + N\Gamma'': (S+ct) + M\Gamma': (S+ct) + L\Gamma: (S+ct)$$
$$+ N\Delta'': (S-ct) + M\Delta': (S-ct) + L\Delta: (S-ct).$$

Deinde vero eſt denſitas $q = Q\left(1 - \frac{v\, d\Omega}{\Omega\, dS} - \left(\frac{dv}{ds}\right)\right)$ et celeritas $u = \left(\frac{dv}{dt}\right)$.

Coroll. 1.

95. Determinatio haec amplitudinis tubi reſolutionem propoſitam admittens duplici modo eſt particularis, dum duas conſtantes arbitrarias in aequatione inter y et z inuenta nihilo aequales poſuimus; interim tamen forma pro Ω eruta plures adhuc conſtantes arbitrarias complectitur, ideoque latius patet quam caſus praecedens in omni extenſione acceptus.

Coroll. 2.

96. Caſus ſimpliciores in hac ſolutione contenti oriuntur ſi fiat $\gamma = 0$, tum enim erit:

$$N = \frac{A(\alpha S + \beta)^6 + B(\alpha S + \beta)}{(\alpha S + \beta)^3}$$

prout igitur fuerit vel $A = 0$ vel $B = 0$, reperitur vel

$$N = (\alpha S + \beta)^{-2} \text{ vel } N = (\alpha S + \beta)^3;$$

illo igitur caſu amplitudo ita definitur vt ſit

$$\Omega = C(\alpha S + \beta)^{4}, \text{ hoc vero } \Omega = C(\alpha S + \beta)^{-6}.$$

Coroll. 3.

97. Solutio per operationem primi ordinis inuenta etiam duos caſus ſimpliciores dederat hos:

$$\Omega = C(\alpha S + \beta)^{0} \text{ et } \Omega = C(\alpha S + \beta)^{-2}$$

operatio vero ſecundi ordinis praebuerat hos duos

$$\Omega = C(\alpha S + \beta)^{2} \text{ et } \Omega = C(\alpha S + \beta)^{-4}$$

nunc haec tertii ordinis ſuppeditat:

$$\Omega = C(\alpha S + \beta)^{4} \text{ et } \Omega = C(\alpha S + \beta)^{-6},$$

vnde concludere licet hanc methodum ad omnes tubos applicari poſſe hac formula $\Omega = C(\alpha S + \beta)^{\pm 2i}$ contentos; excluſis exponentibus imparibus.

Scholion 1.

98. Omnes plane tuborum formae hoc modo reſolutionem admittentes repeti debent ex hac aequatione

$$y^{4}du - 2uy^{3}du - uuyydy + Byydu - Ady = 0$$

vbi A et B conſtantes ab arbitrio noſtro pendentes denotant, quas tamen ambas in praecedente ſolutione euaneſcentes facere ſum coactus, vt integratio ſuccederet. Nunc autem obſeruo dummodo ſit $A = 0$ ideoque

$$dS = \frac{ydz - zdy}{zz} = \frac{du}{uu},$$

inte-

integrationem etiamnunc adminiſtrari poſſe, quaecunque conſtans pro B aſſumatur. Cum enim tum ſit

$$yy\,du - 2uy\,du - uu\,dy + B\,du = 0$$

ponamus $uuy = x$ ſeu $y = \frac{x}{uu}$ erit

$$\frac{xx\,du}{u^4} - dx + B\,du = 0 \text{ ſeu } d.\frac{1}{x} + B\,du\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{du}{u^4} = 0$$

qui eſt caſus integrabilis aequationis Riccatianae, cui ſatisfacit forma $\frac{1}{x} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{uu}$; fit enim

$$\frac{-\alpha}{uu} - \frac{2\beta}{u^3} + \frac{B\alpha\alpha}{uu} + \frac{2B\alpha\beta}{u^3} + \frac{B\beta\beta}{u^4} + \frac{1}{u^4} = 0$$

vnde ſumi debet

$$B = -\frac{1}{\beta\beta} \text{ et } \alpha = \frac{1}{B} = -\beta\beta,$$

ita vt ſit

$$\frac{1}{x} = \frac{-\beta\beta}{u} + \frac{\beta}{uu}.$$

Ponatur ergo

$$\frac{1}{x} = \frac{-\beta\beta}{u} + \frac{\beta}{uu} + \frac{1}{p},$$

vt aequationis

$$d.\frac{1}{x} - \frac{du}{\beta\beta}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{du}{u^4} = 0$$

integrale completum eruamus, orieturque:

$$dp - \frac{2p\,du}{u} + \frac{2p\,du}{\beta uu} + \frac{du}{\beta\beta} = 0$$

quae per $\frac{e^{\frac{-2}{\beta u}}}{uu}$ multiplicata et integrata praebet:

$$\frac{e^{-\frac{2}{\beta u}}p}{uu} + \frac{e^{-\frac{2}{\beta u}}}{2\beta} = \frac{C}{2\beta} \text{ ſeu } p = \frac{Ce^{\frac{2}{\beta u}}uu}{2\beta} - \frac{uu}{2\beta}$$

 ita

ita vt ſit $\frac{1}{x} = -\frac{\mathfrak{G}\mathfrak{G}}{u} + \frac{\mathfrak{G}}{uu} + \frac{2\mathfrak{G}}{uu\,(C\,e^{\frac{2}{\mathfrak{G}u}} - 1)}$

hincque $x = \frac{uu\,(C\,e^{\frac{2}{\mathfrak{G}u}} - 1)}{\mathfrak{G}\,(1 + \mathfrak{G}u) + C\,\mathfrak{G}\,e^{\frac{2}{\mathfrak{G}u}}(1 - \mathfrak{G}u)} = uuy.$

Ergo $y = \frac{C\,e^{\frac{2}{\mathfrak{G}u}} - 1}{\mathfrak{G}(1+\mathfrak{G}u) + C\mathfrak{G}e^{\frac{2}{\mathfrak{G}u}}(1-\mathfrak{G}u)}$ et $z = \frac{u(C e^{\frac{2}{\mathfrak{G}u}} - 1)}{\mathfrak{G}(1+\mathfrak{G}u) + C\mathfrak{G}e^{\frac{2}{\mathfrak{G}u}}(1-\mathfrak{G}u)}$
exiſtente $u = \frac{-m}{mS+n}$; tum vero eſt $N\,dz - z\,dN = D\,dS = \frac{D\,du}{uu}$ ex qua per zz diuiſa reperitur N indeque reliqua.

Si hic faceremus $\mathfrak{G} = \infty$ praecedens ſolutio reſultaret.

Scholion 2.

Si hoc modo vlterius progredi placeat, calculus quidem fit laborioſior, ſed tamen artificio hic vſitato praecipuas difficultates ſuperare licebit. Veluti ſi pro integralis forma quarti ordinis ponamus:

$$v = O + Nf''' : (S+ct) + Mf'' : (S+ct) + Lf' : (S+ct) + Kf : (S+ct)$$

et ob

$U\,dS = \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{-2\,dN}{N}$ ideoque $\Omega = \frac{ff}{NN}$ ponatur $M = N\,x$, $L = N\,y$ et $K = N\,z$;

perueniturque ad has aequationes:

$$\frac{ddN}{N} = 2\,dx\,dS = \frac{ddx + 2\,dy\,dS}{x} = \frac{ddy + 2\,dz\,dS}{y} = \frac{ddz}{z}$$

vnde

vnde deducimus:

I. $2xdxdS = ddx + 2dydS$

II. $yddx - xddy + 2ydydS - 2xdzdS = 0$

III. $ddz - 2zdxdS = 0$

IV. $zddy - yddz + 2zdzdS = 0$

hincque integrando

I. $xxdS = dx + 2ydS + \text{Conſt.}\, dS$

II + III. $ydx - xdy + dz + yydS - 2xzdS = \text{Conſt.}\, dS$

IV. $zdy - ydz + zzdS = \text{Conſt.}\, dS.$

Omnes has tres conſtantes nihilo ſumamus aequales, et vltima praebet $\frac{y}{z} = -S$, ita vt ſit $y = -zS$, vbi conſtantis additione non eſt opus, quia loco S ſcriptum concipere licet $S + \frac{6}{\alpha}$ vti ſupra. Poſito igitur $y = -zS$ ex prima fit $dx = dS(xx + 2zS)$, et ex ſecunda

$$-Szdx + Sxdz - xzdS + dz + SSzzdS = 0$$

quae per zz diuiſa et integrata edit

$$-\frac{Sx}{z} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3}S^3 + \frac{1}{3}A = 0 \text{ ideoque } z = \frac{3(1 + Sx)}{A + S^3}$$

hocque valore in prima ſubſtituto fit

$$dx = dS\left(xx + \frac{6S(1 + Sx)}{A + S^3}\right)$$

cui cum ſatisfaciat $x = -\frac{1}{S}$, ponatur $x = -\frac{1}{S} + \frac{1}{v}$ eritque $0 = dv - \frac{2vdS}{S} + \frac{6vSSdS}{A + S^3} + dS$, cuius integrale,

$$v = \frac{BSS + AAS - AS^4 - \frac{1}{5}S^7}{(A + S^3)^2} \text{ ſuppeditat}$$

$x =$

$$x = \frac{-B + 3ASS + \frac{6}{5}S^5}{BS + AA - AS^5 - \frac{1}{5}S^6}, \text{ hincque porro}$$

$$z = \frac{3(A + S^5)}{BS + AA - AS^5 - \frac{1}{5}S^6} \text{ et } y = \frac{-3S(A + S^5)}{BS + AA - AS^5 - \frac{1}{5}S^6}.$$

Supereſt $z\,d\,N - N\,d\,z = C\,d\,S$, ideoque $\frac{N}{z} = C\int\frac{dS}{zz}$ vnde reliqua facile expediuntur.

Scholion 3.

100. Hoc modo progrediendo continuo plures reperiuntur tuborum figurae, in quibus aeris agitationes minimas definire licebit, et quaelibet adeo operatio infinities maiorem multitudinem ſuppeditat, quam praecedens. Interim tamen infinitae tuborum figurae manent excluſae, pro quibus etiamnum aeris motum determinari non licet. Poſt figuram ergo cylindricam, quam felici ſucceſſu expediuimus, ſequitur conoidica hyperbolica, vix difficiliorem ſolutionem poſtulans quam illa, cum ab eadem operatione prima ſit ſuppeditata, ita vt hae duae figurae ad primum ordinem ſint referendae. Ex ordine ſecundo imprimis notatu eſt digna figura conica aequatione $\Omega = A\,s\,s$ contenta, tum vero etiam hyperbolica $\Omega = \frac{A}{s^4}$, nec non haec algebraica multo latius patens $\Omega = \frac{A\,s\,s}{(s^5 + B)^2}$, praeter quas innumerabiles aliae tranſcendentes ſunt erutae; pro altioribus autem ordinibus motus determinatio continuo fit operoſior, vt operae non ſit pretium tantos labores ſuſcipere. Species itaque tantum ſimpliciſſimas examini ſum ſubiecturus.

CAPVT

CAPVT V.

DE MINIMIS AERIS AGITATIONIBVS IN TVBIS FIGVRAM CONOIDICAM HYPERBOLICAM HABENTIBVS.

Problema 86.

101. Si tubi figura oriatur ex conuerſione arcus hyperbolae aequilaterae A B circa aſymtotam I L facta, et aer in eo contentus initio quomodocunque de ſtatu aequilibrii fuerit deturbatus, agitationes eius ſequentes ad quoduis tempus inueſtigare. Tab. VII. Fig. 91.

Solutio.

Sit I interſectio aſymtotarum, ſumtoque ſpatio $IS = S$ amplitudo tubi ibi ponatur $\Omega = \frac{c}{ss}$, agitatio autem aeri primum inducta ita ſe habeat, vt in tubi loco S fuerit denſitas $= Q$ et celeritas ſecundum $IB = \Upsilon$. Elapſo iam tempore quocunque t, ex ſolutione ſupra (82 et 84) exhibita, vbi ob $\alpha = 1$, $\beta = 0$, negligamus grauitatis effectum aer ex S per ſpatiolum $Ss = v$ erit translatus vt ſit

$$v = SS\int \frac{dS}{SS} l\frac{Q}{B} + S\Gamma : (S+ct) + S\Delta : (S-ct)$$

poſito $\sqrt{\frac{2ga}{b}} = c$, tum vero erit mutata conſtante denſitas

$$q = Q(1 - l\frac{Q}{B} + \Gamma : (S+ct) + \Delta : (S-ct) - S\Gamma' : (S+ct) - S\Delta' : (S-ct))$$

et celeritas

$$\text{ȣ} = c\,S\,(\Gamma' : (S + c\,t) - \Delta' : (S - c\,t)).$$

Quaeſtio autem nunc huc redit: vt ad ſtatum initialem natura functionum Γ et Δ accommodetur: poſito ergo $t = 0$, fieri debet $v = 0$, $q = Q$ et $\text{ȣ} = \Upsilon$, vnde colligimus has aequationes:

$$\text{I. } S\,S \int \tfrac{dS}{SS}\, l\tfrac{Q}{B} + S\,\Gamma : S + S\,\Delta : S = 0$$

$$\text{II. } - l\tfrac{Q}{B} + \Gamma : S + \Delta : S - S\,\Gamma' : S - S\,\Delta' : S = 0$$

$$\text{III. } \Upsilon = c\,S\,(\Gamma' : S - \Delta' : S)$$

quarum quidem duae priores inter ſe conueniunt, vt tam ex rei natura quam differentiatione prioris intelligitur. Ponamus breuitatis gratia $\Gamma : S + \Delta : S = x$ et $\Gamma : S - \Delta : S = y$, vt prodeat

II. aequatio $- l\frac{Q}{B} + x - \frac{S\,dx}{dS} = 0$ et

III. aequatio $\Upsilon = \frac{c\,S\,dy}{dS}$, atque

I. $S\,S \int \frac{dS}{SS}\, l\frac{Q}{B} + S\,x = 0$.

quae quidem illam in ſe complectitur. Hinc ergo eſt $x = - S \int \frac{dS}{SS}\, l\frac{Q}{B}$, inde vero $y = \frac{1}{c} \int \frac{\Upsilon\, dS}{S}$, ita vt obtineamus:

$$\Gamma : S = - \tfrac{1}{2} S \int \tfrac{dS}{SS}\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{1}{2c} \int \tfrac{\Upsilon\, dS}{S} \text{ et}$$

$$\Delta : S = - \tfrac{1}{2} S \int \tfrac{dS}{SS}\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2c} \int \tfrac{\Upsilon\, dS}{S}$$

vnde fit

$$\Gamma' : S = - \tfrac{1}{2} \int \tfrac{dS}{SS}\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2S}\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{\Upsilon}{2cS} \text{ et}$$

$$\Delta' : S = - \tfrac{1}{2} \int \tfrac{dS}{SS}\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2S}\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{\Upsilon}{2cS}.$$

Cum

Cum igitur pro ſingulis axis punctis S ex ſtatu initiali dentur quantitates $l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$ proxime et Υ hinc conſtruantur duae curuae C Γ c et D Δ d, vt ſint earum applicatae $S\Gamma = \Gamma':S$ et $S\Delta = \Delta':S$, quae curuae autem non vltra tubi longitudinem AB extendantur eritque tum per quadraturas harum curuarum:

$$\Gamma:S = ACS\Gamma \text{ et } \Delta:S = ADS\Delta.$$

His curuis conſtructis elapſo tempore $= t$, in axe a puncto S vtrinque capiantur interualla $ST = St = ct$ eritque tum

translatio $Ss = SS\int\frac{dS}{SS}l\frac{Q}{B} + S(ACTM + ADtn)$

denſitas $q = Q(1 - l\frac{Q}{B} + ACTM + ADtn - S.TM - S.tn)$

celeritas $\upsilon = cS(TM - tn)$

quae determinationes valent quamdiu puncta T et t non extra tubum A B cadunt.

Coroll 1.

102. Si ſuper axe I L intra tubi extenſionem AB, in cuius loco S poſito interuallo I S = S, eſt amplitudo $\Omega = \frac{ff}{SS}$, aliae duae conſtruantur lineae curuae E Q e et F Υ f, quarum applicatae ſint Tab. VII. Fig. 92.

$$SQ = \int\frac{dS}{SS}l\frac{Q}{B} + \frac{1}{S}l\frac{Q}{B} = \int\frac{dQ}{SQ} \text{ et } S\Upsilon = \frac{\Upsilon}{cS}$$

illae functiones hinc ita determinantur, vt ſit

$$\Gamma':S = -\tfrac{1}{2}SQ + \tfrac{1}{2}S\Upsilon \text{ et } \Delta'.S = -\tfrac{1}{2}SQ - \tfrac{1}{2}S\Upsilon$$

hincque porro

$$\Gamma:S = -\tfrac{1}{2}AESQ + \tfrac{1}{2}AFS\Upsilon \text{ et } \Delta:S = -\tfrac{1}{2}AESQ - \tfrac{1}{2}AFS\Upsilon.$$

Coroll. 2.

103. Hinc autem elapſo tempore t ſumtisque a puncto S interuallis $ST = St = ct$ reperitur aëris qui initio ad S verſabatur:

denſitas

$$q = Q\left(1 - l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2}AETM - \tfrac{1}{2}AEtm + \tfrac{1}{2}AFTN - \tfrac{1}{2}AFtn + \tfrac{1}{2}S(TM + tm - TN + tn)\right)$$

celeritas

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}cS(-TM + TN + tm + tn) \text{ et}$$

translatio

$$Sv = SS\int \tfrac{dS}{SS} l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2}S(AETM - AFTN + AEtm + AFtn)$$

vnde cum poſito $t = 0$ fiat $Sv = 0$, patet eſſe

$$SS\int \tfrac{dS}{SS} l\tfrac{Q}{B} = S.\ AESQ$$

ita vt ſit

$$Sv = \tfrac{1}{2}S(2AESQ - AETM - AEtm + AFTN - AFtn).$$

Scholion 1.

103. Conſtructio in corollariis data, etſi plures terminos comprehendit quam prior, tamen ad calculum quouis caſu oblato euoluendum multo magis eſt accommodata quoniam in ea agitationes, quae vel ob turbatam initio denſitatem vel ob motum impreſſum oriuntur, ſeorſim exhibentur. Haec autem diſtinctio maxime eſt neceſſaria ſi continuationem vtriusque ſcalae extructae EQe et FYf explorare velimus; quod quidem ad perfectam motus cognitionem omnino eſt neceſſarium. Commodius autem hae expreſſiones exhiberi poſſunt, vt non pendeant a tubi

a tubi termino A: cum enim ex ipſa conſtructione pateat eſſe:

$$\int \frac{dS}{SS}\, l\frac{Q}{B} = \frac{AESQ}{S},$$ ex poſitione

$$SQ = \int \frac{dS}{SS}\, l\frac{Q}{B} + \frac{1}{S}\, l\frac{Q}{B}$$ colligimus

$$l\frac{Q}{B} = S.\; SQ - AESQ,$$

quibus valoribus indroductis, obtinebimus has determinationes:

$$\frac{q}{Q} = 1 + \tfrac{1}{2}S(TM + tm - 2SQ) - \tfrac{1}{2}S(TN - tn)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(SQtm - SQTM) + \tfrac{1}{2}TNtn$$
$$v = \tfrac{1}{2}cS(tm - TM + TN + tn)$$
$$Sv = \tfrac{1}{2}S(SQtm - SQTM) + \tfrac{1}{2}S.\,TNtn$$

quae formulae ideo ad calculum magis ſunt accommodatae quod a neutro tubi termino pendent. Id autem hic imprimis notari conuenit, diſtantiam cuiusque puncti S ab aſymtotae initio I ſcilicet IS = S in computum venire.

Scholion 2.

105. Antequam autem hic vlterius progredi liceat, accuratius ſcalas, quibus ad motum definiendum vtor, perpendi conuenit. Vtraque ſcilicet ex ſtatu qui aeri in tubo contento initio fuerit inductus conſtrui debet, hunc autem ſtatum ita determinari aſſumo, vt aeris ad S verſa tus denſitas fuerit $= Q$ naturali exiſtente $= B$, celeritas vero ſecundum directionem $AB = \Upsilon$. His poſitis conſtructio ſcalae $F\Upsilon$ nulla laborat difficultate cum eius ſit applicata $S\Upsilon = \frac{\Upsilon}{cS}$, altera vero ſcala EQe, quae

 for-

formulam integralem inuoluit, quandam dilucidatio-
Tab. VII. Fig. 93. nem ob conſtantem implexam poſtulat. Primo igitur cum in ſingulis punctis S denſitas datur Q ita conſtruatur curua C V, vt vocato interuallo $CSV = S$, ſit eius applicata $SV = \frac{1}{SS} l \frac{Q}{B}$, ſumta ſcilicet recta quacunque pro vnitate. Tum vero hac curua deſcripta ſcala EQe, qua opus eſt, ita conſtrui debet, vt capiatur vbique eius applicata $SQ = S.SV + ACSV$, ſicque huius ſcalae ſingulae applicatae, qua tubus extenditur, ex curua data C V aſſignari poterunt. Cum deinde etiam area ſcalae A E S Q in noſtras formulas ingrediatur, notari conuenit eſſe $AESQ = S.SQ - SS.SV$ ideoque $AESQ = S.ACSV$.

Scholion 3.

Tab. VIII. Fig. 94. 106. Operae pretium erit hanc curuam C V, quae proprie ſcala denſitatum vocari poteſt, loco illius ſcalae EQe ad vſum adhibere. Sit igitur CQc iſta ſcala denſitatum, in qua poſito interuallo $IS = S$ ſit applicata $SQ = \frac{1}{SS} l \frac{Q}{B}$, in ſcala celeritatum vero $F\Upsilon f$ ſit vt ante applicata $S\Upsilon = \frac{T}{cS}$ Quod ſi igitur iſtam ſcalam CQc loco praecedentis EQe ſubſtituere velimus, in formulis inuentis loco SQ ſcribi oportet $S.SQ + ACSQ$ et $S.ACSQ$ loco illius areae $AESQ$. Cum nunc ſit $l \frac{Q}{B} = SS.SQ$ ex §. 103 obtinebimus pro tempore quocunque elapſo t ſumtis interuallis $ST = St = ct$.

denſi-

denſitatem $q = Q\left\{\begin{array}{l} 1 - SS.SQ - \frac{1}{2}S.ACTM - \frac{1}{2}S.ACtm \\ + \frac{1}{2}TNtn + \frac{1}{2}SS(TM + tm) - \frac{1}{2}S(TN - tn) \\ \qquad + \frac{1}{2}S(ACTM + ACtm) \end{array}\right\}$

quae expreſſio contrahitur in hanc:

$$q = Q(1 + \tfrac{1}{2}SS(TM + tm - 2SQ) - \tfrac{1}{2}S(TN - tn) + \tfrac{1}{2}TNtn).$$

Deinde erit celeritas

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}cS(-S.TM + S.tm - ACTM + ACtm + TN + tn)$$

ſeu

$$\vartheta = -\tfrac{1}{2}cSS(TM - tm) - \tfrac{1}{2}cS.TMtm + \tfrac{1}{2}cS(TN + tn).$$

Denique vero ſpatium translationis Sv reperitur:

$$Sv = \tfrac{1}{2}S(2S.ACSQ - S.ACTM - S.ACtm + TNtn)$$

ſeu

$$Sv = \tfrac{1}{2}SS(SQtm - SQTM) + \tfrac{1}{2}S.TNtn.$$

His ergo formulis vtpote ad calculum maxime accommodatis in ſequentibus vtar.

Problema 87.

107. Si tubus in A fuerit terminatus ibique ſiue apertus ſiue clauſus, vtriusque ſcalae denſitatum et celeritatum prouti in ſcholio praecedente (106) ſunt conſtitutae, continuationem ſuper axe vltra A producto inueſtigare.

Solutio.

Sit diſtantia $IA = a$, ac primo conſideremus caſum, quo tubus in A eſt apertns; ibi ergo denſitas Tab. VIII. Fig. 95.

ſitas ſemper naturali erit aequalis ideoque $Q = B$, vnde ſcala denſitatum AM per punctum A tranſibit, ſcala vero celeritatum ſit FN. Cum iam perperpetuo eſſe debeat $q = Q = B$, elapſo tempore quocunque t ſumtisque a puncto A vtrinque intervallis $AT = At = ct$ formula, quae tum denſitatem in A exprimere eſt inuenta, praebere debet $q = Q$. Quare illa formula ſumendo punctum indefinitum S in ipſo puncto A huc transferatur: fiet ergo

$$SQ = 0, \; S\Upsilon = AF, \text{ et } S = a;$$

vnde continuationem vtriusque ſcalae ita comparatam eſſe oportet, vt fiat

$$SS(TM + tm) - S(TN - tn) + TN\,tn = 0$$

idque ita vt neutrius continuatio ab altera pendeat. Seorſim ergo eſſe debet $tm = -TM$, ex quo intelligitur ſcalam denſitatum AM ita continuari oportere, vt pars continuata Am ipſi ſcalae AM ſimilis ſit ſed ad axis partem contrariam relata. Pro continuatione vero ſcalae celeritatum inuenienda ſtatuamus

$$AT = At = x, \; TN = y \text{ et } tn = z,$$

et cum eſſe debeat

$$TN\,tn - a(TN - tn) = 0$$

fiet

$$\int y\,dx + \int z\,dx - ay + az = 0;$$

hinc differentiando

$$y\,dx + z\,dx - a\,dy + a\,dz = 0,$$

quae

quae per $e^{\frac{x}{a}}$ multiplicata dat

integrale $e^{\frac{x}{a}}\, a\, z = \int e^{\frac{x}{a}} (a\,dy - y\,dx) = e^{\frac{x}{a}}\, ay - 2\int e^{\frac{x}{a}}\, y\, dx$

ideoque $z = y - \frac{2}{a}\, e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}}\, y\, dx$

integrali hoc ita capto vt euaneſcat poſito $x = 0$.

Sit iam tubus in A clauſus, ibique celeritas Tab. VIII. Fig. 96.
v ſemper eſſe debet nulla vnde ſcala celeritatum AN per punctum A tranſeat neceſſe eſt. Cum igitur elapſo tempore t, pro quo ſumantur interualla $AT = At = ct = x$, celeritas v quoque nulla prodire debeat, quaecunque fuerit ſcala denſitatum CM primo eſſe oportet $TN + tn = 0$, ſeu ſcalae celeritatum AN continuatio An ipſi eſt ſimilis in contrariam axis partem diſpoſita: Pro continuatione autem ſcalae denſitatum eſſe debet

$$-aa(TM - tm) - a\, TM\, tm = 0.$$

Ponamus in hunc finem

$$AT = At = x,\quad TM = y \text{ et } tm = z$$

haecque conditio ad iſtam deducit aequationem:

$$a(y - z) + \int y\,dx + \int z\,dx = 0 \text{ ſeu } a\,dy - a\,dz + y\,dx + z\,dx = 0$$

cuius integrale eſt

$$e^{\frac{-x}{a}}\, a\, z = \int e^{\frac{-x}{a}} (a\,dy + y\,dx) = e^{\frac{-x}{a}}\, ay + 2\int e^{\frac{-x}{a}}\, y\, dx$$

ita vt pro hac continuatione habeamus:

$$z = y + \frac{2}{a}\, e^{\frac{x}{a}} \int e^{\frac{-x}{a}}\, y\, dx.$$

Coroll 1.

108. Caſu ergo priori, quo tubus in A eſt apertus, continuatio ſcalae celeritatum ita eſt comparata, vt ſit

$$AFTN + AFtn = a(TN - tn)$$

ideoque inuenta applicata tn, habebitur area curuae continuatae

$$AFtn = IA(TN - tn) - AFTN.$$

Coroll. 2.

109. Simili modo pro caſu poſteriori, quo tubus in A eſt clauſus, continuatio ſcalae denſitatum CM ita eſt comparata vt ſit

$$ACTM + ACtm = a(tm - TM).$$

Quare inuenta eius applicata tm, eius area ita ſe habebit

$$ACtm = IA(tm - TM) - ACTM.$$

Coroll. 3.

110. Si priori caſu aer in tubo nullum habuerit motum initialem, ſolaque denſitas fuerit perturbata; tum quia ſcala celeritatum in axem incidit, ob $y = 0$, etiam eius continuatio in axem incidet. Poſteriori vero caſu, ſi aeris denſitas initio per totum tubum fuerit naturalis, tum ſcala denſitatum ſimulque eius continuatio in axem incidit. His autem caſibus exceptis continuationes inuentae maxi-

maxime diſcrepant a ſcalis principalibus; earumque conſtructio nonniſi per quadraturas, quantitatem exponentialem inſuper in ſubſidium vocando perfici poteſt.

Problema 88.

111. Si tubus in B fuerit terminatus ibique vel apertus vel clauſus, vtriusque ſcalae denſitatum et celeritatum ſecundum praecepta (106) formatae, continuationem ſuper axe vltra B producto definire.

Solutio.

Poſita diſtantia $IB = b$, examinemus primo caſum quo tubus in B eſt apertus, ideoque denſitas in B tam initio quam ſemper eadem $= B$, vnde ſcala denſitatum mB per ipſum punctum B tranſibit, nf vero ſit ſcala celeritatum. Capiantur vtrinque a B ſpatia aequalia $Bt = BT = x$, exiſtente $x = ct$, atque cum poſt tempus t futura ſit denſitas in B ex §. 106. Tab. VIII. Fig. 97.

$$q = Q\left(1 + \tfrac{1}{2}bb(TM + tm) - \tfrac{1}{2}b(TN - tn) + \tfrac{1}{2}TN\,tn\right)$$

neceſſe eſt vt primo fiat $TM + tm = 0$, ideoque ſcala denſitatum Bm in formam ſimilem BM ad alteram axis partem deſcribendam continuetur. Pro ſcalae vero celeritatum nf continuatione fN inuenienda vocentur $tn = y$ et $TN = z$ eſſeque debebit $\int y\,dx + \int z\,dx = b(z - y)$ vnde colligitur:

$$e^{\frac{-x}{b}}bz = \int e^{\frac{-x}{b}}(b\,dy + y\,dx) = e^{\frac{-x}{b}}by + 2\int e^{\frac{-x}{b}}y\,dx$$

$$= -e^{\frac{-x}{b}}by + 2\int e^{\frac{-x}{b}}b\,dy$$

 ideo-

ideoque

$$z = y + \frac{2}{b} e^{\frac{x}{b}} \int e^{\frac{-x}{b}} y\,dx = -y + 2 e^{\frac{x}{b}} \int e^{\frac{-x}{b}} dy.$$

Tab. VII Fig. 98. Sit nunc tubus in B clauſus, et altera ſcala celeritatum n B ita per B tranſibit, vt ſemper ibi fiat celeritas $\upsilon = 0$, ideoque

$$0 = -bb(TM - tm) - b.\, TM\,tm + b(TN + tn).$$

Primo ergo eſſe oportet $TN + tn = 0$, et ſcalae nB continuatio erit B N ipſi aequalis et contrarie ſita; pro alterius vero ſcalae denſitatum cm continuatione inuenienda vocatis ſpatiis $BT = Bt = x$, applicata cognita $tm = y$ et incognita

$TM = z$, fieri debet $\int y\,dx + \int z\,dx + b(z - y) = 0$,

vnde reperitur

$$z = y - \frac{2}{b} e^{\frac{-x}{b}} \int e^{\frac{x}{b}} y\,dx = -y + 2 e^{\frac{-x}{b}} \int e^{\frac{x}{b}} dy.$$

Coroll. I.

Fig. 97. 112. Caſu quo tubus in B eſt apertus, poſtquam ex formula inuenta ſingulae applicatae T N fuerint definitae, non opus eſt aream huius continuationis ſeorſim quaeri, cum ex conditione praeſcripta ſit area

$$B \int TN = I\,B\,(TN - tn) - B \int tm.$$

Coroll.

Coroll. 2.

113. Simili modo pro caſu quo tubus in B eſt clauſus continuationis ſcalae denſitatum c M area hac ratione definitur. Tab. VIII Fig. 98.

$$BcTM = IB(tm - TM) - Bctm$$

ex quo ſufficit eius applicatas T M aſſignauiſſe.

Coroll. 3.

114. Si diſtantia $IB = b$ prae interuallis $BT = Bt = x$ fuerit valde magna, vt ſit $e^{\frac{\pm x}{b}} = 1$; vel ſi fractio $\frac{x}{b}$ vt conſtans ſpectari poſſit, erit $2e^{\frac{\pm x}{b}} \int e^{\frac{\mp x}{b}} dy = 2y$; ex quo pro vtroque caſu fit $z = y$, hincque continuatio perinde ſe habebit, ac ſi tubus eſſet cylindricus.

Problema 89.

115. Si tubus hyperbolicus in termino A fuerit apertus, et aer in eo contentus per ſpatium minimum G H de aequilibrio vtcunque turbetur, huius pulſus propagationem determinare. Tab. VIII Fig. 99.

Solutio.

Super interuallo G H deſcribatur vtraque ſcala denſitatum G M H et celeritatum G N H, ita vt ſi in T poſita diſtantia $IT = S$, initio fuerit denſitas $= Q$ et celeritas in plagam A H $= \Upsilon$ ſint applicatae $TM = \frac{1}{SS} l \frac{Q}{R}$ et $TN = \frac{\Upsilon}{cS}$. His ſcalis conſtitutis

tutis per praecepta ante tradita continuatio earum vltra A verſus I ita inſtitui debet: Primo ſcilicet quia ambae ſcalae ab A ad G in ipſum axem A G incidunt, per tantumdem ſpatium $A g = A G$ vtraque ſcala pariter in axem $A g$ cadet; tum vero quia tubus ad A eſt apertus ſcala denſitatum continuabitur in $g m h$ curua ſimili ipſi G M H ad contrariam axis partem ſita. Pro continuatione vero ſcalae celeritatum ſumta abſciſſa $A t = A T = x$, et vocata applicata $T M = y$, exiſtente interuallo $I A = a$; quantitas $e^{\frac{x}{a}}$, quia x tantum per ſpatiolum minimum G H variatur, vt conſtans ſpectari poterit ita vt ſit ex (107) $z = y$ ſeu $t n = T N$, totaque curva $g n h$ ſimilis ſcalae G N H et ad eandem axis partem diſpoſita. Hoc modo tota vtriusque ſcalae continuatio haberetur, ſi tubus ad alteram partem in infinitum eſſet extenſus; ſin autem alicubi in B terminaretur, prout ibi foret apertus vel clauſus, nouae repetitiones vtriusque ſcalae inde orirentur prorſus vt in tubis cylindricis. Hic autem tantum agitationem quae in ipſo orificio A a gignetur, perſcrutari eſt propoſitum, quoniam ea cum aere libero communicatur, in eoque vlterius propagatur; quae autem deinceps adhuc naſcerentur repetitiones, eas hic vtpote meras reſonantias non perſequar, ſiquidem earum ratio ex ſuperioribus ſatis eſt manifeſta. In A ergo aer erit tranquillus donec effluxerit tempus $= \frac{AG}{c}$; ac tum ſimul vterque pulſus eo appellet. Sumamus vtrinque interuallum $A T = A t$ $= c t$,

$= ct$, et quia puncti A diſtantia a centro hyperbolae I eſt I A $= a$, in formulis §. 106 datis erit S $= a$ et S Q $= 0$, vnde tum colligitur pro aere in hoc loco:

denſitas $q = B(1 + \frac{1}{2}aa(TM - tm) - \frac{1}{2}a(TN - tn) - \text{area } GTN)$

et quia haec area pro euaneſcente eſt habenda fit $q = B$ vti rei natura pro aere aperto poſtulat. Deinde vero ibidem erit

celeritas $\vartheta = -\frac{1}{2}aac(TM + tm) + \frac{1}{2}ac(TN + tn)$

ſeu $\vartheta = -aac.TM + ac.TN = \frac{-a\gamma}{SS}.c.l\frac{Q}{B} + \frac{a}{S}\Upsilon$

ſpatium vero translationis $= -aa.GTM + a.GTN$, quod quidem erit minimum.

Coroll. 1.

116. Ex ipſa ſolutione ſatis liquet in huiusmodi tubis pulſus eadem plane celeritate propagati, atque in tubis cylindricis; ex quo concludere licet, figuram tubi nihil plane conferre ad celeritatem propagationis pulſuum; etiamſi id ex Theoria pro omnibus tubi figuris oſtendere non valeamus.

Coroll. 2.

117. Deinde etiam perſpicitur, omnia quae ſupra de pulſuum propagatione in tubis aequaliter amplis, eorumque repetitione demonſtrauimus, etiam hic locum habere cum pulſus in interuallo minimo excitati easdem exhibeant vtriusque ſcalae continuationes, ſuperfluum

fluum ergo foret, quae ante de eiusdem ſoni reſonantia ſunt dicta hic repetere.

Scholion 1.

Tab. VIII. Fig. 100. 118. Problema hoc ideo attuli vt explicationi effectus a tubis ſtentoreis editi inſeruiret, quandoquidem harum tubarum figura parum diſcrepat a conoidica hyperbolica quam hic tractamus. Sit ergo *kab* hyperbola aequilatera intra aſymtotas I B et I K deſcripta cuius portio *a b* circa axem A B gyrata generet tubam ſtentoream, in cuius orificio B*b* vox quaecunque edatur. Hac voce aeri ad B*b* proximo denſitas imprimatur Q maior naturali, ſimulque celeritas ſecundum B A $= \Upsilon$, cuius ergo directio illi, quam in ſolutionem problematis introduximus eſt contraria. Tum vero ponatur diſtantia I A $= a$ et I B $= b$, quae in problemate erat S atque inde patet aeri in orificio ampliori A *a* imprimi celeritatem verſus I, quae ſit $= \frac{a}{b}.\ \Upsilon + \frac{aac}{bb} l \frac{Q}{B}$; quae cum diſtantia I A $= a$ multo ſit minor diſtantia I B $= b$, etiam multo foret minor celeritate Υ in primo pulſu genita, niſi ob denſitatem naturali B maiorem Q haud mediocriter augeretur, propterea quod *c* denotat diſtantiam quaſi 1000 pedum. Neque tamen huic pulſus in A *a* tranſlati celeritati effectum tribuere licet, ſed praecipua cauſa quaerenda eſt in amplitudine orificii A *a*, per quod is pulſus pari velocitate praeditus eſt extenſus idemque praeſtat, ac ſi tot voces ibi ſimul ederentur, quoties haec aper-

apertura ſuperat aperturam oris clamantis. Si enim remota tuba vox in liberum aerem ederetur, ea quaquauerſus diffuſa in diſtantia B A vehementer diminueretur; nunc autem dum in tuba cohibetur, totumque ſpatium A*a* multo maiore celeritate implet, quam fieret ſi tubus abeſſet, mirum non eſt quod eius effectus tam ſit fortis. De cetero facile intelligitur figuram ipſam tubi haud multum ad hunc effectum conferre, dum ab vſitata non admodum abhorreat.

Scholion 2.

119. Hinc etiam ratio petenda videtur eorum ſonorum, quos tubae, buccina cornua, aliaque inſtrumenta ſimilia edunt, quae in hoc a tibiis diſcrepant, quod in his vti vidimus, totus aer in tubo contentus per noui aeris inflationem ſimul concitatur hincque motum oſcillatorium conſequitur, quo ſonus producitur. In illis vero inſtrumentis iam ſonus quidam per orificium inflatur, vel ex ore inflantis vel dum in eo termino elaſtrum quodpiam ad motum vibratorium excitatur. Vtroque autem modo in illo termino tantum eiusmodi pulſus excitatur quales hic ſumus contemplati, qui deinceps per totam tubi longitudinem propagantur, et dum a diffuſione ad latera coercentur, eo maiorem vim acquirunt, ſicque grauitas ſoni editi potiſſimum a pulſibus ſucceſſiue in orificio productis pendent, quam ob cauſam etiam ſoni horum inſtrumentorum a ſonis tibiarum maxime differunt. Interim tamen etiam in iſtis in-

ſtrumentis longitudo et figura tubi plurimum ad ſoni grauitatem conferunt, ita vt hic vtraque ſoni cauſa ſimul concurrere videatur, quandoquidem horum inſtrumentorum ope non omnes ſed tantum certi ſoni ratione grauitatis edi poſſunt, qui plerumque rationem numerorum 1, 2, 3, 4, 5 etc. naturali ordine progredientium inter ſe tenent. Quod phaenomenon cum etiam in tibiis obſeruauerimus, hinc potius concludendum videtur ſonorum a tubis, buccinis, cornibus etc. editorum cauſam eſſe mixtam, et partim in ſonitu primum inflato, partim in agitatione totius aeris in his tubis contenti quaeri debere. Verum quia Theoriam motus aeris vix adhuc libavimus, plurimum adhuc abeſt, quominus perfectam horum ſonorum explicationem ſperare queamus. Quin potius in iis, quae prima huius nouae ſcientiae principia nobis largiuntur, acquieſcere debemus, vberiorem cognitionem tum demum expectaturi, quando eam ſcientiam magis excolere licuerit.

Problema 90.

Tab. IX. Fig. 101 120 Si in huiusmodi tubo hyperbolico $AaBb$ vtrinque aperto aer ita de ſtatu aequilibrii deturbetur, vt eius ſola denſitas ſine vllo motu varietur, motum oſcillatorium, qui deinceps in tubo generabitur, definire.

Solutio.

Sit I centrum hyperbolae, ex qua tubus eſt formatus, et poſita puncti in tubo vtcunque aſſumti S diſtan-

S diſtantia $IS = S$, inducta ſit ibi aeri initio denſitas $= Q$ naturali exiſtente $= B$, capiaturque applicata $SQ = \frac{1}{SS} l \frac{Q}{B}$, erit punctum Q in ſcala denſitatum A Q B, quam quia tubus vtrinque eſt apertus per, ambos terminos A et B tranſire oportet. Scala autem celeritatum hac hypotheſi in axem incidit. Iam per praecepta ante tradita facile haec ſcala denſitatum vtrinque continuatur, eandem alternatim ad contrarias axis partes deſcribendo, vt puncta A, B, A′, B′, A″, B″ etc. interuallis $= AB$ inter ſe diſſita ſint centra arcuum vtrinque alternatim aequalium. Hinc ad quoduis tempus ab initio elapſum $= t$ ſtatus aeris qui initio circa S verſabatur ſequenti modo definietur: a puncto S vtrinque in axe abſcindantur ſpatia $ST = St = ct$, denotante c ſpatium per quod ſonus vno minuto ſecundo propagatur ex applicatis ſcalae denſitatum in his punctis T et t per §. 106 erit

I. Denſitas $q = Q(1 + \frac{1}{2}SS(TM + tm - 2SQ))$

II. Celeritas $\mathfrak{v} = -\frac{1}{2}SS(TM - tm) - \frac{1}{2}cS.\, TMtm$

III. Spatiolum $Ss = \frac{1}{2}SS(SQtm - SQTM)$

Vnde patet ſumto $ST = St = 2AB$ ſeu poſt tempus $t = \frac{2AB}{c}$, fieri $TM = tm = SQ$, hincque denſitatem $q = Q$ celeritatem $\mathfrak{v} = 0$, et pariter $Ss = 0$, ob $SQtm = 0$ et $SQTM = 0$.

Coroll. 1.

121 Aer igitur in tubo tempore $t = \frac{2AB}{c}$ duas oſcillationes peregiſſe eſt cenſendus; vnde cum

 tem-

tempora ſingularum oſcillationum ſint $= \frac{AB}{c}$, ſingulis minutis ſecundis edentur $\frac{c}{AB}$ oſcillationes, qui numerus ſimul ſoni grauitatem exprimit.

Coroll. 2.

122. Tubus igitur hyperbolicus eundem plane edet ſonum ac tubus cylindricus eiusdem longitudinis, ſi quidem vterque vtrinque ſit apertus; et in hyperbolico aeri primum nullus motus fuerit impreſſus.

Scholion.

123. Inuenimus quidem tempore $t = \frac{2AB}{c}$, quo aer perfecte in priſtinum ſtatum reſtituitur, duas oſcillationes peragi, ad ſimilitudinem cordarum vibrantium, ita vt ſi nunc aer in excurſione maxima verſetur, elapſo hoc tempore iterum in eandem reuertatur. Verum hinc non ſequitur, elapſo tempore dimidio $t = \frac{AB}{c}$ aerem ad alteram excurſionem contrariam pertingere: tum enim tantum hoc eueniret ſi curua AQB duabus conſtaret partibus ſimilibus, ſeu diametrum haberet per medium punctum rectae AB normaliter transeuntem. Quod niſi eueniat ſingulae oſcillationes ita ſe inuicem excipient vt alternatim interualla ſint maiora et minora vnde ſonum minus purum oriri neceſſe eſt, quam ſi omnia interualla eſſent aequalia. Atque haec fortaſſe praecipua eſt cauſa, quod tibiae cylindricae puriores ſonos edant, quam vel conuergentes vel diuergentes; huc autem accedit,

accedit, quod hic primam aëris agitationem cum nullo motu coniunctam aſſumſimus, quippe quo accedente continuatio ſcalae celeritatum pro tubis hyperbolicis longe aliam ſequitur legem, ac ſi tubus vbique eſſet aequaliter amplus. Quomodocunque autem ſcala celeritatum fuerit comparata, ex formulis §. 106. datis liquet, agitationes ſequentes ita ex vtraque ſcala determinari, vt componantur ex effectu vtriusque ſeorſim producto. Cum igitur in hoc problemate effectum ex ſola ſcala denſitatum oriundum aſſignauerimus, nunc ſcalam celeritatum ſeorſim examini ſubiiciamus, vt deinceps vtrumque effectum coniungendo agitationes ex duabus quibuscunque ſcalis ſimul oriundae definiri queant.

Problema 91.

124. Si prima aequilibrii perturbatio in ſolo motu conſtet, denſitate vbique naturali relicta, ſeu ſi detur ſcala celeritatum, ex ea agitationes aeris ſequentes in tubo hyperbolico $A a B b$ vtrinque aperto definire. Tab. IX. Fig. 102.

Solutio.

Sit ergo F Υ G ſcala celeritatum data, cuius applicatae ex celeritatibus initio impreſſis ita definiuntur, vt ſi in S cuius diſtantia a centro hyperbolae ſit $I S = S$, celeritas in plagam A B fuerit T fiat $S Υ = \frac{T}{c S}$. Hanc igitur curuam vtrinque continuari oportet ſecundum praecepta in probl. 87 et 88 tradita. Statuantur in hunc finem diſtantiae $IA = a$

et $IB = b$, et pro continuatione vltra A inuenienda capiatur $AS' = AS = x$, vt ſit $x = S - a$ et ponatur applicata $S\Upsilon = y$, eritque applicata in S' conſtituenda

$$S'\Upsilon' = z = y - \frac{2}{a} e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} y\, dx$$

integrali hoc ita ſumto vt euaneſcat poſito $x = 0$. Ergo ob $x = S - a$ erit

$$S'\Upsilon' = S\Upsilon - \frac{2}{a} e^{\frac{-S}{a}} \int e^{\frac{S}{a}} dS . S\Upsilon$$

et area

$$AFS'\Upsilon' = a(S\Upsilon - S'\Upsilon') - AFS\Upsilon$$

Iam vltra B progrediamur, ſumtisque $BS'' = BS = x = b - S$, manente $S\Upsilon = y$, applicata in S'' erigenda ex Pr. 88 reperitur

$$z = y + \frac{2}{b} e^{\frac{x}{b}} \int e^{\frac{-x}{b}} y\, dx \text{ ſeu}$$

$$S''\Upsilon'' = S\Upsilon - \frac{2}{b} e^{\frac{-S}{b}} \int e^{\frac{S}{b}} dS.\, S\Upsilon$$

et area

$$BGS''\Upsilon'' = b(S''\Upsilon'' - S\Upsilon) - BGS\Upsilon.$$

Nunc ad aperturam A reuertamur et ſumto ſpatio $AS''' = AS'' = x = 2b - a - S$, ſit $S''\Upsilon'' = y$ et applicata in S''' erigenda erit

$$z = y - \frac{2}{a} e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} y\, dx \text{ ſeu}$$

$$S'''\Upsilon''' = S''\Upsilon'' + \frac{2}{a} e^{\frac{S}{a}} \int e^{\frac{-S}{a}} d.S.\, S''\Upsilon''$$

quae

quae facta reductione tranſit in hanc formam:

$$S''' \Upsilon''' = S\Upsilon + \frac{2(b-a)}{a(a+b)} e^{\frac{S}{a}} \int e^{\frac{-S}{a}} dS.S\Upsilon + \frac{2(b-a)}{b(a+b)} e^{\frac{-S}{b}} \int e^{\frac{S}{b}} dS.S\Upsilon$$

Redeamus ad aperturam B b ſumamusque

$$B S^{IV} = B S' = x = b - 2a + S,$$

et poſito $S'\Upsilon' = y$, applicata in S^{IV} ſtatuenda erit

$$z = y + \frac{2}{b} e^{\frac{x}{b}} \int e^{\frac{-x}{b}} y\, dx \text{ ſeu}$$

$$S^{IV}\Upsilon^{IV} = S'\Upsilon' + \frac{2}{b} e^{\frac{S}{b}} \int e^{\frac{-S}{b}} dS.\, S'\Upsilon'$$

quae loco $S'\Upsilon'$ ſupra inuentum valorem ſubſtituendo reducitur ad hanc formam:

$$S^{IV}\Upsilon^{IV} = S\Upsilon - \frac{2(b-a)}{a(a+b)} e^{\frac{-S}{a}} \int e^{\frac{S}{a}} dS.S\Upsilon - \frac{2(b-a)}{b(a+b)} e^{\frac{S}{b}} \int e^{\frac{-S}{b}} dS.S\Upsilon$$

ſicque vlterius progredi licet, quousque libuerit.

Verum hic potiſſimum videamus, in quo ſtatu futurus ſit aer, qui initio erat ad S poſt tempus $t = \frac{2AB}{c}$, quo caſu abſciſſae vtrinque abſcindendae cadent in S^{IV} et S''' ita vt in ſolutione generali §. 106 fiat

$$TN = S^{IV}\Upsilon^{IV} \text{ et } tn = S'''\Upsilon''',$$

tum igitur colligetur,

denſitas $q = Q(1 - \frac{1}{2}S(S^{IV}\Upsilon^{IV} - S'''\Upsilon''') + \frac{1}{2}S'''\Upsilon'''S^{IV}\Upsilon^{IV})$
celeritas $v = \frac{1}{2}cS(S^{IV}\Upsilon^{IV} + S'''\Upsilon''')$
translatio $Ss = \frac{1}{2}S.\, S'''\Upsilon'''S^{IV}\Upsilon^{IV}$.

Area autem haec $S'''\Upsilon'''S^{IV}\Upsilon^{IV}$ ita per meras applica-

plicatas exprimi poteſt; cum ex continuationis indole ſit

$$\text{I.}\quad S\Upsilon S'\Upsilon' = a(S\Upsilon - S'\Upsilon')$$

$$\text{II.}\quad S''\Upsilon''S'''\Upsilon''' = a(S''\Upsilon'' - S'''\Upsilon''')$$

$$\text{III.}\quad S\Upsilon S''\Upsilon'' = b(S''\Upsilon'' - S\Upsilon)$$

$$\text{IV.}\quad S'\Upsilon'S^{IV}\Upsilon^{IV} = b(S^{IV}\Upsilon^{IV} - S'\Upsilon')$$

erit combinando:

$$\text{IV}-\text{I.}\quad S\Upsilon S^{IV}S^{IV} = b(S^{IV}\Upsilon^{IV} - S'\Upsilon') - a(S\Upsilon - S'\Upsilon')$$

$$\text{II}-\text{III.}\quad S\Upsilon S'''\Upsilon''' = a(S''\Upsilon'' - S'''\Upsilon''') - b(S''\Upsilon'' - S\Upsilon)$$

vnde colligimus aream

$$S'''\Upsilon'''S^{IV}\Upsilon^{IV} = (b-a)(S\Upsilon - S'\Upsilon' - S''\Upsilon'') + bS^{IV}\Upsilon^{IV} - aS'''\Upsilon'''.$$

In qua ſi valores pro his applicatis inuentos ſubſtituamus reperitur iſta area ponendo $S\Upsilon = y$

$$\frac{2(b-a)}{a+b}\left(e^{\frac{-S}{a}}\int e^{\frac{S}{a}}y\,dS - e^{\frac{S}{a}}\int e^{\frac{-S}{a}}y\,dS + e^{\frac{-S}{b}}\int e^{\frac{S}{b}}y\,dS - e^{\frac{S}{b}}\int e^{\frac{-S}{b}}y\,dS\right)$$

vbi integralia ita capi debent vt ea, quae inuoluunt a euaneſcant poſito $S = a$, altera vero poſito $S = b$. Haec ergo expreſſio pro area inuenta in $\frac{1}{2}S$ ducta praebet ſpatium translationis Ss. Deinde pro reliquis elementis habebimus:

$$S^{IV}\Upsilon^{IV} - S'''\Upsilon''' = \frac{-2(b-a)}{a+b}\left(\tfrac{1}{a}e^{\frac{-S}{a}}\int e^{\frac{S}{a}}y\,dS + \tfrac{1}{a}e^{\frac{S}{a}}\int e^{\frac{-S}{a}}y\,dS + \tfrac{1}{b}e^{\frac{-S}{b}}\int e^{\frac{S}{b}}y\,dS + \tfrac{1}{b}e^{\frac{S}{b}}\int e^{\frac{-S}{b}}y\,dS\right)$$

et

$$S^{IV}\Upsilon^{IV} + S'''\Upsilon''' = 2y - \frac{2(b-a)}{a+b}\left(\tfrac{1}{a}e^{\frac{-S}{a}}\int e^{\frac{S}{a}}y\,dS - \tfrac{1}{a}e^{\frac{S}{a}}\int e^{\frac{-S}{a}}y\,dS + \tfrac{1}{b}e^{\frac{-S}{b}}\int e^{\frac{S}{b}}y\,dS - \tfrac{1}{b}e^{\frac{S}{b}}\int e^{\frac{-S}{b}}y\,dS\right)$$

Coroll.

Coroll. 1.

125. Hinc ergo patet ob ſcalam celeritatum poſt tempus $= \frac{2AB}{c}$ ſtatum aeris in tubo multum ab initiali diſcrepare poſſe quod diſcrimen eo minus euadet, quo minor fuerit fractio $\frac{2(b-a)}{a+b}$, et quo propius ſcala principalis F T G ad axem acceſſerit.

Coroll. 2.

126. Quodſi ergo aeri in tubo hyperbolico ſimul motus fuerit impreſſus, poſt tempus $\frac{2AB}{c}$ aer in tubo non duas oſcillationes perfeciſſe cenſebitur; multo minus ad aliud quodpiam tempus oſcillationes reuocari poterunt, ſed potius ſonus inde perceptus valde erit rudis et ad harmoniam ineptus.

Scholion.

127. Tibiae ergo ad figuram hyperbolicam formatae hoc inſigni vitio laborabunt, vt ſonos neutiquam puros atque ad harmoniam idoneos edant, propterea quod motum non in oſcillationes diſtinctas reſoluere licet. Hocque vitium eo erit maius, quo fortius huiusmodi tibia inflatur, quoniam tum multo minus oſcillationes diſtingui poterunt, inflatione autem leniſſima ſonus etiamnunc tolerabilis edetur. Facile autem intelligitur hoc vitium tibiis hyperbolicis non eſſe proprium, ſed ad omnes alias formas eo magis extendi, quo magis ab amplitudine aequabili differant. Ratio igitur hinc perſpicitur, cur

 omnis

omnis generis tibiae, quae Organis pneumaticis inſeri ſolent, figuram habeant vel cylindricam vel priſmaticam, vt amplitudo vbique ſit eadem, haecque ſola figura ad Muſicam accommoda videtur; quod quidem duplici modo fieri licet, dum eae ſuperne vel apertae ſunt, vel clauduntur. At ſi tibias hyperbolicas claudere velimus, ſoni multo rudiores edentur, quia tum neutra ſcala ſeorſim conſiderata motum oſcillatorium regularem producere valet; ex quo operae pretium haud erit caſum, quo tubus hyperbolicus in altero termino apertus in altero vero clauſus ſumeretur, euolui.

CAPVT VI.

DE

MINIMIS AERIS AGITATIONIBVS IN TVBIS CONICIS.

Problema 92.

128. Si tubus habuerit figuram conicam, aerque in eo contentus vtcunque de ſtatu aequilibrii deturbetur, deſcribere ambas ſcalas, ex quibus deinceps ſtatus aeris ad quoduis tempus definiri queat.

Solutio.

Solutio.

Sit vertex coni in A et recta A B eius axis, in quo ſumto puncto quocunque S, poſitoque intervallo A S = S, aëri in S initio eiusmodi inductus ſit ſtatus, vt denſitas fuerit = Q naturali exiſtente = B celeritas vero in directione A B = Υ. Cum nunc tubi amplitudo in S ſit $\Omega = nnSS$ ex (88) ad hunc caſum accommodato habebimus $\alpha = 1$, $\beta = 0$, hincque $M = -\frac{1}{S}$ et $L = \frac{1}{SS}$. Quodſi iam ſolutionem probl. 84. huc transferamus, et grauitatis actionem negligamus, obtinebimus primo Tab. IX. Fig. 103.

$$O = \frac{1}{SS}\int SS\,dS\,l\frac{Q}{B},$$

tum vero elapſo tempore quocunque t ſtatus aeris, qui initio fuerat in S ita definitur vt ſit ſpatium translationis

$$Ss = \frac{1}{SS}\int SS\,dS\,l\frac{Q}{B} - \frac{1}{S}\Gamma':(S+ct) + \frac{1}{SS}\Gamma:(S+ct) = v$$
$$- \frac{1}{S}\Delta':(S-ct) + \frac{1}{SS}\Delta:(S-ct)$$

vnde pro denſitate q et celeritate u deducimus:

$$\left(\frac{dv}{dS}\right) = -\frac{2}{S^3}\int SS\,dS\,l\frac{Q}{B} - \frac{1}{S}\Gamma'':(S+ct) + \frac{2}{SS}\Gamma':(S+ct) - \frac{2}{S^3}\Gamma:(S+ct)$$
$$+ l\frac{Q}{B} \qquad - \frac{1}{S}\Delta'':(S-ct) + \frac{2}{SS}\Delta':(S-ct) - \frac{2}{S^3}\Delta:(S-ct)$$

ab ob $\frac{d\Omega}{\Omega\,dS} = \frac{2}{S}$ eſt

$$\frac{v\,d\Omega}{\Omega\,dS} = \frac{2}{S^3}\int SS\,dS\,l\frac{Q}{B} - \frac{2}{SS}\Gamma':(S+ct) + \frac{2}{S^3}\Gamma:(S+ct)$$
$$- \frac{2}{SS}\Delta':(S-ct) + \frac{2}{S^3}\Delta:(S-ct)$$

quare cum ſit $q = Q\left(1 - \frac{v\,d\Omega}{\Omega\,dS} - \left(\frac{dv}{dS}\right)\right)$ colligimus

$$q = Q\left(1 - l\frac{Q}{B} + \frac{1}{S}\Gamma'':(S+ct) + \frac{1}{S}\Delta'':(S-ct)\right)$$

ac denique ob $\upsilon = \left(\frac{dv}{dt}\right)$ erit

$$\upsilon = \frac{-c}{S}\Gamma'':(S+ct) + \frac{c}{SS}\Gamma':(S+ct)$$
$$+\frac{c}{S}\Delta'':(S-ct) - \frac{c}{SS}\Delta':(S-ct).$$

Hinc ergo pro ſtatu initiali ponendo $t = 0$ adipiſcimur:

$$v = \frac{1}{SS}\int SSdSl\frac{Q}{B} - \frac{1}{S}(\Gamma':S+\Delta':S) + \frac{1}{SS}(\Gamma:S+\Delta:S)$$
$$q = Q\left(1 - l\frac{Q}{B} + \frac{1}{S}(\Gamma'':S+\Delta'':S)\right)$$
$$\upsilon = -\frac{c}{S}(\Gamma'':S-\Delta'':S) + \frac{c}{SS}(\Gamma':S-\Delta':S).$$

Cum igitur tum fuerit $v = 0$, $q = Q$ et $\upsilon = \Upsilon$, ſequentes nanciſcimur aequationes ex quibus naturam binarum functionum Γ et Δ definiri oportet

I. $\int SSdSl\frac{Q}{B} - S(\Gamma':S+\Delta':S) + \Gamma:S+\Delta:S = 0$

II. $Sl\frac{Q}{B} = \Gamma'':S + \Delta'':S$

III. $\frac{1}{c}SS\Upsilon = -S(\Gamma'':S-\Delta'':S) + \Gamma':S - \Delta':S$

quarum prima differentiata cum ſecunda conuenit, vti quidem rei natura poſtulat, ita vt duabus tantum conditionibus ſit ſatisfaciendum. Ponamus breuitatis gratia:

$\Gamma':S+\Delta':S = y$ et $\Gamma':S-\Delta':S = z$ vt fiat

II. $SdSl\frac{Q}{B} = dy$ et III. $\frac{1}{c}SS\Upsilon dS = -Sdz + zdS$

hincque

$y = \int SdSl\frac{Q}{B}$ et $-\frac{z}{S} = \frac{1}{c}\int \Upsilon dS$ ſeu $z = -\frac{S}{c}\int \Upsilon dS$

vnde

vnde functiones ita definiuntur, vt ſit:

$$\Gamma' : S = \tfrac{1}{2}\int S\, dS\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{S}{2c}\int \Upsilon\, dS \text{ et}$$

$$\Delta' : S = \tfrac{1}{2}\int S\, dS\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{S}{2c}\int \Upsilon\, dS$$

hincque porro differentiando

$$\Gamma'' : S = \tfrac{1}{2} S\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2c}\int \Upsilon\, dS - \tfrac{1}{2c} S\, \Upsilon$$

$$\Delta'' : S = \tfrac{1}{2} S\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{1}{2c}\int \Upsilon\, dS + \tfrac{1}{2c} S\, \Upsilon$$

integrando vero reperitur:

$$\Gamma : S = \tfrac{1}{2}S\int S dS\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2}\int SS\, dS\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{4c} SS\int \Upsilon\, dS + \tfrac{1}{4c}\int SS\Upsilon\, dS$$

$$\Delta : S = \tfrac{1}{2}S\int S dS\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2}\int SS\, dS\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{1}{4c} SS\int \Upsilon\, dS - \tfrac{1}{4c}\int SS\Upsilon\, dS.$$

Conſtruantur ergo ſuper axe ex dato ſtatu initiali duae lineae curuae A Q D et A Υ F ſumendo applicatas

$$S Q = S\, l\tfrac{Q}{B} \text{ et } S \Upsilon = \tfrac{1}{c}\int \Upsilon\, dS + \tfrac{1}{c} S\, \Upsilon$$

et functionum Γ et Δ natura inde ita determinabitur vt ſit

$$\Gamma'' : S = \tfrac{1}{2}SQ - \tfrac{1}{2}S\Upsilon\, ; \quad \Delta'' : S = \tfrac{1}{2}SQ + \tfrac{1}{2}S\Upsilon$$

hincque porro per areas

$$\Gamma' : S = \tfrac{1}{2}ASQ - \tfrac{1}{2}AS\Upsilon\, ; \quad \Delta' : S = \tfrac{1}{2}ASQ + \tfrac{1}{2}AS\Upsilon$$

tum vero ſi haec forma M : ASQ denotet eam quantitatem quae exprimit integrale $\int dS.\, ASQ$ habebitur:

$$\Gamma : S = + \tfrac{1}{2}M : ASQ - \tfrac{1}{2}M : AS\Upsilon$$

$$\Delta : S = + \tfrac{1}{2}M : ASQ + \tfrac{1}{2}M : AS\Upsilon.$$

His curuis deſcriptis poſt tempus elapſum $=t$, a puncto S vtrinque abſcindantur interualla $ST=St=ct$ et ex applicatis his punctis reſpondentibus ſtatus aeris qui initio ad S verſabatur nunc ita definitur, vt ſit

$$q=Q(1-\frac{SQ}{S}+\frac{1}{2S}(TM-TN+tm+tn))$$

$$u=\frac{c}{2S}(tm+tn-TM+TN)+\frac{c}{2SS}(ATM-ATN-Atm-Atn)$$

at ſpatiolum translationis $Ss=v$ ita exprimetur:

$$Ss=\frac{1}{SS}\int SSdSl\frac{Q}{B}-\frac{1}{2S}(ATM-ATN+Atm+Atn)$$
$$+\frac{1}{2SS}(M:ATM-M:ATN)$$
$$+\frac{1}{2SS}(M:Atm+M:Atn) \quad \text{ſeu}$$

$$Ss=\frac{1}{SS}\int SSdSl\frac{Q}{B}-\frac{1}{2S}(ATM-ATN+Atm+Atn)+\frac{1}{2SS}(M:ATM-M:ATN+M:Atm+M:Atn)$$

vbi eſt $\int SSdSl\frac{Q}{B}=\int S.SQ.dS=S.ASQ-M:ASQ.$

Coroll 1.

128. Ad quoduis ergo tempus t ſumtis interuallis $ST=St=ct$ aeris qui initio erat in S ſtatus ita definitur vt ſit

I. denſitas $q=Q(1+\frac{1}{2S}(TM+tm-2SQ)-\frac{1}{2S}(TN-tn))$

II. celeritas $u=\frac{c}{2S}(tm-TM)+\frac{c}{2S}(TN+tn)+\frac{c}{2SS}.tmTM-\frac{c}{2SS}(ATN+Atn)$

III. ſpatiolum $Ss=\frac{1}{2S}(2ASQ-ATM-Atm)+\frac{1}{2S}.tnTN)$
$-\frac{1}{2SS}(2M:ASQ-M:ATM-M:Atm)-\frac{1}{2SS}(M:ATN-M:Atn)$

Coroll.

Coroll. 2.

129. Si diſtantia A S conſideretur vt infinita, tubus conicus abibit in cylindricum; et quia tum fit

$$\tfrac{1}{S}.\, SQ = l\tfrac{Q}{B},\ \tfrac{1}{S}.\, S\Upsilon = \tfrac{T}{c};\ \tfrac{1}{S}.\, ASQ = \int dS\, l\tfrac{Q}{B},$$

ideoque

$$\tfrac{1}{SS}.\, ASQ = 0;\ \text{at}\ \tfrac{1}{SS}\, M: ASQ = \int dS\, l\tfrac{Q}{B}$$

tum vero $\tfrac{1}{S}.\, AS\Upsilon = \tfrac{1}{c}\int T\, dS$ hinc

$$\tfrac{1}{SS}\, AS\Upsilon = 0\ \text{et}\ \tfrac{1}{SS}\, M: AS\Upsilon = \tfrac{1}{c}\int \Upsilon\, dS,$$

hae formulae cum illis, quae ſupra pro tubus cylindricis ſunt inuentae, conuenient.

Scholion 1.

130. Conſtructio prioris ſcalae A Q D, ex denſitate initiali formatae nulli eſt ſubiecta difficultati, at altera ſcala A Υ F non ſimpliciter ex celeritatibus initialibus Υ conſtruitur, ſed inſuper formulam quandam integralem inuoluit, quemadmodum ergo hinc eam conſtrui oporteat, perpendamus. Deſcripta ergo linea curua A v C cuius applicatae S v ipſam celeritatem initialem Υ in loco S exhibeant, ex ea ſcala illa A Υ F ita conſtruitur, vt ſit eius applicata $S\Upsilon = \tfrac{1}{c}AS.Sv + \tfrac{1}{c}ASv$ tum vero erit huius curuae area $AS\Upsilon = \tfrac{1}{c}AS.ASv$, cum ſit vt vidimus $\int dS(\Upsilon S + \int \Upsilon\, dS) = S\int \Upsilon\, dS$. Hanc ergo curuam A v C loco illius indroducendo, habebimus

T N =

$$TN = \frac{1}{c} AT.TL + \frac{1}{c} ATL;$$

$$tn = \frac{1}{c} At.\ tl + \frac{1}{c}.Atl$$

$$ATN = \frac{1}{c}.AT.ATL;\ Atn = \frac{1}{c} At.Atl$$

vnde fit pro formula celeritatum

$$\vartheta = \frac{c}{2S}(tm - TM) + \frac{c}{2SS}.tmTM + \frac{1}{2S}(AT.TL + At.tl) - \frac{ct}{2Ss}.TLtl$$

ob $ST = St = ct$

Atque hinc iam perſpicitur, ſi per totum ſpatium Tt tam denſitas initialis fuerit naturalis, quam celeritas nulla, tum etiam fore $q = Q$ et $\vartheta = 0$, quod poſterius ex formula priori minus perſpicitur. Si enim intra ſpatium At initio fuerit motus, et curua $A v C$ ibi incluſerit aream quandam, etiamſi deinceps haec curua tota in axem incidat, haec area praebebit applicatas pro curua $A \Upsilon F$ etiam per totum axem ſequentem tT, vnde neque areae ATN et Atn neque applicatae TN et tn euaneſcent: ſicque dubium foret, vtrum forma

$$\frac{c}{2S}(TN + tn) - \frac{c}{2SS}(ATN + Atn)$$

hoc caſu euaneſceret; quod autem nunc quidem ſcala $A v C$ in calculum introducta neceſſario euenire debere intelligitur.

Scholion 2.

131. Loco indicis M, quem ſupra arcis praefiximus, vt ſcriptio $M : ASQ$ denotet integrale $\int dS.ASQ$ commodius ſigno ſummatorio $\int$ vtemur, vt

vt $\int ASQ$ idem denotet, quod $\int dS.ASQ$, quoniam differentiale abſciſſae dS facile mente ſuppletur Hoc praemiſſo etiam pro ſcala $A\Upsilon F$ loco $M:AS\Upsilon$ ſcribam $\int AS\Upsilon$ quae forma autem ex ſcala celeritatum naturali $A v C$ ita determinatur vt ſit

$$\int AS\Upsilon = \tfrac{1}{c}(AS\int ASv - \int\int ASv)$$

ideoque

$$M:AT\dot{N} = \tfrac{1}{c}(AT\int ATL - \int\int ATL)$$
$$M:Atn = \tfrac{1}{c}(At\int Atl - \int\int Atl)$$

Quare per ſcalam denſitatum AQD et celeritatum AvC noſtrae determinationes ita ſe habebunt

$$q = \acute{Q}(1 + \tfrac{1}{2S}(TM + tm - 2SQ) - \tfrac{1}{2cS}(AT.TL - At.tl + tlTL)$$
$$\vartheta = \tfrac{c}{2S}(tm - TM) + \tfrac{c}{2SS}TMtm + \tfrac{1}{2S}(AT.TL + At.tl) - \tfrac{ST}{2SS}.tlTL$$
$$Ss = \tfrac{1}{2S}(SQtm - SQTM) - \tfrac{1}{2SS}(\int SQtm - \int SQTM)$$
$$+ \tfrac{1}{2cS}(AT.ATL - At.Atl) - \tfrac{1}{2cSS}(AT.\int ATL - At.\int Atl - \int\int tlTL)$$

quae ad vſum magis videntur accommodatae.

Problema 93.

132. Si in tubo conico ABb in infinitum extenſo alicubi per ſpatiolum minimum GH pulſus excitetur, propagationem huius pulſus in tubo verſus Bb ortam determinare. Tab. IX. Fig. 104.

Solutio.

Cum pulſus in ſpatiolo GH contineatur, in vtroque termino G et H denſitatem naturalem et

celeritatem nullam eſſe oportet. Sit igitur $G\,l\,H$ ſcala celeritatum, cuius applicata $t\,l$ celeritatem ipſam initialem in loco t exprimat vt ſit $t\,l = \Upsilon$ directione ad B verſa: pro ſcala denſitatum $G\,m\,H$ vero applicata $t\,m = A\,t.\,l\frac{Q}{B}$ denotante Q denſitatem in t initialem, et B naturalem. His poſitis conſideremus locum tubi quemcunque S; exiſtente $AS = S$ et quia ambae ſcalae extra ſpatium G H in axem incidunt, aër in S tam diu in aequilibrio perſeuerabit, quoad ab initio effluxerit tempus $= \frac{SH}{c}$ min. ſec. elapſo autem tempore $\frac{SG}{c}$ pulſus iterum ceſſaſſe eſt exiſtimandus ita vt totus pulſus ibi nonniſi per tempus $\frac{GH}{c}$ ſit duraturus. Ponamus ergo ab initio elapſum eſſe tempus $t = \frac{St}{c}$, et quia ad alteram partem B verſus aequali ſpatio $ST = St$ abſciſſo ibi ambae applicatae T L et T M euaneſcunt, denſitas aeris q et celeritas υ verſus B tendens in loco S ita exprimentur:

$$q = B\left(1 + \frac{tm}{2S} + \frac{At.\,tl}{2cS} - \frac{Htl}{2cS}\right)$$

quia initio denſitas in S erat $= B$, tum vero erit:

$$\upsilon = \frac{c.\,tm}{2S} + \frac{c.\,Htm}{2SS} + \frac{At.\,tl}{2S} - \frac{St.\,Htl}{2SS}.$$

Cum autem interuallum G H minimum aſſumatur, areae Htl et Htm pro euaneſcentibus haberi poſſunt; quare ob $t\,l = \Upsilon$ et

$$t\,m = A\,t\,l\frac{Q}{B} = A\,t\left(\frac{Q}{B} - 1\right) \text{ habebimus:}$$

$$q = B\left(1 + \frac{At}{2AS}\left(\frac{Q}{B} - 1\right) + \frac{At.\,\Upsilon}{2c.\,AS}\right) \text{ ſeu } l\frac{q}{B} = \frac{At}{2AS}\left(l\frac{Q}{B} + \frac{\Upsilon}{c}\right)$$

$$\upsilon = \frac{c.\,At}{2AS}\left(\frac{Q}{B} - 1\right) + \frac{At.\,\Upsilon}{2AS} = \frac{c.\,At}{2AS}\left(l\frac{Q}{B} + \frac{\Upsilon}{c}\right).$$

Coroll.

Coroll. 1.

133. Si areolas $H\,t\,l$ et $H\,t\,m$ negligere nolimus, habebimus

$$l\frac{q}{B} = \frac{A\,t}{2\,A\,S}\left(l\frac{Q}{B} + \frac{T}{c}\right) - \frac{ar.\,H\,t\,l}{2\,c.\,A\,S} \text{ et}$$

$$\mathfrak{v} = \frac{c.\,A\,t}{2\,A\,S}\left(l\frac{Q}{B} + \frac{T}{c}\right) + \frac{c}{2\,A\,S^2}\left(Ar.\,H\,t\,m - \frac{S\,t}{c}\,Ar.\,H\,t\,l\right)$$

vbi $\frac{S\,t}{c}$ denotat tempus ab initio elapſum t in min. ſec. expreſſum.

Coroll. 2.

134. Areas autem has eo minus negligere licet, quo maius ſpatiolum $G\,H$, et quo propius fuerit vertici coni A quoniam tum ob $t\,l = T$, area $H\,t\,l$ prae rectangulo $A\,t.\,t\,l$ neutiquam pro euaneſcente haberi poteſt.

Coroll. 3.

135. Si tempus elapſum t maius fuerit quam $\frac{S\,G}{c}$, ita vt punctum t vltra G verſus A cadat, vbi initio erat $l\frac{Q}{B} = 0$ et $T = 0$; pro loco S adhuc erit:

$$l\frac{q}{B} = -\frac{Ar.\,G\,l\,H}{2.\,c\,A\,S} \text{ et } \mathfrak{v} = \frac{c}{2\,A\,S^2}\left(Ar.\,G\,m\,H - t.\,G\,l\,H\right)$$

tum ergo neque denſitas eſt naturalis neque motus penitus extinctus.

Scholion.

136. Omnino ſingulare eſt hoc phaenomenon, quod etiamſi pulſus in S iam ceſſauiſſe eſt aeſtimandus

dus tamen aeris aequilibrium nondum prorſus ſit reſtitutum, ſed fieri poſſit vt etiamnum tam denſitas q a naturali B diſcrepet, quam aer ipſe motu quocam proferatur. Diſcrimen quidem hoc in valde magnis diſtantiis A S vt nullum ſpectari poteſt; in minoribus vero eo magis eſt notatu dignum, quod perpetuo durare videatur. cum calculus nullam porro mutationem indicet. Verum hic obſeruari oportet, noſtras ſcalas hic non vltra verticem A porrigi, earumque continuationem ex altera parte ipſius A ſimilem pulſum G H ad parem diſtantiam implicare, quo ſi tempus S t pertigerit in S nouus pulſus ſecundarius excitetur, quo finito demum aer ad S prorſus in aequilibrium reſtituatur. Hic enim ſimilis repetitio oriri debet ac ſi tubus eſſet cylindricus et in A clauſus: nunc autem videmus hoc diſcrimen intercedere, quod in caſu tubi conici interea dum pulſus ſecundarius ad S appellit, aerem ibi quandam adhuc agitationem retinere ſecus ac fit in cylindricis. Quare quemadmodum ambae ſcalae vltra coni verticem continuari debeant in ſequente Problemate inueſtigabimus.

Problema 94.

Tab. IX Fig. 105. 137. Si circa verticem coni A aer vtcunque de ſtatu aequilibrii deturbetur ſeu pulſus ibi quicunque excitetur ſcalas ambas quibus ad propagationem definiendam opus eſt, retro vltra verticem A continuare, indeque propagationem in tubo pro quouis loco S determinare.

Solutio.

Solutio.

Extendatur pulſus primo excitatus per ſpatium A D, et in loco quocunque T poſito interuallo $AT = S$, fuerit denſitas aeris $= Q$ naturali exiſtente $= B$, celeritas vero $= \Upsilon$ ſecundum directionem A B hinc conſtruatur primo curua A M D ſumendo applicatas $TM = S\,l\frac{Q}{B}$, quae ergo vltra D in ipſum axem D B incidit. Deinde conſtruatur etiam curua A N F ſumendo applicatas $TN = \frac{S\Upsilon + \int \Upsilon dS}{c}$, cuius quidem primum membrum in D vbi $\Upsilon = 0$ euaneſcit, alterum vero $\frac{1}{c}\int \Upsilon\, dS$ ibi certum valorem adipiſcetur, cui ſequentes applicatae omnes verſus B erunt aequales, ita vt haec ſcala A N F vltra F abeat in rectam F G ipſi axi A B parallelam; at area huius curuae ita definietur vt ſit $ATN = \frac{S}{c}\int \Upsilon\, dS$: vnde cum puncto T in D promoto fiat applicata $DF = \frac{1}{c}\int \Upsilon\, dS$, erit area $ADF = AD . DF$ perinde ac ſi tota ſcala A N F G eſſet recta G F ipſi axi parallela et ſupra verticem A vsque continuata. His poſitis primo quaeritur quomodo has ſcalas vltra A continuari oporteat, vbi ante omnia eſt obſeruandum aerem in ipſo vertice A nullum plane motum concipere poſſe. Quare ſi tubi punctum S, in quo ſupra generatim celeritatem υ definiuimus, in A transferamus, formula ibi pro celeritate exhibita

$$\upsilon = \frac{c}{2S}(tm - TM + TN + tn) + \frac{c}{2SS}(ATM\ Atm - ATN - Atn)$$

hoc caſu nulla eſſe debet. At hoc caſu habebimus $S = 0$, quia in hac formula poſuimus $AS = S$, ex quo neceſſe eſt continuationem quaeſitam ita eſſe

 com-

comparatam vt ſit $tm = TM$ et $tn = -TN$. Quamobrem in noſtra figura ſcalam A M D ſine vlla variatione ſuper axe A d deſcribi conuenit vt ſit ea A md altera vero ſcala A N F G ibi ad contrariam axis partem deſcribi debet vt ſit A nfg. His iam ambabus ſcalis vltra A continuatis conſideremus in tubo locum quemcunque S, ſtatuendo nunc diſtantiam a vertice $AS = S$, vbi cum aer initio fuerit in aequilibrio, ideoque $T = 0$ et $Q = B$ hincque $SQ = 0$, elapſo tempore $= t$, capiamus vtrinque ab S interualla $ST' = St' = ct$, ſintque in punctis T' et t' applicatae ambarum ſcalarum $T'M'$, $T'N'$ et $t'm'$ $t'n'$; atque ex his ſtatus aeris in S ita definietur vt ſit ibi

denſitas $q = B(1 + \frac{1}{2S}(T'M' + t'm') - \frac{1}{2S}(T'N' - t'n'))$ et

$$\text{celeritas } v = \frac{c}{2S}(t'm' - T'M') + \frac{c}{2S}(T'N' + t'n') - \frac{c}{2SS}(At'm' - AT'M') - \frac{c}{2SS}(AT'N' + At'n')$$

vnde primo patet, quamdiu tempus ab initio elapſum t minus fuerit quam $\frac{SD}{c}$, tum ob

$$T'M' = 0, \quad t'm' = 0, \quad \text{et} \quad T'N' = t'n' = DF$$

fore $q = B$ et ob

$$At'm' = AT'M' \quad \text{et} \quad AT'N' = AT'.DF$$

atque $At'n' = At'.DF$ prodire

$$v = \frac{c}{S}.DF - \frac{c.DF}{2SS}(AT' + At') = 0 \text{ ob } AT' + At' = 2AS = 2S,$$

tamdiu ergo aer ibi in aequilibrio manebit. Statim autem ac tempus elapſum t maius fit quam $\frac{SD}{c}$,

aer

aer in S agitari incipiet; ponamus ergo elapſum iam eſſe tempus $t = \frac{AS}{c}$, et quia nunc eſt

$T'M' = 0$, $t'm' = 0$, $T'N' = DF$, $t'n' = 0$,
$AT'M' = AMD$ $At'm' = 0$, $AT'N' = AT'.DF = 2S.DF$ et $At'n' = 0$
erit tum in loco S

denſitas $q = B(1 - \frac{DF}{2S})$ et

celeritas $\upsilon = \frac{c.DF}{2S} + \frac{c.AMD}{2SS} - \frac{c.DF}{S} = \frac{c.AMD}{2SS} - \frac{c.DF}{2S}$.

Pro tempore autem quouis medio elapſo $t = \frac{ST}{c}$ elicitur

denſitas $q = B(1 + \frac{TM + TN - DF}{2S})$ et

celeritas $\upsilon = \frac{c}{2S}(TM + TN - DF) + \frac{c}{2SS}(DTM + DFTN - DT.DF)$.

Videamus denique etiam quomodo ſtatus aeris in S ſe ſit habiturus cum effluxerit tempus

$t = \frac{Sd}{c} = \frac{AS + AD}{c}$;

tum vero erit

$T'M' = 0$, $AT'M' = AMD : T'N' = DF : AT'N' = AT'.DF = 2S.DF + AD.DF$:

porro

$t'm' = 0$, $At'm' = Amd = AMD$, $t'n' = -df = -DF$, $At'n' = -Adf = -AD.DF$,

ideoque

denſitas $q = B(1 - \frac{DF}{S})$ et

celeritas $\upsilon = \frac{-c.DF}{S}$.

Coroll.

Coroll. 1.

138. Celeritas ergo pulſus, cum ad locum quemuis S peruenerit duabus conſtat partibus, quarum prior decreſcit in ratione diſtantiae A S = S, poſterior vero in ratione duplicata diſtantiae, quae autem poſterior pars prae priori euaneſcit ſtatim ac diſtantia A S = S ſit modica.

Coroll. 2.

139. Cum impulſio in organo auditus facta pendeat ſine dubio a celeritate agitationis in quouis pulſu, hinc patet quomodo ſonus aucta diſtantia continuo diminuatur; et quia vis impulſionis quadrato celeritatis proportionalis ſtatuenda videtur, ſoni debilitatio ſequetur rationem duplicatam diſtantiarum.

Scholion. 1.

140. Inſignis hic difficultas occurrit, quod poſtquam pulſus penitus per locum S tranſierit, aer tamen ibi non in aequilibrium reſtituatur, niſi pulſus initialis ita fuerit comparatus, vt interuallum D F euaneſcat. Talis certe commotio poſt tranſitum pulſus nullo modo admitti poteſt, ideoque calculus noſter defectus potius cuiuſpiam arguendus videtur, niſi dicere velimus, omnem agitationem aeri primum inductam neceſſario ita ſemper eſſe comparatam, vt interuallum D F inde prodeat euaneſcens. Quoniam vero hoc nulla ratione probari poteſt, origo

go huius incommodi in eo quaerenda videtur, quod cum interuallum D F ex valore integrali $\frac{1}{c}\int \Upsilon\, dS$ ſit natum, in hac ipſa integratione iuſta conſtans ſit neglecta: dummodo ergo talem conſtantem introduxiſſemus, qua hoc integrale per totam ſcalam celeritatum extenſam ad nihilum fuiſſet reductum, omnis haec difficultas penitus euanuiſſet, cum inde etiam curua A N F vltra D tota in axem D B incidiſſet. Nullum ergo eſt dubium quin hic origo iſtius defectus calculi ſit ſita, totumque calculum hoc modo expediri conueniat. Talia autem incommoda in argumento prorſus nouo minime ſunt miranda, et ſperare licet, cum id diligentius fuerit excultum, tum omnia ſponte diſſipatum iri. Hic autem continuatio ſcalarum vltra verticem A merito ſuſpecta videtur, propterea quod in hoc loco ſit $S = 0$, iique termini quos deſtrui oportet infiniti; cui incommodo in ſequenti problemate medelam afferre conabor.

Scholion 2.

141. Ex hoc problemate colligere licet, quemadmodum pulſus quicunque in libero aere quaqua verſus propagetur; ſi enim quaſi centrum pulſus propagati ſit in A, vniuerſus aer circumfuſus in infinitos conos, quorum vertices in A concurrant diſtributus concipi poteſt; et manifeſtum eſt per quemlibet eorum pulſum perinde propagatum iri, ac per liberum aerem quoniam qua duo huiusmodi tubi ſe mutuo tangunt, ibi denſitas ac propterea etiam

 preſſio

preſſio eſt eadem, ita vt etiam tubis remotis propagatio eandem legem ſit ſecutura. Nunc ergo intelligimus pulſus in libero aere eadem prorſus celeritate propagari atque in tubis cylindricis; at vero ob tuborum amplificationem pulſus continuo debilitari, ita vt celeritas cuiusque agitationis diminuatur in ratione diſtantiarum a pulſu initiali A; latitudinem vero pulſuum, ceterasque ſoni qualitates in propagatione non alterari.

Problema 95.

Tab. IX. Fig. 106. 142. Si tubus conicus citra verticem I in A a ſit terminatus ibique ſiue apertus ſiue clauſus, ex agitatione initiali aeri in tubo A a B b contento inducta formulas pro motu ſequente definiendo exhibere.

Solutio.

Poſita termini A a vertice coni I diſtantia I A $= a$, ſumatur in cono locus quicunque S vocata diſtantia A S $= s$, vt diſtantia quam ante poſuimus S hic ſit $= a + s$, initio autem in S fuerit denſitas $=$ Q naturali exiſtente $=$ B et celeritas ſecundum S B $=$ T. Elapſo autem tempore quocunque t eiusdem aeris, qui initio fuerat in S, ſit denſitas $= q$, celeritas $= u$ et translationis ſpatiolum S $s = v$. Cum iam amplitudo tubi in S ſit $\Omega = nn(a+s)^2$, erit $\frac{d\Omega}{\Omega\, ds} = \frac{2}{a+s}$, hincque ex formulis ſupra inuentis obtinebimus:

$v =$

$$v = \frac{1}{(a+s)^2}\int(a+s)^2\,ds\,l\tfrac{Q}{B} - \frac{1}{a+s}\Gamma':(s+ct) + \frac{1}{(a+s)^2}\Gamma:(s+ct)$$
$$- \frac{1}{a+s}\Delta':(s-ct) + \frac{1}{(a+s)^2}\Delta:(s+ct)$$

$$q = Q\,(1 - l\tfrac{Q}{B} + \frac{1}{a+s}\Gamma'':(s+ct) + \frac{1}{a+s}\Delta'':(s-ct) \text{ et}$$
$$\upsilon = \frac{-c}{a+s}\Gamma'':(s+ct) + \frac{c}{a+s}\Delta'':(s-ct) + \frac{c}{(a+s)^2}\Gamma':(s+ct)$$
$$- \frac{c}{(a+s)^2}\Delta':(s-ct)$$

vnde pro ſtatu initiali cognito colligimus:

$$0 = \frac{1}{(a+s)^2}\int(a+s)^2\,ds\,l\tfrac{Q}{B} - \frac{1}{a+s}(\Gamma':s + \Delta':s)$$
$$+ \frac{1}{(a+s)^2}(\Gamma:s + \Delta:s)$$
$$0 = -l\tfrac{Q}{B} + \frac{1}{a+s}(\Gamma'':s + \Delta'':s)$$
$$\upsilon = \frac{-c}{a+s}(\Gamma'':s - \Delta'':s) + \frac{c}{(a+s)^2}(\Gamma':s - \Delta':s).$$

Ex illa fit

$$\Gamma'':s + \Delta'':s = (a+s)\,l\tfrac{Q}{B} \text{ et } \Gamma':s + \Delta':s = \int(a+s)\,ds\,l\tfrac{Q}{B}$$

atque

$$\Gamma:s + \Delta:s = \int ds\int(a+s)\,ds\,l\tfrac{Q}{B}$$

ex iſta vero

$$\int\Upsilon ds = \frac{-c}{a+s}(\Gamma':s - \Delta':s), \text{ ſeu } c(\Gamma':s - \Delta':s) = -(a+s)\int\Upsilon ds$$

hincque

$$c\,(\Gamma'':s - \Delta'':s) = -\int\Upsilon ds - (a+s)\Upsilon \text{ et } c\,(\Gamma:s - \Delta:s)$$
$$= -\int(a+s)\,ds\int\Upsilon ds.$$

Qui valores in prima aequatione ſubſtituti praebent:

$$0 = \int(a+s)^2 ds\,l\tfrac{Q}{B} - (a+s)\int(a+s)\,ds\,l\tfrac{Q}{B} + \int ds\int(a+s)\,ds\,l\tfrac{Q}{B}$$

vnde ambiguitas ob conſtantem per integrationem ingreſſam oriunda tollitur, cum debeat eſſe:

$$\int ds \int (a+s)\, ds\, l\tfrac{Q}{B} = (a+s)\int (a+s)\, ds\, l\tfrac{Q}{B} - \int (a+s)^2\, ds\, l\tfrac{Q}{B}$$

quae duo integralia ſimplicia ita capiantur, vt poſito $s = 0$ euaneſcant. Functiones ergo Γ et Δ ita definiuntur vt ſit

$$\Gamma'' : s = \tfrac{1}{2}(a+s)\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{(a+s)T - \int T\, ds}{2c}$$

$$\Delta'' : s = \tfrac{1}{2}(a+s)\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{(a+s)T + \int T\, ds}{2c}$$

tum vero $\Gamma' : s = \tfrac{1}{2}\int (a+s)\, ds\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{(a+s)\int T\, ds}{2c}$

$\Delta' : s = \tfrac{1}{2}\int (a+s)\, ds\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{(a+s)\int T\, ds}{2c}$ et

$$\Gamma : s = \tfrac{1}{2}(a+s)\int (a+s)\, ds\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2}\int (a+s)^2\, ds\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{\int (a+s)\, ds \int T\, ds}{2c}$$

$$\Delta : s = \tfrac{1}{2}(a+s)\int (a+s)\, ds\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{1}{2}\int (a+s)^2\, ds\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{\int (a+s)\, ds \int T\, ds}{2c}$$

Statuamus ergo in S duas applicatas

$$SQ = (a+s)\, l\tfrac{Q}{B} \quad \text{et} \quad SV = \tfrac{(a+s)T + \int T\, ds}{c}$$

deſcriptisque binis ſcalis CQc et DVd, erit

$$\Gamma'' : s = \tfrac{1}{2}SQ - \tfrac{1}{2}SV; \qquad \Delta'' : s = \tfrac{1}{2}SQ + \tfrac{1}{2}SV$$

$$\Gamma' : s = \tfrac{1}{2}ACSQ - \tfrac{1}{2}ADSV; \quad \Delta' : s = \tfrac{1}{2}ACSQ + \tfrac{1}{2}ADSQ$$

Pro tempore ergo elapſo t ſumtis interuallis $ST = St = c.t$ denſitas q et celeritas υ ita definiuntur vt ſit:

$$q = Q\left(1 + \tfrac{1}{2(a+s)}(TM - TN + tm + tn - 2SQ)\right)$$

$$\upsilon = \tfrac{c}{2(a+s)}(tm + tn - TM + TN) + \tfrac{c}{2(a+s)^2}(ACTM - ADTN - ACtm - ADtn)$$

quae

quae duo elementa noſſe ſufficit, cum inde tertium, nempe ſpatiolum Ss facile concludatur.

Vt iam inueſtigemus quomodo vtramque ſcalam vltra A continuari oporteat, ſumamus punctum S in ipſo termino A, vt ſit $s = 0$, et abſciſſis vtrinque $AT' = At' = ct$, quoniam areas curvarum a puncto A dextrorſum computauimus, quae nunc ſiniſtrorſum cadunt, negatiue capi debent, eritque pro hoc puncto A

$$q = Q\left(1 + \tfrac{1}{2a}(T'M' + t'm' - 2AC) - \tfrac{1}{2a}(T'N' - t'n')\right)$$

$$v = \tfrac{c}{2a}(t'm' - T'M') + \tfrac{c}{2a}(T'N' + t'n') + \tfrac{c}{2aa}(ACT'M' + ACt'm')$$
$$- \tfrac{c}{2a^2}(ADT'N' - ADt'n').$$

Nunc duo caſus ſunt expediendi prout tubus in termino A fuerit apertus vel clauſus:

I. Sit tubus in Aa apertus et quia ibi denſitas perpetuo manet naturalis, vt ſit $Q = B$ et $q = B$, erit $AC = 0$; fierique neceſſe eſt

$$T'M' + t'm' = 0 \quad \text{et} \quad T'N' = t'n'$$

hoc ergo caſu vtraque ſcala prorſus vt in tubis cylindricis continuatur; ſcala ſcilicet denſitatum CQc ad alteram axis partem, celeritatum vero DVd ad eandem deſcribitur.

II. Sit tubus in Aa clauſus, et quia ibi celeritas perpetuo manet nulla, pro ſcala denſitatum primo eſſe debet:

$$a(t'm' - T'M') + ACT'M' + ACt'm' = 0$$

 ſtatua-

ſtatuamus

$$AT' = At' = x,\ T'M' = y \text{ et } t'm' = z,$$

vt habeamus:

$$a(z-y)+\int(y+z)dx=0 \text{ ſeu } adz+zdx-ady+ydx=0$$

quae integrata dat:

$$e^{\frac{x}{a}}az=\int e^{\frac{x}{a}}(ady-ydx)=e^{\frac{x}{a}}ay-2\int e^{\frac{x}{a}}ydx=-e^{\frac{x}{a}}ay+2a\int e^{\frac{x}{a}}dy$$

hincque

$$z=t'm'=y-\tfrac{2}{a}e^{\frac{-x}{a}}\int e^{\frac{x}{a}}ydx=-y+2e^{\frac{-x}{a}}\int e^{\frac{x}{a}}dy.$$

Deinde pro ſcala celeritatum oportet ſit:

$$a(T'N'+t'n')-AD\,T'N'+AD\,t'n'=0$$

faciamus

$$AT'=At'=x,\ T'N'=y,\ t'n'=z,$$

et aequatio

$$a(y+z)-\int ydx+\int zdx=0 \text{ ſeu } adz+zdx+ady-ydx=0$$

integrata praebet:

$$e^{\frac{x}{a}}az=\int e^{\frac{x}{a}}(ydx-ady)=-e^{\frac{x}{a}}ay+2\int e^{\frac{x}{a}}ydx=e^{\frac{x}{a}}ay-2a\int e^{\frac{x}{a}}dy$$

hincque

$$z=t'n'=-y+\tfrac{2}{a}e^{\frac{-x}{a}}\int e^{\frac{x}{a}}ydx=y-2e^{\frac{-x}{a}}\int e^{\frac{x}{a}}dy$$

vtroque caſu integralia ita definiri debent, vt poſito $x=0$ fiat $z=y$.

Coroll. I.

143. Cum caſu, quo tubus in A a eſt apertus

tus ambae ſcalae eodem modo continuentur quo in tubis cylindricis, eadem quoque lex continuationis locum habebit ſi tubus conicus etiam in altero termino B b fuerit apertus, vnde ſequitur in tubo conico vtrinque aperto agitationes aeris prorſus conuenire cum iis, quas ſupra pro tubis cylindricis definiuimus.

Coroll. 2.

144. Quae igitur ſupra de ſonis, quos tibiae apertae edunt annotauimus, eadem quoque locum habent ſi tibiis figura conica tribuatur. Neque tamen figura nimis diuergens admitti poteſt, quia tum agitationes per vnamquamque ſectionem non amplius forent aequabiles, vti Theoria noſtra poſtulat.

Coroll. 3.

145. Ex hoc problemate theoria tuborum cylindricorum deducitur ſi diſtantia $IA = a$ ſtatuatur infinita Tum autem pro caſu quo tubus in A a eſt clauſus eadem lex pro vtriusque ſcalae continuatione colligitur, quia ob $a = \infty$ erit $t'm' = T'M'$ et $t'n' = -T'N'$.

Scholion 1.

146. Nunc dubia quae ſupra circa propagationem pulſus in ipſo vertice coni excitati ſupererant, perfecte tolluntur, cum enim totum negotium eo redeat, quomodo vtramque ſcalam vltra verticem coni oporteat continuari, ad hunc caſum noſtrum

ſtrum problema accommodabimus, ſi diſtantiam $IA = a$ euaneſcentem ſimulque tubum in Aa clauſum ſtatuamus quoniam enim conus in vertice per ſe clauditur ibi certe aer nullum motum concipere poteſt. Ex quo primum pro continuatione ſcalae denſitatum quaeſtio huc redit, vt ex hac aequatione

$$z = -y + 2 e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} dy$$

valor ipſius z definiatur caſu quo $a = 0$, quod cum ob exponentem $\frac{x}{a}$ infinitum minus pateat ad aequationem differentialem

$$a\,dz + z\,dx - a\,dy + y\,dx = 0$$

confugiamus, vnde ob $a = 0$ manifeſto ſequitur $z = -y$, ita vt ſcala denſitatum axi ad partem contrariam applicari debeat, ſecus ac ſupra per euaneſcentiam interualli $S = 0$ decepti fecimus. Deinde vero pro ſcala celeritatum ex aequatione differentiali

$$a\,dz + z\,dx + a\,dy - y\,dx = 0 \text{ ob } a = 0$$

deducimus $z = y$, ita vt haec ſcala ad eandem axis partem conſtitui debeat vtraque ſcilicet continuatio eadem lege peragitur ac ſi tubus eſſet apertus. Hinc

Tab. IX. Fig. 105. ergo poſtrema euolutio in probl. 94 ita emendabitur vt cum ſcalae in contrarias plagas cadant atque in figura ſunt repraeſentatae elapſo tempore $t = \frac{Sd}{c}$, fiat $t'm' = 0$, $t'n' = + DF$ area $At'm' = + Amd = AMD$ quia hic duplex ſigni mutatio fieri debet altera quatenus haec area vltra A, altera quatenus infra

inſra axem cadit. Denique vero ſit area $A t' n' = - A df = - A.D.DF$; vnde conſequimur:

$$T'M' + t'm' = 0;\ T'N' - t'n' = 0;\ A t'm' - AT'M' = 0$$
$$t'm' - T'M' = 0;\ T'N' + t'n' = 2DF;\ AT'N' + At'n' = 2S.DF$$

hincque porro

denſitatem $q = B$ et celeritatem

$$v = \tfrac{c}{2S}.0 + \tfrac{c}{2S}.2DF - \tfrac{c}{2SS}.0 - \tfrac{c}{2SS}.2S.DF \text{ ſeu}$$
$$v = \tfrac{c}{S}.DF - \tfrac{c}{S}.DF = 0$$

ex quo manifeſtum eſt elapſo tempore $t = \frac{Sd}{c}$ aerem in S penitus in aequilibrium reſtitui, ſicque veritatem egregie ſaluari.

Scholion 2.

147. Quoniam vidimus tibias conicas pro longitudine eosdem edere ſonos atque cylindricos ſiquidem ſint apertae, probe notandum eſt hanc conuenientiam neutiquam in tibiis clauſis locum habere. Cum enim ſi tubus conicus ad $A a$ fuerit clauſus, ambae ſcalae in lineas ipſis maxime diſſimiles continuari debeant, hinc nullae oſcillationes regulares oriri poterunt; ſed ſonus iis editus admodum erit rudis et inconditus minimeque ad harmoniam efficiendam accommodatus.

DE PERTVRBATIONE MOTVS TERRAE AB ACTIONE VENERIS ORIVNDA.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quamquam orbita Veneris a plano eclipticae declinat, tamen in praeſenti inueſtigatione, ab hac declinatione mentem abſtrahamus, quandoquidem perturbatio, qua terra a plano eclipticae dimoueretur quam minima eſſet futura, quamobrem Venerem in ipſo plano eclipticae motum ſuum abſoluere aſſumamus, ſicque tota noſtra inueſtigatio ad binas coordinatas reducetur.

2. Reperiantur ergo certo quodam tempore centra Solis, Terrae et Veneris in punctis ☉, ♁ et ♀ in plano eclipticae, in quo recta ☉♈ dirigatur ad punctum aequinoctiale vernum, maſſae autem horum trium corporum iisdem ſignis ☉, ♁, ♀ indicentur.
Tab. X. Pro loco terrae autem vocentur coordinatae
Fig. 1. ☉X $= x$ et X♁ $= y$, ipſa vero a Sole diſtantia dicatur ☉♁ $= u$, Veneris vero a Sole diſtantia ☉♀ $= v$, eiusque a terra diſtantia ♀♁ $= w$, tum vero vocentur anguli Longitudinem exhibentes

♈☉♁

♈ ⊙ ♁ $= \theta$ et ♈ ⊙ ♀ $= \Phi$, ac manifeſtum eſt fore $= u\,\text{coſ.}\,\theta$ et $y = u\,\text{ſin.}\,\theta$, ideoque $uu = xx + yy$, tum vero erit $ww = uu + vv - 2uv\,\text{coſ.}(\Phi - \theta)$.

3. Iam ob actionem Solis terra vrgetur in directione ♁ ⊙ vi $= \frac{\odot}{uu}$, ob actionem Veneris autem, terra vrgetur in directione ♁ ♀ vi $= \frac{♀}{ww}$, praeterea vero quia Solem in quiete ſpectamus, vires quibus ipſe Sol ſollicitatur contrario modo in terram transferri oportet, a terra autem Sol vrgetur in directione ⊙ ♁ vi $= \frac{♁}{uu}$, ex quo eadem vis ipſi terrae in directione ♁ ⊙ applicata eſt cenſenda. Deinde quia Sol a Venere vrgetur ſecundum ⊙ ♀ vi $= \frac{♀}{vv}$, ducta recta ♁ V ipſi ♀ ⊙ parallela, terra quoque cenſenda eſt vrgeri in directione ♁ V, vi $\frac{♀}{vv}$ quocirca terra omnino his tribus viribus ſollicitari eſt concipienda, *primo* in directione ♁ ⊙ adeſt vis $= \frac{\odot + ♁}{uu}$. *Secunda* vis agit in directione ♁ V eſt que $= \frac{♀}{vv}$. *Tertia* vero vis agit in directione ♁ ♀, quae eſt $= \frac{♀}{ww}$.

4. Quo iam has vires ſecundum directiones coordinatarum noſtrarum reſoluamus, demittatur ex ♀ in ⊙ ♈ perpendiculum ♀ P, ad quod ex ♁ rectae ⊙ ♈ parallela agatur ♁ Q, eritque ⊙ P $= v.\,\text{coſ.}\,\Phi$ et P ♀ $=$ V ſin. Φ, vnde colligitur ♁ Q $= x - v\,\text{coſ.}\,\Phi$, et ♀ Q $= v\,\text{ſin.}\,\Phi - y$, atque hinc pro directione abſciſſae X ⊙ reſultant iſtae vires

$$= \frac{\odot + ♁}{uu} \cdot \frac{x}{u} + \frac{♀}{vv}\text{coſ.}\,\Phi + \frac{♀}{ww} \cdot \frac{x - v\,\text{coſ.}\,\Phi}{w} = \frac{(\odot + ♁)x}{u^3} + \frac{♀\,\text{coſ.}\,\Phi}{vv} + \frac{♀(x - v\,\text{coſ.}\,\Phi)}{w^3}.$$

 Tum

Tum vero pro directione applicatae ♁ X, colliguntur hac vires

$$\frac{\odot + \text{♁}}{uu} \cdot \frac{Y}{u} + \frac{\text{♀}}{vv} \text{ſin.}\, \Phi - \frac{\text{♀}\,(v\, \text{ſin.}\, \Phi - y)}{w^3}.$$

Denotet nunc $d\tau$ elementum temporis pro conſtante habendum, ſitque α quantitas conſtans naturae huius temporis conueniens ac principia motus nobis binas ſequentes ſuppeditant aequationes:

$$\text{I.}\quad \frac{ddx}{\alpha\, d\tau^2} + \frac{(\odot + \text{♁})\,x}{u^3} + \frac{\text{♀}\, \text{coſ.}\, \Phi}{vv} + \frac{\text{♀}\,(x - v\, \text{coſ.}\, \Phi)}{w^3} = 0$$

$$\text{II.}\quad \frac{ddy}{\alpha\, d\tau^2} + \frac{(\odot + \text{♁})\,y}{u^3} + \frac{\text{♀}\, \text{ſin.}\, \Phi}{vv} + \frac{\text{♀}\,(y - v\, \text{ſin.}\, \Phi)}{w^3} = 0.$$

5. Calculum autem ab his coordinatis, ad alias traduci conuenit, quae ad longitudinem terrae mediam referantur. Ducatur ergo recta $\odot M$ longitudinem terrae mediam repraeſentans, ad quam ex terra demittatur perpendicularis ♁ x, vt habeantur nouae coordinatae, $\odot x = X$ et x ♁ $= Y$, tum vero vocetur angulus $\Upsilon \odot M = t$, qui ipſam longitudinem terrae mediam exprimit cuius differentiale dt vtique illi elemento temporis $d\tau$ eſt proportionale, ideoque eius loco vſurpari poterit, vti mox videbimus, hinc autem coordinatae praecedentes ita determinantur, vt ſit

$$x = X\, \text{coſ.}\, t - Y\, \text{ſin.}\, t, \quad y = Y\, \text{coſ.}\, t + X\, \text{ſin.}\, t,$$

manebit autem vt ante

$$uu = X^2 + Y^2, \quad \text{et} \quad ww = uu + vv - 2uv\, \text{coſ.}\, (\Phi - \theta).$$

6.

6. Per differentiationem igitur elicimus:

$$dx = dX\,\text{coſ.}\,t - dY.\,\text{ſin.}\,t. - a\,t\,(X\,\text{ſin.}\,t + Y\,\text{coſ.}\,t)$$
$$= dX\,\text{coſ.}\,t - dY.\,\text{ſin.}\,t - y\,dt \quad \text{et}$$
$$dy = dY.\,\text{coſ.}\,t + dX\,\text{ſin.}\,t + d\,t\,(X\,\text{coſ.}\,t - Y\,\text{ſin.}\,t)$$
$$= dX\,\text{ſin.}\,t + dY.\,\text{coſ.}\,t + x\,dt.$$

Denuoque differentiando

$$ddx = ddX\,\text{coſ.}\,t - ddY\,\text{ſin.}\,t - dX.dt\,\text{ſin.}\,t - dY\,dt\,\text{coſ.}\,t - dy\,dt$$
$$= ddX.\text{coſ.}\,t - ddY\,\text{ſin.}\,t - 2dt(dX\text{ſin.}\,t + dY\text{coſ.}\,t) - dt^2(X\text{coſ.}\,t - Y\text{ſin.}\,t)$$
$$ddy = ddX\,\text{ſin.}\,t + ddY.\text{coſ.}\,t + 2dt(dX\text{coſ.}\,t - dY\,\text{ſin.}\,t) - dt^2(X\text{ſin.}\,t + \text{coſ.}\,t)$$

vnde aequationes noſtrae ita erunt comparatae:

$$\text{I.}\quad \frac{ddX\,\text{Coſ.}\,t - ddY\,\text{ſin.}\,t - 2dt(dX\,\text{ſin.}\,t + dY\,\text{Coſ.}\,t) - dt^2(X\,\text{Coſ.}\,t - Y\,\text{ſin.}\,t)}{\alpha\,d\tau^2}$$
$$+ \frac{(\odot + \delta)(X\,\text{Coſ.}\,t - Y\,\text{ſin.}\,t)}{u^3} + \frac{\text{♀}\,\text{coſ.}\,\Phi}{vv} + \frac{\text{♀}\,(X\,\text{Coſ.}\,t - Y\,\text{ſin.}\,t - v\,\text{coſ.}\,\Phi)}{w^3} = 0$$
$$\text{II.}\quad \frac{ddX.\,\text{ſin.}\,t + ddY\,\text{Coſ.}\,t + 2dt(dX\,\text{Coſ.}\,t - dY\,\text{ſin.}\,t) - dt^2(X\,\text{ſin.}\,t + Y\,\text{Coſ.}\,t)}{\alpha\,d\tau^2}$$
$$+ \frac{(\odot + \delta)(X\,\text{ſin.}\,t + Y\,\text{Coſ.}\,t)}{u^3} + \frac{\text{♀}\,\text{ſin.}\,\Phi}{vu} + \frac{\text{♀}\,(X\,\text{ſin.}\,t + Y\,\text{Coſ.}\,t - v\,\text{ſin.}\,\Phi)}{w^3} = 0.$$

7. Quo autem hinc formas ſimpliciores eruamus, duplici combinatione vtemur, prima ſcilicet combinatio. I. coſ. t + II. ſin. t ſuppeditat:

$$\frac{ddX - 2dt\,dY - X\,dt^2.}{\alpha\,d\tau^2} + \frac{(\odot + \delta)X}{u^3} + \frac{\text{♀}\,\text{coſ.}(\Phi - t)}{vv} + \frac{\text{♀}(X - v.\,\text{coſ.}(\Phi - t))}{w^3} = 0$$

altera vero combinatio eſto

I. − ſin. t + II. coſ. t quae praebet:

$$\frac{ddY + 2dt.dX - Y\,dt^2}{\alpha\,d\tau^2} + \frac{(\odot + \text{♀})Y}{u^3} + \frac{\text{♀}\,\text{ſin.}(\Phi - t)}{vv} + \frac{\text{♀}\,(Y - v.\,\text{ſin.}(\Phi - t)}{w^3} = 0.$$

Quo has aequationes adhuc tractabiliores reddamus, mentem primo abſtrahamus ab actione Veneris, ſeu ponamus $♀ = 0$, vt habeamus iſtas aequationes

$$\frac{ddX - 2dtdY - Xdt^2}{\alpha d\tau^2} + \frac{(\odot + ♁)X}{u^3} = 0$$

$$\frac{ddY + 2dt.dX - Ydt^2}{\alpha d\tau^2} + \frac{(\odot + ♁)Y}{u^3} = 0$$

nunc autem terram ſecundum ipſum motum medium ferri aſſumamus, ita vt poſita diſtantia media terrae a Sole $= a$, pro hoc caſu habituri ſimus $X = a$; $Y = 0$ et $u = a$, qui valores in noſtris aequationibus producunt

$$-\frac{dt^2}{\alpha d\tau^2} + \frac{\odot + ♁}{a^3} = 0,$$

altera vero ſponte euaneſcit, vnde intelligimus loco elementi $d\tau$ differentiale motus medii dt introductum iri, ſi modo loco $\alpha d\tau^2$ ſcribatur $\frac{a^3 dt^2}{\odot + ♁}$, hacque adeo ſubſtitutione in genere vti licebit, quo pacto non ſolum formula indefinita $\alpha d\tau^2$, ſed etiam notio maſſarum $\odot + ♁$ e calculo euaneſcit. Multiplicemus ſcilicet noſtras aequationes per $\frac{a^3}{\odot + ♁}$, tum vero ponatur fractio $\frac{♀}{\odot + ♁} = \lambda$, atque noſtrae expreſſiones ita ſatis concinnae expreſſae prodibunt:

$$\text{I. } \frac{ddX}{dt^2} - \frac{2dY}{dt} - X + \frac{a^3.X}{u^3} + \frac{\lambda a^3 \cos.(\Phi - t)}{vv} + \frac{\lambda a^3 (X - v\cos.(\Phi - t))}{w^3} = 0$$

$$\text{II. } \frac{ddY}{dt^2} + \frac{2dX}{dt} - Y + \frac{a^3.Y}{u^3} + \frac{\lambda a^3.\sin.(\Phi - t)}{vv} + \frac{\lambda a^3 (Y - v.\sin.(\Phi - t))}{w^3} = 0.$$

8. Poſtremam nunc transformationem adhibeamus inde deductam, quod ob excentricitatem terrae ſatis paruam locus ♁ a puncto x nunquam, admodum ſit diſcrepaturus; hunc in finem ſtatuamus

$X = a$

$X=a(1+x)$ et $Y=ay$, vnde fit $u=a\sqrt{((1+x)^2+yy)}$ et aequationes noſtrae per a diuiſae euadent

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2}-\frac{2dy}{dt}-(1+x)+\frac{(1+x)}{((1+x)^2+yy)^{3:2}}+\frac{\lambda aa}{vv}\operatorname{cof.}(\Phi-t)$$
$$+\frac{\lambda a^3(1+x-\frac{v}{a}\operatorname{cof.}\Phi-t)}{w^3}=0$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{dt^2}+\frac{2dx}{dt}-y+\frac{y}{((1+x)^2+yy)^{3:2}}$$
$$+\frac{\lambda aa}{vv}\operatorname{fin.}(\Phi-t)+\frac{\lambda aa}{w^3}(ay-v\operatorname{fin.}(\Phi-t))=0$$

vbi notandum ambas has nouas coordinatas x et y prae vnitate ſemper fore ſatis exiguas, quam ob cauſſam formulam u^3 facile in ſeriem valde conuergentem euoluere licet. Eſt autem *B. Lector* monendus, ne has litteras x et y confundat cum ſuperioribus, quas iam penitus obliuiſci oportet.

Euolutio harum formularum remota actione Veneris.

9. Antequam Veneris rationem habeamus, vtique neceſſe eſt, pro binis noſtris incognitis x et y eos valores inueſtigari, qui ex ſola actione Solis et Terrae oriuntur, hancobrem nobis iſtae duae aequationes ſint propoſitae:

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2}-\frac{2dy}{dt}-(1+x)+\frac{1+x}{((1+x)^2+yy)^{3:2}}$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{dt^2}+\frac{2dx}{dt}\quad -y\quad +\frac{y}{((1+x)^2+yy)^{3:2}}$$

ex

ex quibus valores vtriusque incognitae x et y definiri oportet. Hunc in finem formulam irrationalem $((1+x)^2+yy)^{-\frac{3}{2}}$ in ſeriem conuergentem reſoluamus, quae eſt

$$\frac{1}{(1+x)^3} - \frac{3.yy}{2(1+x)^5} + \frac{15.y^4.}{8(1+x)^7},$$

et quum porro ſit

$$\frac{1}{(1+x)^n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{1.2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^3 + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}x^4 - \text{etc.}$$

facta euolutione binae noſtrae aequationes ſequentes induent formas:

$$\text{I.}\ \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2dy}{dt} - 3x, + 3xx - \tfrac{3}{2}y^2, + 6xy^2 - 4x^3, + 5x^4 - 15xxyy + \tfrac{15}{8}y^4 = 0$$

$$\text{II.}\ \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2dx}{dt}, - 3xy, + 6xxy - \tfrac{3}{2}y^3, - 10.x^3y + \tfrac{15}{2}xy^3 = 0$$

quae ſeries quum x et y ſint fractiones ſatis paruae vehementer conuergunt, quod quo clarius appareat, has aequationes in membra diſpeſcuimus ſecundum dimenſionum numerum, quas binae litterae x et y adimplent. Ac prima quidem membra vocabimus principalia, ſequentia vero annexa.

10. Facile hic perſpicere licet quantitatem x per certam ſeriem coſinuum exprimi debere, alteram vero y per ſimilem ſeriem ſinuum, hinc in ſubſidium ſolutionis obſeruaſſe iuuabit, ſi membra annexa prioris aequationis contineant $\mathfrak{M}$ coſ. μt, poſterioris vero

vero aequationis hunc terminum M ſin. $\mu\, t$, tum in in ipſis ſeriebus ipſarum x et y, ſimiles terminos occurrere debere. Pro x igitur occurrere ſumamus terminum $\mathfrak{N}$ coſ. $\mu\, t$, pro y vero N ſin. $\mu\, t$, qui valores in partes principales inducti praebent:

$$\mathfrak{M} = \mu^2 . \mathfrak{N} + 2\mu N + 3\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\mu^2 + 3) + 2\mu N$$
$$M = \mu^2 . N + 2\mu\mathfrak{N},$$

vnde colligimus

$$\mathfrak{N} = \frac{\mu\mathfrak{M} - 2M}{\mu(\mu\mu - 1)};\quad N = \frac{(\mu^2 + 3)M - 2\mu\mathfrak{M}}{\mu\mu(\mu\mu - 1)}$$

ſiue quatenus $\mathfrak{N}$ iam eſt inuentum erit

$$N = \frac{M}{\mu\mu} - \frac{2\mathfrak{N}}{\mu}.$$

Hinc notari conuenit caſu quo $\mu = 0$, fore $\mathfrak{M} = 3\mathfrak{N}$; $\mathfrak{N} = \frac{1}{3}\mathfrak{M}$ ſiquidem fuerit $M = 0$, id quod ſemper eueniet, tum vero caſu quo $\mu = 1$, neceſſario fiet $\mathfrak{M} = 2M$, tum vero valor $\mathfrak{N}$ manet indefinitus, ex eoque prodibit $N = M - 2\mathfrak{N}$.

11. Quoniam iam vidimus pro motu terrae medio ſiue circulari, fieri tam $x = 0$, quam $y = 0$, vnde eatenus tantum quantitates x et y certos ſortientur valores, quatenus orbita terrae excentricitate eſt praedita, denotet igitur K excentricitatem orbitae terreſtris, et pro vtraque quantitate x et y ſequentes ordines conſtitui conueniet

$$x = K\mathfrak{P} + K^2\mathfrak{Q} + K^3\mathfrak{R} + K^4\mathfrak{S};$$
$$y = KP + K^2 . Q + K^3 . R + K^4 . S$$

quos ſingulos ordines ſucceſſiue euolui neceſſe eſt.

 Pro

Pro primo igitur ordine, qui excentricitate ſimplici K eſt affectus, habebimus has duas aequationes:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \frac{dd\mathfrak{P}}{dt^2} - \frac{2dP}{dt} - 3\mathfrak{P} = 0 \\ \text{II.} & \frac{ddP}{dt^2} + \frac{2d\mathfrak{P}}{dt} = 0 \end{array}\right\} \text{I.}$$

Pro *ſecundo ordine* qui quadrato K K eſt affectus:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \frac{dd\mathfrak{Q}}{dt^2} - \frac{2dQ}{dt} - 3\mathfrak{Q}, + 3\mathfrak{P}^2 - \tfrac{3}{2}P^2 = 0 \\ \text{II.} & \frac{ddQ}{dt^2} + \frac{2d\mathfrak{Q}}{dt} \quad , - 3\mathfrak{P}P = 0 \end{array}\right\} \text{II.}$$

Pro *tertio ordine* qui cubo K^3 eſt affectus, aequationes noſtrae erunt

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \frac{dd\mathfrak{R}}{dt^2} - \frac{2dR}{dt} - 3.\mathfrak{R}, + 6\mathfrak{P}\mathfrak{Q} - 3.PQ; + 6\mathfrak{P}P^2 - 4\mathfrak{P}^3 = 0 \\ \text{II.} & \frac{ddR}{dt^2} + \frac{2d\mathfrak{R}}{dt} \quad , - 3\mathfrak{P}Q - 3P\mathfrak{Q}; + 6\mathfrak{P}^2.P - \tfrac{3}{2}P^3 = 0 \end{array}\right\} \text{III.}$$

Pro *quarto* denique *ordine* biquadrato K^4 affecto, aequationes erunt

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \frac{dd\mathfrak{S}}{dt^2} - \frac{2dS}{dt} - 3\mathfrak{S}; + 6\mathfrak{P}\mathfrak{R} + 3.\mathfrak{Q}^2; + 6\mathfrak{Q}P^2 + 12.\mathfrak{P}PQ \\ & \qquad - 3PR - \tfrac{3}{2}.Q^2 \qquad - 12\mathfrak{P}^2.\mathfrak{Q}; \\ & \qquad + 5\mathfrak{P}^4 - 15\mathfrak{P}^2.P^2 + \tfrac{15}{8}.P^4 = 0 \\ \text{II.} & \frac{ddS}{dt^2} + \frac{2d\mathfrak{S}}{dt}; - 3\mathfrak{P}R - 3P\mathfrak{R} - 3\mathfrak{Q}Q; + 6\mathfrak{P}^2Q + 12P\mathfrak{P}\mathfrak{Q} \\ & \qquad - \tfrac{5}{2}P^2Q; \\ & \qquad - 10\mathfrak{P}^3.P + \tfrac{15}{8}\mathfrak{P}P^3 = 0 \end{array}\right\} \text{IV.}$$

12. Euolutio primi ordinis omnino eſt facillima, quia membra annexa deſunt, quare pro angulo quocunque μt ſemper erit $\mathfrak{M} = 0$ et $M = 0$, vnde etiam $\mathfrak{N}$ et N euaneſcerent, ſolo excepto caſu $\mu = 1$, quo caſu littera $\mathfrak{N}$ manet indeterminata pro qua igitur vnitatem ſcribere licet, quia iam habet

habet indefinitum coefficientem K, inde autem colligitur $N = -2$. Quocirca pro primo ordine hanc habemus ſolutionem: $\mathfrak{P} = \text{coſ.}\, t$; $P = -2\, \text{ſin.}\, t$. Hic euidens eſt angulum t ſimul anomaliam mediam terrae deſignare, quae vtique pari paſſu cum longitudine procederet, ſi terra a ſola vi Solari ſollicitaretur, quemadmodum hic aſſumimus, hac ſcilicet hypotheſi aphelium quieſceret, quippe quod nonniſi ob perturbationes motum adipiſcitur. Supra quidem hunc angulum t ab initio arietis computauimus et hanc ob rem, hic iſti angulo t conſtantem adiici oportebat, quae quum facile ſubintelligatur, eam breuitatis cauſſa omiſimus.

13. Progrediamur ergo ad ordinem ſecundum litteris $\mathfrak{Q}$ et Q contentum ac pro priore aequatione membrum annexum

$$3\, \mathfrak{P}^2 - \tfrac{3}{2} P^2 \text{ praebet } -\tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{2}\, \text{coſ.}\, 2\, t$$

pro altera vero aequatione membrum annexum

$$-3\, \mathfrak{P}\, P \text{ praebet } +3\, \text{ſin.}\, 2\, t.$$

Hic ergo pro parte conſtante ſeu angulo $\mu t = 0$, eſt $\mathfrak{M} = -\tfrac{3}{2}$ et $M = 0$, vnde definitur $\mathfrak{N} = -\tfrac{1}{2}$, tum vero $N = 0$, pro angulo autem $2t$, vbi $\mu = 2$ habemus $\mathfrak{M} = +\tfrac{9}{2}$ et $M = +3$, vnde colligimus $\mathfrak{N} = \tfrac{1}{2}$; $N = \tfrac{1}{4}$, pro ordine ergo ſecundo nacti ſumus

$$\mathfrak{Q} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\, \text{coſ.}\, 2\, t;\quad Q = +\tfrac{1}{4}\, \text{ſin.}\, 2\, t.$$

14. Hinc pro ordine tertio membra annexa prioris aequationis praebent vt ſequitur:

pro $\mathfrak{M}$

$$+6\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q} = -\tfrac{3}{2}\,\mathrm{coſ.}\,t + \tfrac{3}{2}\,\mathrm{coſ.}\,3\,t$$
$$-3\,P\,Q = +\tfrac{3}{4}\,\mathrm{coſ.}\,t - \tfrac{3}{4}\,\mathrm{coſ.}\,3\,t$$
$$+6\,\mathfrak{P}\,P^2 = +6.\,\mathrm{coſ.}\,t - 6.\,\mathrm{coſ.}\,3\,t$$
$$-4\,\mathfrak{P}^3 = -3.\,\mathrm{coſ.}\,t - 1.\,\mathrm{coſ.}\,3\,t$$
$$\overline{\tfrac{9}{4}\,\mathrm{coſ.}\,t - \tfrac{25}{4}\,\mathrm{coſ.}\,3\,t.}$$

Simili modo ex altera aequatione huius ordinis colligimus:

$$-3\,\mathfrak{P}\,Q = -\tfrac{3}{8}\,\mathrm{ſin.}\,t - \tfrac{3}{8}\,\mathrm{ſin.}\,3\,t$$
$$-3\,P\,\mathfrak{Q} = -\tfrac{9}{2}\,\mathrm{ſin.}\,t + \tfrac{3}{2}\,\mathrm{ſin.}\,3\,t$$
$$+6.\,\mathfrak{P}^2 P = -3.\,\mathrm{ſin.}\,t - 3\,\mathrm{ſin.}\,3\,t$$
$$-\tfrac{3}{2}.\,P^3 = +9.\,\mathrm{ſin.}\,t - 3\,\mathrm{ſin.}\,3\,t$$

ergo pro M

$$\overline{+\tfrac{9}{8}.\,\mathrm{ſin.}\,t - \tfrac{39}{8}.\,\mathrm{ſin.}\,3\,t.}$$

Hinc igitur pro priore angulo t, eſt $\mu = 1$, $\mathfrak{M} = \frac{9}{4}$ et $M = \frac{9}{8}$ vnde fit $\mathfrak{N} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{2\cdot 9}{8}}{0} = \frac{0}{0}$ ſicque hic valor foret indefinitus, quia autem iam ſupra termino coſ. t debitus coefficiens eſt tributus, hic poni oportet $\mathfrak{N} = 0$, ex quo fit $N = +\frac{9}{8}$. Pro altero autem angulo $3\,t$ ſeu $\mu = 3$, habemus $\mathfrak{M} = -\frac{25}{4}$ et $M = -\frac{39}{8}$ vnde deducimus $\mathfrak{N} = -\frac{3}{8}$ et $N = -\frac{7}{24}$ quocirca pro tertio ordine eruimus

$$\mathfrak{N} = +0.\,\mathrm{coſ.}\,t - \tfrac{3}{8}.\,\mathrm{coſ.}\,3\,t;\quad R = +\tfrac{9}{8}\,\mathrm{ſin.}\,t - \tfrac{7}{24}.\,\mathrm{ſin.}\,3\,t.$$

15. Ordini quarto hic non immoramur quoniam hanc inueſtigationem iam alibi fuſius docuimus atque ad praeſens inſtitutum ſufficit, motum regula-

rem

rem proxime tantum nouiſſe, cui quidem inſtituto ſolus primus ordo abunde ſufficeret, collectis autem his tribus ordinibus, binae coordinatae noſtrae x et y pro motu regulari ita ſunt expreſſae

$$x = -\tfrac{1}{2}K^2 + K\,\text{coſ.}\,t + \tfrac{1}{2}K^2.\,\text{coſ.}\,2t - \tfrac{3}{8}.\,K^3.\,\text{coſ.}\,3t$$
$$y = \quad -(2K - \tfrac{9}{8}K^3)\,\text{ſin.}\,2t + \tfrac{1}{4}K^2.\,\text{ſin.}\,2t - \tfrac{7}{24}K^3.\,\text{ſin.}\,3t.$$

Euolutio noſtrarum formularum accedente actione Veneris.

16. Propter actionem Veneris valores iſti pro x et y inuenti exigua quaedam incrementa accipient coefficiente minimo λ affecta, quo igitur haec incrementa inueniamus, veros valores coordinatarum x et y ſequenti modo repraeſentemus.

$$x = X + \lambda X' \text{ et } y = Y + \lambda Y'$$

ipſae autem coordinatae pro loco terrae erunt

$$\odot x = a(1 + x) = a(1 + X + \lambda X') \text{ et}$$
$$\text{♁} x = ay = aY + a\lambda Y'$$

vbi X et Y denotant valores modo ante inuentos ſcilicet

$$X = -\tfrac{1}{2}K^2 + K\,\text{coſ.}\,t + \tfrac{1}{2}K^2.\,\text{coſ.}\,2t - \tfrac{3}{8}K^3.\,\text{coſ.}\,3t$$
$$Y = -(2K - \tfrac{9}{8}K^3)\,\text{ſin.}\,t + \tfrac{1}{4}K^2.\,\text{ſin.}\,2t - \tfrac{7}{24}.\,K^3.\,\text{ſin.}\,3t$$

partes autem annexae $\lambda X'$ et $\lambda Y'$ ſunt eae ipſae quantitates, quas inueſtigari oportet, et quas manifeſtum eſt fore quam minimas, ita vt prae X et Y quaſi pro euaneſcentibus haberi queant. Ceterum hic

 monen-

monendum has litteras X et Y non eſſe confundendas cum iis quibus ſupra ſumus vſi.

17. Binae autem aequationes ex quibus hae determinationes elici debent, ita ſunt expreſſae

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2dy}{dt} - 3x, + 3xx - \tfrac{3}{2}yy, \ldots + \frac{\lambda aa}{vv}\operatorname{cof.}(\Phi - t) + \frac{\lambda a^3\left(1 + x - \frac{v}{a}\operatorname{cof.}(\Phi - t)\right)}{w^3} = 0$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2dx}{dt}, \; - 3xy \ldots + \frac{\lambda aa}{vv}.\operatorname{fin.}(\Phi - t) + \frac{\lambda aa}{w^3}(ay - v.\operatorname{fin.}(\Phi - t)) = 0$$

vbi vltimi termini littera λ affecti prae reliquis manifeſto ſunt quam minimi, deinde vero etiam membra quae ſupra annexa vocauimus prae membris principalibus etiam pro valde paruis ſunt habenda, quandoquidem ipſae quantitatos x et y prae vnitate ſunt ſatis exiguae, hanc ob cauſſam ſi hic velimus loco x et y valores modo indicatos $X + \lambda X'$ et $Y + \lambda Y'$ ſubſtituere, in membris annexis atque multo magis in poſtremis ſufficiet tantum partes principales X et Y adhibere, vnde quum per hypotheſin membra annexa deſtruantur a valoribus X et Y loco x et y ſubſtitutis aequationes quas adhuc reſolui oportet diuiſione per λ facta ita erunt comparatae:

$$\text{I. } \frac{ddX'}{dt^2} - \frac{2dY'}{dt} - 3X', + \frac{aa}{vv}\operatorname{cof.}(\Phi - t) + \frac{aa}{w^3}(a(1 + X) - v\operatorname{cof.}(\Phi - t)) = 0.$$

$$\text{II. } \frac{ddY'}{dt^2} + \frac{2dX'}{dt}, \qquad + \frac{aa}{vv}\operatorname{fin.}(\Phi - t) + \frac{aa}{w^3}(aY - v\operatorname{fin.}(\Phi - t)) = 0$$

18. Quia hic termini poſtremi ſolas quantitates cognitas complectuntur, quas ad quoduis tempus facile aſſignare licet, ſtatuamus breuitatis gratia

$$U = \frac{aa}{vv}\operatorname{cof.}(\Phi - t) + \frac{aa}{w^3}(a(1 + X) - v\operatorname{cof.}(\Phi - t))$$

et

et

$$V = \frac{aa}{vv} \text{ſin.} (\phi - t) + \frac{aa}{w^3}' a Y - v \text{ſin.} (\phi - t))$$

et poſterior aequatio ducta in dt et integrata ſtatim praebet:

$$\frac{dY'}{dt} + 2 X' + \int V dt = 0$$

vnde fit

$$\frac{dY'}{dt} = - 2 X' - \int V dt$$

qui valor in priori ſubſtitutus dat

$$\frac{ddX'}{dt^2} + X' + 2 \int V dt + U = 0$$

quam igitur integrari oportet.

19. Euadet autem haec aequatio integrabilis, multiplicando eam per dt coſ t, quippe integrale reperitur:

$$\frac{dX'}{dt} \text{coſ.} t + X' \text{ſin.} t + 2 \int dt. \text{coſ.} t \int V dt + \int U dt. \text{coſ.} t = 0$$

quae expreſſio facile reducitur ad hanc:

$$\frac{dX'}{dt}. \text{coſ.} t + X'. \text{ſin.} t + 2 \text{ſin.} t \int V dt - 2 \int V dt \text{ſin.} t + \int U dt \text{coſ.} t = 0$$

quae diuiſa per coſ. t^2 denuo redditur integrabilis. Sed multo facilius ſcopum attingemus ſi ipſam aequationem differentialem ſecundi gradus in dt ſin. t ducamus, tum enim integrale deprehenditur fore

$$\frac{dX'}{dt} \text{ſin.} t - X'. \text{coſ.} t + 2 \int dt \text{ſin.} t \int V dt + \int U dt. \text{ſin.} t = 0$$

quae pari modo reducitur ad hanc formam:

$$\frac{dX'}{dt} \text{ſin.} t - X'. \text{coſ.} t - 2 \text{coſ.} t \int V dt + 2 \int V dt \text{coſ.} t + \int U dt \text{ſin.} t = 0$$

20.

20. Ex his duabus aequationibus differentialibus primi gradus elidamus differentiale $d\,X'$, quod fit dum prima in ſin. t altera vero in $-$ coſ t ducitur, tum enim prodit

$$X' + 2\int V\,dt - 2\,\text{ſin.}\,t\int V\,dt.\,\text{ſin.}\,t + \text{ſin.}\,t\int U\,dt\,\text{coſ.}\,t \atop - 2\,\text{coſ.}\,t\int V\,dt.\,\text{coſ.}\,t - \text{coſ.}\,t\int U\,dt.\,\text{ſin.}\,t = 0$$

ſicque hinc impetramus

$$X' = -2\int V\,dt {+ 2\,\text{ſin.}\,t\int V\,dt.\,\text{ſin.}\,t - \text{ſin.}\,t\int U\,dt.\,\text{coſ.}\,t \atop + 2\,\text{coſ.}\,t\int V\,dt.\,\text{coſ.}\,t + \text{coſ.}\,t\int U\,dt.\,\text{ſin.}\,t}$$

Quo autem hinc facilius etiam alteram coordinatam y eruamus, vtamur formula iam ſupra inuenta

$d\,Y' = -2\,X'\,d\,t - d\,t\int V\,d\,t$, hoc eſt

$$dY' = +3\,dt\int V\,dt - 4.\,dt.\,\text{ſin.}\,t\int V\,dt\,\text{ſin.}\,t + 2\,dt\,\text{ſin.}\,t\int U\,dt.\,\text{coſ.}\,t \atop - 4.\,dt.\,\text{coſ.}\,t\int V\,dt.\,\text{coſ.}\,t - 2\,dt.\,\text{coſ.}\,t\int U\,dt.\,\text{ſin.}\,t$$

quas ſingulas partes ſequenti modo integramus

$$\int d\,t\int V\,d\,t = t\int V\,d\,t - \int V\,t\,d\,t$$

quae reductio autem nihil iuuat:

$$\int dt\,\text{ſin.}\,t\int V\,dt\,\text{ſin.}\,t = -\text{coſ.}\,t\int V\,dt.\,\text{ſin.}\,t + \int V\,dt.\,\text{ſin.}\,t\,\text{coſ.}\,t$$

$$\int dt\,\text{coſ.}\,t\int V\,dt\,\text{coſ.}\,t = +\,\text{ſin.}\,t\int V\,dt.\,\text{coſ.}\,t - \int V\,dt\,\text{ſin.}\,t.\,\text{coſ.}\,t$$

$$\int dt\,\text{ſin.}\,t\int U\,dt\,\text{coſ.}\,t = -\text{coſ.}\,t\int U\,dt\,\text{coſ.}\,t + \int U\,dt.\,\text{coſ.}\,t^2$$

$$\int dt\,\text{coſ.}\,t\int U\,dt\,\text{ſin.}\,t = +\,\text{ſin.}\,t\int U\,dt.\,\text{ſin.}\,t - \int U\,dt.\,\text{ſin.}\,t^2$$

vnde colligimus ſequentem valorem:

$$Y' = +3\int dt\int V\,dt + 4\,\text{coſ.}\,t\int V\,dt.\,\text{ſin.}\,t - 2\,\text{coſ.}\,t\int U\,dt\,\text{coſ.}\,t + 2\int U\,dt \atop - 4\,\text{ſin.}\,t\int V\,dt.\,\text{coſ.}\,t - 2\,\text{ſin.}\,t\int U\,dt.\,\text{ſin.}\,t.$$

21.

21. Ad quoduis ergo tempus valores vtriusque quantitatis X' et Y' elicuimus, quos concinnius adhuc ſequenti modo repraeſentare licet

$$X' = -2\int V\,dt + \operatorname{coſ}. t\left(\int dt\,(2V \operatorname{coſ}. t + U \operatorname{ſin} t)\right) + \operatorname{ſin}. t\left(\int dt\,(2V \operatorname{ſin} t \;\; U \operatorname{coſ}. t)\right)$$

$$Y' = +3\int dt \int V\,dt + 2\int U\,dt + 2\operatorname{coſ}. t\left(\int dt\; 2V \operatorname{ſin}. t - U \operatorname{coſ}. t)\right) - 2\operatorname{ſin}. t\left(\int dt\,(2V \operatorname{coſ}. t + U \operatorname{ſin} t)\right)$$

quemadmodum autem quouis caſu has formulas tractari conueniat, in ſequentibus fuſius ſumus explicaturi.

22. Quod autem ad conſtantes attinet, quae his integrationibus inuehuntur, eas his quatuor formis complecti licet:

I°. A; II°. B t; III^{io}. C coſ. t et IV°. D ſin. t

quarum prima locum medium reſpicit, ſecunda ad ipſum motum medium pertinet, duae autem poſtremae formulae ad locum aphelii reducuntur. Quare ſi iam ſupra haec elementa rite conſtituta eſſe aſſumimus, has quoque conſtantes in ſequentibus praetermittere poterimus. Verum quo melius has formulas expedire queamus, imprimis attendi oportet, actionem Veneris duabus contineri partibus, quarum prior denominatorem habet $v\,v$, poſterior vero w^{3}, illam quoniam ad Solem refertur partem Solarem vocemus, alteram vero qua Venus immediate in terram agit partem terreſtrem atque omnino conueniet has duas partes a ſe inuicem diſtingui.

23. Denique circa formulas coſ. t et ſin. t, quae in haec integralia ſunt ingreſſae obſeruandum eſt, angulum t catenus tantum eſſe introductum, quatenus eius differentiale eſt dt, neque idcirco terminum a quo iſtum angulum computari oportet, eſſe praeſcriptum, ſiquidem eadem integralia prodire deberent, ſi loco t ſcriberetur $t + \alpha$, ſcilicet iſta conſtans α in ipſa euolutione iterum ex calculo elidetur, quemadmodum mox clarius apparebit. Hoc ideo monendum duximus, ne quis putet hunc angulum t perinde atque illum qui ſupra eſt introductus a loco Aphelii eſſe computandum.

De parte priore actionis Veneris Solari dicta.

24. Hic igitur littera U denotabit formulam:

$$\frac{na}{vv}\,\text{coſ.}\,(\Phi - t)$$

pro priori aequatione, littera autem

$$V = \frac{na}{vv}\,\text{ſin.}\,(\Phi - t)$$

pro aequatione poſteriori. Haſque formulas iterum ſubdiuidere licet, quatenus vel ad ſolum motum medium ſpectamus, vel etiam excentricitatis Veneris rationem habere velimus, quod poſterius ſuperfluum videri poteſt, quum orbita Veneris minimam habeat excentricitatem, vnde vix vllus effectus in perturbationem Terrae oriri poteſt.

25. Denotet igitur b diſtantiam mediam Veneris a Sole et quia excentricitatem negligimus, habebimus $v = b$, tum vero angulus Φ longitudinem

Vene-

Veneris mediam deſignabit, ideoque angulus $\Phi - \mathfrak{v}$ elongationem mediam Veneris a Terra e Sole ſpectatam. Deſignemus igitur hanc elongationem angulo $= p$, qui quum tempori ſit proportionalis, ponamus $\frac{dp}{dt} = m$ hinc igitur erit

$$U = \frac{aa}{bb} \operatorname{coſ.} p \quad \text{et} \quad V = \frac{aa}{bb} \operatorname{ſin.} p.$$

Vnde colligimus

$$2\,V \operatorname{coſ.} t + U \operatorname{ſin.} t = \frac{aa}{bb} \left(\tfrac{1}{2} \operatorname{ſin.} (p-t) + \tfrac{3}{2} \operatorname{ſin.} (p+t) \right)$$

$$2\,V \operatorname{ſin.} t - U \operatorname{coſ.} t = \frac{aa}{bb} \left(+ \tfrac{1}{2} \operatorname{coſ.} (p-t) - \tfrac{3}{2} \operatorname{coſ.} (p+t) \right).$$

26. His igitur notatis ſingulae formulae integrales, quae valores X' et Y' conſtituunt ſequenti modo ſe habebunt:

$$\int V\, dt = \frac{aa}{bb} \int \operatorname{ſin.} p.\, dt = -\frac{aa}{bb} \cdot \frac{\operatorname{coſ.} p}{m}$$

$$\int dt (2\,V \operatorname{coſ.} t + U \operatorname{ſin.} t) = \frac{aa}{bb} \int dt \left(\tfrac{1}{2} \operatorname{ſin.} (p-t) + \tfrac{3}{2} \operatorname{ſin.} (p+t) \right)$$

$$= -\frac{aa}{bb} \left(\frac{\operatorname{coſ.} (p-t)}{2(m-1)} + \frac{3 \operatorname{coſ.} (p+t)}{2(m+1)} \right)$$

$$\int dt (2\,V \operatorname{ſin.} t - U \operatorname{coſ.} t) = \frac{aa}{bb} \int dt \left(\tfrac{1}{2} \operatorname{coſ.} (p-t) - \tfrac{3}{2} \operatorname{coſ.} (p+t) \right)$$

$$= \frac{aa}{bb} \left(\frac{\operatorname{ſin.} (p-t)}{2(m-1)} - \frac{3 \operatorname{ſin.} (p+t)}{2(m+1)} \right).$$

$$\int dt \int V\, dt = -\frac{aa}{bb} \cdot \frac{\operatorname{ſin.} p}{m\,m}; \quad \int U\, dt = \frac{aa}{bb} \cdot \frac{\operatorname{ſin.} p}{m}$$

vnde colligimus ipſas quantitates X' et Y'

$$X = \frac{aa}{bb} \left(\frac{2 \operatorname{coſ.} p}{m} - \frac{\operatorname{coſ.} p}{2(m-1)} - \frac{3 \operatorname{coſ.} p}{2(m+1)} \right) = \frac{aa}{bb} \cdot \frac{m - 2.\, \operatorname{coſ.} p}{m(m\,m-1)}$$

$$Y' = \frac{aa}{bb} \left(- \frac{3 \operatorname{ſin.} p}{m\,m} + \frac{2 \operatorname{ſin.} p}{m} + \frac{\operatorname{ſin.} p}{(m-1)} - \frac{3 \operatorname{ſin.} p}{m+1} \right) = \frac{aa}{bb} \left(\frac{(m^2 - 2m + 3) \operatorname{ſin.} p}{m\,m(m^2-1)} \right).$$

27. Omnino hic inſigne dubium occurrit, quod caſu $m = 1$ vtraque haec quantitas abeat in infini-

 tum,

tum, quod vtique maxime eſſet abſurdum, verum perpendendum eſt, hoc caſu angulum p, abire in t et quia iam ſupra vidimus ob conſtantes integrationum, ingredi talem formam indefinitam $A + Bt + C \operatorname{coſ.} t + D \operatorname{ſin.} t$, manifeſtum eſt illud infinitum conſtantibus C vel D tolli poſſe. Ceterum hic ipſe caſus $m = 1$ peculiarem meretur reſolutionem, tum enim erit angulus $p - t$ conſtans qui ſit α, vnde integrando erit

$$\int dt(2V \operatorname{coſ.} t + U \operatorname{ſin.} t) = \frac{aa}{bb}\left(\tfrac{1}{2} t \operatorname{ſin.} \alpha - \tfrac{3}{4} \operatorname{coſ.}(p+t)\right)$$

$$\int dt(2V \operatorname{ſin.} t - U \operatorname{coſ.} t) = \frac{aa}{bb}\left(\tfrac{1}{2} t \operatorname{coſ.} \alpha - \tfrac{3}{4} \operatorname{ſin.}(p+t)\right)$$

quamobrem hoc caſu conſequimur

$$X' = \frac{aa}{bb}\left(2 \operatorname{coſ} p + \tfrac{1}{2} t . \operatorname{ſin.}(t+\alpha) - \tfrac{3}{4} \operatorname{coſ.} p\right) = \frac{aa}{bb}\left(\tfrac{5}{4} \operatorname{coſ.} p + \tfrac{1}{2} t . \operatorname{ſin.}(t+\alpha)\right)$$

$$Y' = \frac{aa}{bb}\left(- \operatorname{ſin.} p + t \operatorname{coſ.}(t+\alpha) - \tfrac{3}{2} \operatorname{ſin.} p\right) = \frac{aa}{bb}\left(- \tfrac{5}{2} \operatorname{ſin.} p + t \operatorname{coſ.}(t+\alpha)\right).$$

Vbi notandum his formulis

$$\tfrac{1}{2} t \operatorname{ſin.}(t + \alpha) \quad \text{et} \quad t \operatorname{coſ.}(t + \alpha)$$

motum aphelii terrae innui.

28. Hactenus tantum ad motum medium Veneris reſpeximus neglecta excentricitate, interim tamen operae pretium eſt etiam huius rationem habere, ſit igitur $\varkappa$ iſta excentricitas et angulus q anomalia media Veneris fiatque $dq = n\,dt$, quo poſito habebimus vti conſtat

$$v = b(1 + \varkappa \operatorname{coſ.} q) \quad \text{et} \quad \Phi = \zeta - 2\varkappa \operatorname{ſin.} q,$$

denotante ζ longitudinem mediam, ita vt ſit $\zeta - t = p$, quum ergo iam ſit

$$\Phi - t = p - 2\varkappa \operatorname{ſin.} q$$

erit

erit

$\text{ſin.}(\Phi - t) = \text{ſin.}\,p - 2\varkappa\,\text{ſin.}\,q\,\text{coſ.}\,p$ et $\text{coſ.}(\Phi - t) = \text{coſ.}\,p + 2\varkappa\,\text{ſin.}\,p.\,\text{ſin.}\,q.$

Ergo quia

$$\frac{1}{vv} = \frac{1}{bb}(1 - 2\varkappa\,\text{coſ.}\,q),$$

hinc colligemus:

$$U = \frac{aa}{bb}(\text{coſ.}\,p - 2\varkappa\,\text{coſ.}(p+q)) \text{ et } V = \frac{aa}{bb}(\text{ſin.}\,p - 2\varkappa\,\text{ſin.}(p+q)).$$

29. Quoniam autem ea quae a partibus potioribus oriuntur iam expidiuimus, ſumamus tantum

$$U = +\frac{\varkappa aa}{bb}(-2\,\text{coſ.}(p+q)) \text{ et } V = \frac{\varkappa aa}{bb}(-2\,\text{ſin.}(p+q))$$

hincque porro

$$2\,V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t = \frac{\varkappa aa}{bb}(-\text{ſin.}(p+q-t) - 3.\text{ſin.}(p+q+t))$$

$$2\,V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t = \frac{\varkappa aa}{bb}(-\text{coſ.}(p+q-t) + 3\,\text{coſ.}(p+q+t))$$

atque hinc deducimus integralia noſtra

$$\int V\,dt = \frac{\varkappa aa}{bb}\left(\frac{2\,\text{coſ.}(p+q)}{m+n}\right)$$

$$\int dt\,(2\,V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t) = \frac{\varkappa aa}{bb}\left(+\frac{\text{coſ.}(p+q-t)}{m+n-1} + \frac{3\,\text{coſ.}(p+q+t)}{m+n+1}\right)$$

$$\int dt\,(2\,V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t) = \frac{\varkappa aa}{bb}\left(-\frac{\text{ſin.}(p+q-t)}{m+n-1} + \frac{3\,\text{ſin.}(p+q+t)}{m+n+1}\right)$$

$$\int dt \int V\,dt = \frac{\varkappa aa}{bb}\left(\frac{2\,\text{ſin.}(p+q)}{(m+n)^2}\right); \int U\,dt = \frac{\varkappa aa}{bb}\left(-\frac{2\,\text{ſin.}(p+q)}{m+n}\right).$$

30. Ex his itaque colligimus quaeſitos valores pro X' et Y' vti ſequuntur:

$$X' = \frac{\varkappa aa}{bb}\left(-\frac{4\,\text{coſ.}(p+q)}{m+n} + \frac{\text{coſ.}(p+q)}{m+n-1} + \frac{3\,\text{coſ.}(p+q)}{m+n+1}\right)$$

$$= \frac{\varkappa aa}{bb}\left(\frac{-2(m+n-2)}{(m+n)((m+n)^2-1)}\right).\,\text{coſ.}(p+q)$$

$$Y' = \frac{\varkappa aa}{bb}\left(+\frac{6.\,\text{ſin.}(p+q)}{(m+n)^2} - \frac{4\,\text{ſin.}(p+q)}{m+n} - \frac{2\,\text{ſin.}(p+q)}{m+n-1} + \frac{6.\,\text{ſin.}(p+q)}{m+n+1}\right)$$

$$= \frac{2\varkappa aa}{bb}\,\frac{(m+n)^2 - 2(m+n) + 3}{(m+n)^2((m+n)^2-1)}\,\text{ſin.}(p+q).$$

 Omnino

Omnino igitur ex parte Solari actionis Veneris oriuntur ſequentes valores pro noſtris X' et Y'

$$X' = \frac{aa}{bb} \cdot \frac{m-2}{m(m^2-1)} \text{coſ.} p - \frac{2\varkappa aa}{bb} \cdot \frac{m+n-2}{(m+n)((m+n)^2-1)} \text{coſ.}(p+q)$$

$$Y' = \frac{aa}{bb} \cdot \frac{(m^2-2m+3)}{mm(m^2-1)} \text{ſin.} p - \frac{2\varkappa aa}{bb} \left(\frac{(m+n)^2-2(m+n)+3}{(m+n)^2((m+n)^2-1)} \right) \text{ſin.}(p+q)$$

quas formulas quum in genere euoluere licuerit, manifeſtum eſt easdem etiam ad actionem, cuiusuis alius Planetae in terram agentis accommodari poſſe, quin etiam loco Terrae quemlibet alium Planetam primarium ſubſtituere licebit, ita vt ea quae hactenus ſunt tradita ad motum cuiusuis Planetae ab alio quocunque perturbatum transferri queant.

De parte altera terreſtri actionis Veneris.

31. Hic igitur habemus:

$$U = \frac{aa}{v^3}(a(1+X) - v\,\text{coſ.}(\Phi - t)) \text{ et } V = \frac{aa}{v^3}(aY - v\,\text{ſin.}(\Phi - t))$$

quas formulas gemino modo tractari conueniet, primo ſcilicet tam pro terra, quam pro Venere ad ſolum motum medium reſpiciemus, quae tractatio tamquam fundamentum conſtituet perturbationis totalis, quandoquidem perturbatio hinc enata, neque ab excentricitate terrae neque Veneris pendebit, ſed pro omnibus reuolutionibus easdem inaequalitates exhibebit a ſola elongatione Veneris a terra pendentes, dum contra ſi excentricitatis ratio habeatur, quaelibet reuolutio peculiarem euolutionem requireret, prouti ſcilicet rectae ⊙♁ et ⊙♀ reſpectu vtriusque lineae apſidum fuerint diſpoſitae.

32. Primum igitur ad motum medium tantum attendentes, habebimus 1°. $X = 0$ et $Y = 0$, tum vero erit $v = b$ et angulus $\Phi - t = p$, cui reſpondet numerus $m = \frac{dp}{dt}$ hinc autem deducitur diſtantia

$$♀ ♁ = w = \sqrt{(aa - 2bb \operatorname{cof.} p + bb)}$$

atque hinc pro noſtris formulis integrandis, fiet

$$U = \frac{a^2 (a - b \operatorname{cof.} p)}{(aa - 2ab.\operatorname{cof.} p + bb)^{3:2}} \text{ et } V = -\frac{aa}{w^3} b. \operatorname{ſin.} p$$

vnde porro deducimus

$$2V \operatorname{cof.} t + U \operatorname{ſin.} t = \frac{aa}{w^3}(a \operatorname{ſin.} t - \tfrac{1}{2} b. \operatorname{ſin.}(p-t) - \tfrac{3}{2} b \operatorname{ſin.}(p+t))$$

$$2V \operatorname{ſin.} t - U \operatorname{cof.} t = \frac{aa}{w^3}(-a \operatorname{cof.} t - \tfrac{1}{2} b \operatorname{cof.}(p-t) + \tfrac{3}{2}. b \operatorname{cof.}(p+t))$$

vbi in ſubſidium calculi notaſſe iuuabit fore

$$w^2 = (a - b \operatorname{cof.} p)^2 + bb \operatorname{ſin.} p^2.$$

33. Tabulas autem Aſtronomicas motuum terrae et Veneris conſulentes, ſumta diſtantia terrae media $= 1$, reperimus diſtantiam mediam Veneris $b = 0,72340$, deinde quum motus medius Solis per 30 dies $29°. 34'. 10'' = 106450''$, Veneris autem per idem interuallum $48°. 3'. 54'' = 173034$ erit motus Veneris a terra $= 18°. 29'. 44'' = 66584$ hincque definitur numerus noſter $m = \frac{dp}{dt} = \frac{66584}{106450} = 0,62549$, ſicque angulo $t = 10°$, reſpondet angulus $p = 6°. 15'. 18''$ ideoque angulo $t = 5°$, reſpondebit $p = 3°. 7'. 39''$.

34. Hic autem ſtatim maxima difficultas occurrit in formula irrationali

$$w = \sqrt{(aa - 2ab \operatorname{coſ.} p + bb)}$$

quam nullo modo in ſeriem conuergentem reſoluere licet, id quod integratio more praecedente inſtituenda requireret, quam ob cauſſam integralia noſtra, mechanice tantum definire cogimur, id quod ſequenti modo praeſtari poterit. Incipiamus ab eiusmodi ſitu, quo terra et Venus erant in coniunctione veluti terra in T et Venus in V, a quo ſitu motum vtrinque per exigua interualla vsque ad coniunctionem ſequentem proſequamur. Haec autem interualla aequalia faciamus, quibus angulus $p = 5°$ reſpondeat, ita vt integra reuolutio in 72 momenta diuidatur, pro ſingulis autem fiet angulus $t = \frac{1}{m}. 5° = 7°. 59'. 37''$ pro quo commode 8° vſurpare liceret.

Tab. X. Fig. 2.

Pro ipſo ergo hoc initio ob $a = 1$, et $b = 0,72340$ et $p = 0$ reperitur $w = a - b = 0,27660$, hincque

$$U = 13,07060; \quad \text{et } V = 0$$

hinc ob $t = 0$

$$2 V \operatorname{coſ.} t + U \operatorname{ſin.} t = 0 \text{ et}$$

$$2 V \operatorname{ſin.} t - U \operatorname{coſ.} t = -13,07060.$$

Pro ſequentibus momentis calculus ita commodiſſime inſtituetur: ſumtis valoribus $a - b \operatorname{coſ.} p$ et $b \operatorname{ſin.} p$, quaeratur angulus A vt ſit tang. $A = \frac{b \operatorname{ſin.} p}{a - b \operatorname{coſ.} p}$ ſcilicet erit $A = ☉ ♁ ♀$, vnde ſtatim deducitur

$$♀ ♁ = \frac{b \operatorname{ſin.} p}{\operatorname{ſin.} A} = (a - b \operatorname{coſ.} p) \operatorname{ſec.} A$$

Deinde

Deinde inuentis U et V, quaeratur angulus B vt ſit tang. $B = \frac{2V}{U}$, tum enim reperietur

$$2\,V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t = \frac{U.\,\text{ſin.}\,(B+t)}{\text{coſ.}\,B} = U\,\text{ſin.}\,(B+t)\,\text{Sec.}\,B$$

$$2\,V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t = -\,U.\,\text{Sec.}\,B.\,\text{coſ.}\,(B+t).$$

Quare ſecundum haec praecepta, ſingula illa momenta euoluantur.

35. Secundum haec praecepta computata eſt ſequens tabula quae pro ſingulis momentis exhibet valores quantitatum p, t, Log. w, Log. U, Log. V, L($2\,V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t$), Log.($2\,V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t$).

p	t.	Log. w	Log. U
0	0.	9, 4418522	1, 1162956
5	7°. 59′. 37″	9, 4569345	1, 0753452
10	15. 59.	9, 4967064	0, 9686546
15	23. 59.	9, 5498767	0, 8292970
20	31. 58.	9, 6070652	0, 6842664
25	39. 58.	9, 6632535	0, 5472774
30	47. 58.	9, 7159907	0, 4243418
35	55. 57.	9, 7645091	0, 3165150
40	63. 57.	9, 8089831	0, 2222297
45	71. 56.	9, 8495749	0, 1402221
50	79. 56.	9, 8865906	0, 0685901
55	87 56.	9, 9205273	0, 0056333
60	95. 55.	9, 9515346	9, 9504210
65	103. 55.	9, 9800156	9, 9014878
70	111. 55.	0, 0060488	9, 8584063
75	119. 54.	0, 0301129	9, 8196290
80	127. 54.	0, 0522237	9, 7850291
85	135. 53.	0, 0726427	9, 7537930
90	143. 53.	0, 0914012	9, 7257964
95	151. 53.	0, 1086588	9, 7005732
100	159. 52.	0, 1245604	9, 6777106
105	167. 52.	0, 1391401	9, 6571146
110	175. 52.	0, 1524578	9, 6386393
115	183. 51.	0, 1646910	9, 6217770
120	191. 51.	0, 1757526	9, 6068236

Log. V.	L. P. I.	Log. P. II.
− ∞	− ∞	−1,1162956
0,4288710	+0,8434623	−1,0426259
0,6089295	1,0159197	−0,8264993
0,6227446	1,0174272	−0,4404008
0,5722346	0,9490722	−9,1687130
0,4955663	0,8490539	+0,1205327
0,4103764	0,7337769	+0,3099703
0,3244425	0,6107520	+0,3686832
0,2404967	0,4809425	+0,3789528
0,1602388	0,3444499	+0,3659349
0,0838607	0,1978678	+0,3392659
0,0111601	0,0359778	+0,3039294
9,9423053	9,8493453	+0,2632829
9,8766074	9,6144753	+0,2182427
9,8142179	9,2622612	+0,1699952
9,7539836	+7,8124342	+0,1182556
9,6960589	−9,1114274	+0,0638452
9,6397946	9,3644290	+0,0062803
9,5851749	9,4887634	+9,9460757
9,5317463	9,5604947	+9,8826492
9,4790488	9,6043823	+9,8159294
9,4269020	9,6305167	+9,7452747
9,3749909	9,6451575	+9,6704380
9,3225812	9,6507382	+9,5904115
9,2696513	−9,6505104	+9,5043127

p	*t.*	Log. *w*	Log. U
125	199. 50.	0, 1858533	9, 5931719
130	207. 50.	0, 1948645	9, 5812410
135	215. 50.	0, 2029675	9, 5705114
140	223. 49.	0, 2100971	9, 5612044
145	231. 49.	0, 2163564	9, 5530321
150	239. 49.	0, 2217224	9, 5460806
155	247. 48.	0, 2260475	9, 5408179
160	255. 48.	0, 2299155	9, 5355035
165	263. 47.	0, 2327592	9, 5318509
170	271. 47.	0, 2347756	9, 5292808
175	279. 47.	0, 2359843	9, 5277396
180	287. 46.	0, 2363861	9, 5272278

Log. V.	L. P. I.	Log. P. II.
9, 2151831	− 9,6451785	+ 9,4104024
9, 1590389	− 9,6366590	+ 9,3063203
9, 0999610	− 9,6246553	+ 9,1915869
9, 0371547	− 9,6120469	+ 9,0486173
8, 9689006	− 9,5975991	+ 8,8725635
8, 8931813	− 9,5827465	+ 8,6187154
8, 8071843	− 9,5683258	+ 8,0966748
8, 7036837	− 9,5532548	− 8, 1410493
8, 5740971	− 9,5395963	− 8,5767402
8, 3948218	− 9,5270811	− 8,7792723
8, 0917220	− 9,5158652	− 8,9115587
− ∞	− 9,5060048	− 9,0117288

36. Repraeſententur haec momenta more Geometrico, ſuper axe A O per interualla aequalia A B, B C, C D etc. et in his ſingulis punctis applicatae erigantur A a, B b, C c etc. referentes eas quantitates U vel V, vel 2 V coſ. t + U ſin. t vel 2 V ſin. t − U coſ. t quas integrari oportet, ita vt areae huius lineae curuae exhibeant integralia quaeſita, atque iam manifeſtum eſt, ſi inuenta fuerit area A akK, ſequentem A al L facile inueniri ſi ad illam addatur trapezium K kl L, cuius area proxime eſt $\frac{1}{2}$ K L (K k + L l), verum quia hoc interuallum K L quaſi eſſet $= dt$ eſt $= 7°. 59'. 37''$ eius valor in partibus radii expreſſus erit 0, 1394835 cuius log. eſt 9, 1438047 ſingula autem integralia ita capiamus, vt in ipſo initio A euaneſcant, hos igitur calculos ſequens Tabula exhibebit : Tab. X. Fig. 3.

p	$\int U\,dt$	$\int V\,dt$
0	+ 0	+ 0
Incr.	1,7383	0,1869
5.	1,7383	0,1869
Incr.	1,4760	0,4698
10.	3,2143	0,6567
Incr.	1,1178	0,5750
15.	4,3321	1,2317
Incr.	0,8066	0,5522
20.	5,1387	1,7839
Incr.	0,5815	0,4780
25.	5,7202	2,2619
Incr.	0,4299	0,3970
30.	6,1501	2,6589
Incr.	0,3292	0,3260
35.	6,4793	2,9849
Incr.	0,2604	0,2680
40.	6,7397	3,2529
Incr.	0,2122	0,2218
45.	6,9519	3,4847
Incr.	0,1776	0,1852
50.	7,1295	3,6699
Incr.	0,1520	0,1559
55.	7,2815	3,8258
Incr:	0,1324	0,1324
60.	7,4139	3,9582
Incr.	0,1176	0,1134
65.	+ 7,5315	+ 4,0716

$\int dt \int V\,dt$	$\int dt(2V\text{coſ}.t+U\text{ſin }t)$	$\int dt(2V\text{ſin}.t-U\text{coſ}\,t)$
+ 0	+ 0	− 0
0,0130	0,4855	− 1,6782
0,0130	0,4855	− 1,6782
0,0588	1,2077	− 1,2351
0,0718	1,6932	− 2,9133
0,1317	1,4470	− 0,6589
0,2035	3,1402	− 3,5722
0,2101	1,3440	− 0,2022
0,4136	4,4842	− 3,7744
0,2817	1,1110	+ 0,0816
0,6953	5,5952	− 3,6928
0,3426	0,8690	+ 0,2340
1,0379	6,4642	− 3,4588
0,3937	0,6612	+ 0,3048
1,4316	7,1254	− 3,1540
0,4390	0,4948	+ 0,3293
1,8706	7,6202	− 2,8247
0,4701	0,3646	+ 0,3283
2,3407	7,9848	− 2,4964
0,4991	0,2637	+ 0,3137
2,8398	8,2485	− 2,1827
0,5214	0,1854	+ 0,2922
3,3612	8,4339	− 1,8905
0,5454	0,1249	+ 0,2678
3,9066	8,5588	− 1,6227
0,5591	+ 0,0780	+ 0,2427
+ 4,4657	+ 8,6368	− 1,3800

p

p	$\int V\,dt$	$\int V\,dt$
65.	+7,5315	+4,0716
Incr.	0,1058	0,0977
70.	7,6373	4,1693
Incr.	0,0963	0,0848
75.	7,7336	4,2541
Incr.	0,0884	0,0741
80.	7,8220	4,3282
Incr.	0,0819	0,0650
85.	7,9039	4,3932
Incr.	0,0765	0,0572
90.	7,9804	4,4504
Incr.	0,0719	0,0505
95.	8,0523	4,5009
Incr.	0,0680	0,0447
100.	8,1203	4,5456
Incr.	0,0647	0,0396
105.	8,1850	4,5852
Incr.	0,0619	0,0351
110.	8,2469	4,6203
Incr.	0,0595	0,0311
115.	8,3064	4,6514
Incr.	0,0574	0,0270
120.	8,3638	4,6784
Incr.	0,0556	0,0244
125.	8,4194	4,7028
Incr.	0,0541	0,0214
130.	+8,4635	+4,7242

$\int V\, dt$	$\int dt (2V \cos. + U \sin. t)$	$\int dt (2V \sin. t - U \cos. t)$
+ 4,4657	+ 8,6368	− 1,3800
0,5738	+ 0,0415	+ 0,2181
5,0395	+ 8,6783	− 1,1619
0,5865	+ 0,0132	+ 0,1944
5,6260	+ 8,6915	− 0,9575
0,5976	− 0,0086	+ 0,1721
6,2230	+ 8,6829	− 0,7954
0,6073	− 0,0251	+ 0,1514
6,8309	+ 8,6578	− 0,6440
0,6158	− 0,0376	+ 0,1322
7,4467	+ 8,6202	− 0,5118
0,6232	− 0,0467	+ 0,1146
8,0699	+ 8,5735	− 0,3972
0,6299	− 0,0533	+ 0,0987
8,6998	+ 8,5202	− 0,2985
0,6357	− 0,0578	+ 0,0843
9,3355	+ 8,4624	− 0,2142
0,6409	− 0,0605	+ 0,0713
9,9764	+ 8,4019	− 0,1429
0,6456	− 0,0618	+ 0,0598
10,6220	+ 8,3401	− 0,0831
0,6497	− 0,0622	+ 0,0495
11,2717	+ 8,2779	− 0,0326
0,6531	− 0,0618	+ 0,0401
11,9248	+ 8,2161	+ 0,0075
0,6563	− 0,0608	+ 0,0320
+ 12,5811	+ 8,1553	+ 0,0395

p	$\int U\,dt$	$\int V\,dt$
130.	+ 8,4635	+ 4,7242
Incr.	0,0525	0,0188
135.	8,5160	4,7430
Incr.	0,0512	0,0163
140.	8,5672	4,7593
Incr.	0,0501	0,0140
145.	8,6173	4,7733
Incr.	0,0493	0,0119
150.	8,6666	4,7852
Incr.	0,0487	0,0099
155.	8,7153	4,7951
Incr.	0,0481	0,0080
160.	8,7634	4,8031
Incr.	0,0476	0,0061
165.	8,8110	4,8092
Incr.	0,0473	0,0043
170.	8,8583	4,8135
Incr.	0,0471	0,0026
175.	8,9054	4,8161
Incr.	0,0469	0,0009
180.	+ 8,9523	+ 4,8170

37. Hinc iam facile colligentur valores tam ipſius X' quam Y', ope formularum traditarum §. 21. quos in ſequente Tabula exhibebimus, iis autem inſuper adiungemus, perturbationis priores illas partes ex actione Solari oriundas, neglecta ſcilicet excen-

$\int dt\int V dt$	$\int dt(2V\,\text{coſ}.t+U\,\text{ſin}.t)$	$\int dt(2V\,\text{ſin}.t-U\,\text{coſ}.t)$
+12,5811	+8,1553	+0,0395
+0,6591	−0,0594	+0,0249
+13,2402	+8,0959	+0,0644
+0,6616	−0,0578	+0,0186
+13,9018	+8,0381	+0,0830
+0,6638	−0,0560	+0,0130
+14,5656	+7,9821	+0,0960
+0,6656	−0,0541	+0,0082
+15,2312	+7,9280	+0,1042
+0,6670	−0,0524	+0,0038
+15,8982	+7,8756	+0,1080
+0,6682	−0,0507	+0,0000
+16,5664	+7,8249	+0,1080
+0,6692	−0,0490	−0,0035
+17,2356	+7,7759	+0,1045
+0,6699	−0,0475	−0,0068
+17,9055	+7,7284	+0,0977
+0,6704	−0,0462	−0,0099
+18,5759	+7,6822	+0,0888
+0,6707	−0,0451	−0,0130
+19,2466	+7,6371	+0,0758

excentricitate Veneris, inuenimus autem ſupra iſtam partem priorem pro angulo p

$$X' = \frac{aa}{bb}\cdot\frac{m-2}{m(m^2-1)}\,\text{coſ}.\,p = +6,8980.\ \text{coſ}.\,p$$

coefficientis Logarithmo exiſtente +0,8387228

$$Y' = \frac{aa}{bb}\cdot\frac{m^2-2m+3}{mm(mm-1)}\,\text{ſin}.\,p = -17,17201.\ \text{ſin}.\,p$$

coefficientis Logarithmo exiſtente = −1,2348211.

 Tabu-

Tabula pro X et Y

pro X

	pars I.	pars II.	totum
$p=0$	+6, 8980	0	+ 6, 8980
5°	+6, 8717	− 0, 1266	+ 6, 7451
10	+6, 7932	− 0, 4879	+ 6, 3053
15	+6, 6629	− 1, 0463	+ 5, 6166
20	+6, 4820	− 1, 7619	+ 4, 7201
25	+6, 2517	− 2, 6075	+ 3, 6442
30	+5, 9738	− 3, 5586	+ 2, 4152
35	+5, 6505	− 4, 5935	+ 1, 0570
40	+5, 2841	− 5, 6971	− 0, 4130
45	+4, 8776	− 6, 8664	− 1, 9888
50	+4, 4339	− 8, 0471	− 3, 6132
55	+3, 9565	− 9, 2368	− 5, 2803
60	+3, 4490	−10, 4127	− 6, 9637
65	+2, 9152	−11, 5599	− 8, 6447
70	+2, 3593	−12, 6624	−10, 3031
75	+1, 7853	−13, 6795	−11, 8942
80	+1, 1978	−14, 6178	−13, 4200
85	+0, 6012	−15, 4503	−14, 8491
90	+0, 0000	−16, 1661	−16, 1661
95	−0, 6012	−16, 7507	−17, 3519
100	−1, 1978	−17, 1934	−18, 3912
105	−1, 7853	−17, 4888	−19, 2741
110	−2, 3593	−17, 6309	−19, 9902
115	−2, 9152	−17, 6185	−20, 5337
120	−3, 4490	−17, 4516	−20, 9006
125	−3, 9565	−17, 1369	−21, 0934

Tabula pro X et Y

pro Y

pars I.	pro II.	totum
0	0	0
− 1, 4966	+ 0, 0570	− 1, 4396
− 2, 9819	+ 0, 1104	− 2, 8715
− 4, 4444	+ 0, 1943	− 4, 2501
− 5, 8732	+ 0, 3650	− 5, 5082
− 7, 2571	+ 0, 6679	− 6, 5892
− 8, 5861	+ 1, 1795	− 7, 4066
− 9, 8495	+ 1, 1940	− 7, 9355
− 11, 0379	+ 2, 9180	− 8, 1199
− 12, 1424	+ 4, 1953	− 7, 9471
− 13, 1545	+ 5, 7724	− 7, 3821
− 14, 0665	+ 7, 6534	− 6, 4131
− 14, 8716	+ 9, 8556	− 5, 0160
− 15, 5631	+ 12, 3567	− 3, 2064
− 16, 1364	+ 15, 1637	− 0, 9727
− 16, 5869	+ 18, 2406	+ 1, 6537
− 16, 9111	+ 21, 4890	+ 4, 5779
− 17, 1067	+ 25, 1991	+ 8, 0924
− 17, 1720	+ 28, 9657	+ 11, 7937
− 17, 1067	+ 32, 9341	+ 15, 8274
− 16, 9111	+ 37, 0350	+ 20, 1239
− 16, 5869	+ 41, 2379	+ 24, 6510
− 16, 1364	+ 45, 4968	+ 29, 3604
− 15, 5631	+ 49, 7646	+ 34, 2015
− 14, 8716	+ 54, 0061	+ 39, 1345
− 14, 0665	+ 58, 1742	+ 44, 1077

Tabula pro X et Y

pro X

$p = 0$	pars I.	pars II.	totum
130	−4, 4339	−16, 6785	−21, 1124
135	−4, 8776	−15, 9972	−20, 8748
140	−5, 2841	−15, 3761	−20, 6602
145	−5, 6505	−14, 5564	−20, 2069
150	−5, 9738	−13, 6464	−19, 6202
155	−6, 2517	−12, 6658	−18, 9175
160	−6, 4820	−11, 6304	−18, 1124
165	−6, 6629	−10, 5642	−17, 2271
170	−6, 7932	− 9, 4742	−16, 2674
175	−6, 8717	− 8, 4145	−15, 2862
180	−6, 8980	− 7, 3758	−14, 2738

Tabula pro X et Y

pro Y

pars I.	pars II.	totum
− 13, 1545	+ 6[illegible], 2157	+ 49, 0612
− 12, 1424	+ 66, 1272	+ 53, 9040
− 11, 0379	+ 69, 8504	+ 58, 8125
− 9, 8495	+ 73, 3614	+ 63, 5119
− 8, 5861	+ 76, 6282	+ 68, 0421
− 7, 2571	+ 69, 6272	+ 72, 3701
− 5, 8732	+ 82, 344[illegible]	[illegible]
− 4, 4444	+ 84, 7664	+ 80, 3220
− 2, 9819	+ 86, 8883	+ 83, 9064
− 1, 4966	+ 88, 7097	+ 87, 2131
− 0	+ 90, 2364	+ 90, 2364

38. Quo autem facilius has determinationes ad vſum Aſtronomicum accommodemus, notandum eſt totum negotium ad valorem littterae Y' redire, ex quo facile ſtatim effectum perturbationis cognoſcere licet, quippe qui angulo perexiguo conſtat quem ad locum terrae ex Tabulis ſolitis deſumtum ſiue addere ſiue inde auferre oportet. Quum enim definiri debeat angulus $M \odot ♁$ ad longitudinem terrae mediam addendus eius tangens eſt $\frac{y}{1+x} = \frac{Y + \lambda Y'}{1 + X + \lambda X'}$ quem ergo angulum hic in duas partes diſtribui conuenit, quarum altera principalis ex ſolo motu regulari eſt petenda, cuius ergo tangens eſt X $\frac{Y}{1+X}$, quem angulum Tabulae Solares conſuetae exhibent, quem littera η indicemus, altera vero pars, ipſam perturbationem continens notetur littera ω, ita vt ad locum Terrae medium addi oporteat angulum $\eta + \omega$.

39. Quum igitur habeamus Tang. $(\eta + \omega) = \frac{Y + \lambda Y'}{1 + X + \lambda X'} = \text{Tang}\ \eta + \frac{\omega}{\cos.\eta^2}$; quoniam angulus ω prae η eſt vehementer paruus; tum vero ſit Tang. $\eta = \frac{Y}{1+X}$, hinc colligimus $\frac{\omega}{\cos.\eta^2} = \frac{\lambda Y'}{(1+X)^2}$ propterea quod quantitates $\lambda X'$ et $\lambda X'^2$ ſunt quaſi euaneſcentes. Praeterea vero quia angulus η eſt valde paruus eiusque coſinus vix ab vnitate differt tum vero etiam loco $1 + X$ tuto ſcribere licet 1, habebimus ſimpliciter $\omega = \lambda Y'$. Interim ſi etiam harum poſtremarum conditionum rationem habere velimus, reperitur $\omega = \frac{\lambda Y'}{(1+X)^2 + YY'}$,

quae

quae expreſſio a praecedente vix particula ſenſibili diſcrepabit.

40. Quoniam igitur tota perturbatio ω, quam hic quaerimus per ſolam quantitatem Y' determinatur, cuius valores modo ante vsque ad 180° exhibuimus, nunc accuratius nobis oſtendere incumbit, quemadmodum hi valores ad praxin accommodari queant. Supra autem iam innuimus, conſtantes per integrationes ingreſſas, ita capi debere vt poſt ſingulas reuolutiones, hae perturbationes iterum euaneſcant, quod etiam de dimidiis reuolutionibus eſt tenendum. Quare quum pro 180° valor ipſius Y' prodierit $+ 90, 0264$, ob conſtantes illas memoratas a quolibet valore ipſius Y' pro angulo ♀ ☉ ♁ ſubtrahi debet numerus proportionalis, ſcilicet

$$\frac{♀ ☉ ♁}{180} \cdot 90,0264 = ♀ ☉ ♁ \cdot 0,50014$$

vnde facile erit has correctiones in Tabulam ſuperiorem introducere.

41. Denique ſupereſt, vt valorem litterae λ conſideremus qui a ratione maſſae Veneris ad maſſam ſolarem pendet quae autem ratio adhuc plane eſt ignota. Satis probabile autem videtur Veneris maſſam vix a maſſa terrae diſcrepare propterea quod eius magnitudo non multum a terrae deficit, denſitas vero aliquanto maior cenſetur, quandoquidem planetae quo Soli ſunt propiores eo etiam denſiores aeſtimantur. Statuamus ergo Veneris maſſam ipſi maſſae terrae aequalem quam ex nouiſſimis paral-

laxis Solis obſeruationibus, colligimus $= \frac{1}{1003500}$ dum maſſa Solis vnitate referatur, hinc igitur babebimus $\lambda = \frac{1}{1003503}$ atque ex hoc valore ſingulos angulos ω, qui perturbationem continent ſupputemus: Si forte maſſa Veneris aliquanto maior vel minor eſſet, quantitates in ſequenti Tabula occurrentes in eadem ratione ſunt augendae vel minuendae. Praeterea notandum eſt argumentum p aequari angulo $\Phi - t$ ſeu deſignare elongationem mediam Veneris a Terra e Sole ſpectatam.

Tabula

Tabula oſtendens perturbationes motus terrae, ab actione Veneris ortas:

p	Sig. —	I. Sig. —	II. Sig. —	III. Sig. —	IV. Sig. —	V. Sig. —	*p*
0	0,0	13,8	21,6	20,6	13,0	4,4	30
1	0,5	14,2	21,7	20,4	12,7	4,1	29
2	1,0	14,6	21,8	20,2	12,4	3,9	28
3	1,5	15,0	21,9	20,0	12,1	3,7	27
4	2,0	15,4	22,0	19,8	11,8	3,5	26
5	2,4	15,7	22,1	19,6	11,5	3,3	25
6	2,9	16,1	22,2	19,4	11,2	3,1	24
7	3,4	16,5	22,2	19,2	10,9	2,9	23
8	3,9	16.8	22,3	19,0	10,6	2,7	22
9	4,4	17,1	22,3	18,8	10,3	2,5	21
10	4,8	17,4	22,3	18,5	10,0	2,3	20
11	5,3	17,8	22,3	18,3	9,7	2,1	19
12	5,8	18,1	22,3	18,1	9,4	1,9	18
13	6,3	18,4	22,3	17,9	9,1	1,7	17
14	6,8	18,7	22,2	17,6	8,8	1,6	16
15	7,3	18,9	22,2	17,3	8,5	1,5	15
16	7,8	19,2	22,2	17,1	8,2	1,3	14
17	8,3	19,5	22,1	16,8	7,9	1,1	13
18	8,8	19,7	22,1	16,5	7,6	1,0	12
19	9,2	19,9	22,0	16,2	7,3	0,9	11
20	9,6	20,1	21,9	15,9	7,0	0,8	10
21	10,1	20,3	21,8	15,7	6,7	0,6	9
22	10,6	20,5	21,7	15,4	6,4	0,5	8
23	11,0	20,7	21,6	15,1	6,1	0,4	7
24	11,4	20,9	21,5	14,8	5,9	0,3	6
25	11,8	21,0	21,3	14,5	5,7	0,2	5
26	12,2	21,2	21,2	14,2	5,4	0,2	4
27	12,6	21,3	21,1	13,9	5,1	0,1	3
28	13,0	21,4	21,0	13,6	4.8	0,1	2
29	13,4	21,5	20,8	13,3	4,6	0,0	1
30	13,8	21,6	20,6	13,0	4,4	0,0	0
p	+ XI. Sig.	+ X. Sig.	+ IX. Sig	+ VIII. Sig.	+ VII. Sig.	+ VI. Sig.	*p*

PHYSICA.

DE
CORDE LEONIS.

Auctore

C. F. WOLFF.

Quae circa muſculos et neruos in leone ſingularia reperi, in praecedenti Commentariorum tomo expoſui. Inter viſcera maxime cor notabile eſt ob multa ſingularia attributa. Eius itaque deſcriptionem nunc tradam, poſtquam effectus cuiusdam morboſi mentionem fecerim, quem cauſam mortis huius animalis fuiſſe exiſtimo.

Quum venae axillaris ortum ex thorace rimarem, laeſa fortuito pleura, magna copia ſanguinis ex thorace effluxit. Deinde quum hunc aperuiſſem, multum non modo itidem ſanguinis, tum fluidi, tum etiam coagulati in cauitate thoracis reperi, ſed pericardium quoque miro modo diſtentum et renitens inueniebatur, adeo, vt totam fere thoracis cauitatem repleret, pulmonibus ad poſtremam partem repulſis. Pericardio inciſo, ſanguis cum vi erupit coagulatus et niger; fruſtaque cruoris ad oui gallinacei magnitudinem exprimebantur. Cor, quod ex enormi volumine pericardii maximum fore iudicaueram, nihil, quoad magnitudinem in ſoliti habebat,

Cauſa mortis huius animalis.

bebat, et decimam vix partem pericardii occupabat, reliqua cauitate cruore nigro repleta. Caeterum cor flaccidum, ventriculis auriculis que collapſis, et ſanguine plane vacuis, facie anteriori, quae in aliis animalibus gibba eſſe ſolet, plana, rugis que minimis transuerſalibus notatu. Sanguinem cordis omnem et vaſorum in pericardio et thorace fuiſſe, vnde illa vacua eſſent, facile intelligebatur. Rupturam autem vaſis cuiusdam nuspiam reperi. In ſuperficie cordis quidem prope baſin, tum maxime in aorta, qua parte intra pericardium continetur excreſcentiae obſeruabantur figurae fere conicae, quarum maiores pollicem et vltra ad baſin latae et aeque longae erant. At hae in ſola tunica externa, quae a lamina interna pericardii continuatur, exiſtebant, a materia quadam tenaci, ibi depoſita, productae, nec vllam communicationem cum cauitate interna harum partium habebant. Veriſimile igitur eſt, ſanguinem per vaſa exhalantia pleurae et pericardii penetraſſe, quae, praecipue in pericardio, naturaliter etiam, ita comparata eſſe conſtat, vt ſerum, notabili rubedine tinctum, permittant, cuius ſemper aliqua portio in pericardio poſt mortem reperiri ſolet. An etiam ex ipſis ventriculis, tempore ſyſtoles, per parietes cordis, quos in leone mire tenues eſſe in ſubſequentibus dicam, ſanguis transſudanit? Exemplum in veſicula fellea habemus, quae, nullis vaſis, viam praebentibus, bilem perſpirare ſinit. Caeterum hanc ipſam extrauaſationem ſanguinis cauſam proximam mortis fuiſſe, dubium non

non eſt, ſiquidem cor non modo in ſua actione adeo impeditum inde fuit, vt dilatari non potuerit, ſed vaſa quoque et cor ipſum ſanguine omni priuata, cerebro nihil ſuppeditare potuerunt, vnde debilitatem primo, tandemque lipothymiam perpetuam, vel, ſi mauis, apoplexiae ſpeciem, oriri neceſſe fuit.

Pericardium, pro ſitu cordis, aliter atque in hominc, figura, ouo gallinaceo ſimili, gaudet, cuius vertex inferior, verſus diaphragma reſpiciens, acutior, ſuperior magis obtuſus eſt. In vertice inferiori pericardium diaphragmati non adhaeret, ſed mobile eſt, membranisque longis (*g. g*) a mediaſtino productis, tenuiſſimis, pellucidis et reticularibus, omento ſimilibus, ad diaphragma modo adligatur. Ad verticem ſuperiorem in parte anteriori proceſſus notabilis (*e*) a pericardio producitur, quo aorta eiusque rami complectuntur. Vena autem caua ſuperior, arteriae venaeque pulmonales et caua inferior ſeorſim ſingulae prodeunt lateraliter et verſus partem poſteriorem, pericardium ſimpliciter perforando. Pericardium. Tab. XI. Fig. 1. *a. b. c. d. e.*

In hoc pericardio, in media fere eius parte, cor ſitum erat, adeo, vt proceſſum (Fig. 1. *e.*) arteria innominata, ſubclauia ſiniſtra et ſuperior arcus aortae pars (fig. 2.) qua verſus dorſum curvari incipit, alamque longitudinis pericardii partem, proceſſui dicto aequalem, bulbus aortae adſcendens (fig. 2. *i.*) occuparet, et in ea regione, Situs cordis. Tab. XI. Fig. 1. 2.

vbi vena pulmonalis (fig. 1. *u.*) pericardio exit, cor ſua baſi inciperet et quantum longum eſt, (fig. 2 *e. b.*) deorſum ſe extenderet in parte pericardii poſteriori; vnde locus cordis in pericardio ex comparatione figurarum 1 et 2 facile intelligi poterit. Situs autem cordis in eo pericardii loco talis eſt, qualis in animalibus eſſe ſolet. Baſi nempe ſurſum et apice recta deorſum reſpicit. Superficies, quae in homine ſuperior eſt, anterior ob hunc ſitum, et quae inferior in homine, poſterior in leone, vt in reliquis animalibus quadrupedibus, euadit.

Figura cordis. Tab. XI. Fig. 2.

Sed figurae reſpectu cor leonis tam ab humano quam ab aliorum animalium cordibus differt. Et haec figura, non modo, quod ſingularis eſt, ſed ideo maxime notari meretur, quia ab interiori ſtructura cordis pendet, quae itidem in leone a reliquis animalibus differt, et in oeconomiam vitalem influxum ſibi vindicat. Vti in homine ſuperior cordis facies, ita in animalibus anterior eiusdem, quae illi reſpondet, ſemper notabili conuexitate gaudet. In homine quidem haec facies maxime prominet verſus baſin, in eo loco, vbi arteria pulmonalis exoritur, et in media ſui parte. Inde verſus anteriora maxime, paulo minus verſus poſteriora, decliuis in margines abit, quorum anterior acutior tenuiorque, poſterior obtuſior et craſſus eſt. In animalibus ea maxime differentia eſt, vt nullibi peculiariter haec facies promineat, ſed aequali modo conuexa ſit, neque margines proprie producat ſed cor potius teres ſeu conoideum efficiat, eo magis, cum

cum facies poſterior, cuius reſpondens inferior in homine plana eſt, itidem aliqua conuexitate gaudeat. Praeterea in ipſa hac ſuperficie ventriculi cordis in animalibus aeque ac in homine manifeſto diſtinguuntur, et ventriculus dexter ſiniſtro notabili parte altior ſitus eſt, adeo vt ſiniſter deorſum prominens ſolus apicem cordis efficiat, dexterque ad eundem nil conferat. Hinc apex cordis acutus et tota figura conoidea, vel in homine ſemiconoidea, oritur; cum, ſi ambo ventriculi aequali iure ad extremitatem vsque cordis producerentur, nullus apex anguſtior inde, nec figura conoidea cordi, ſed ouata, vel ſubrotunda potius ſuboriretur. In fele ventriculus dexter vix ad dimidiam longitudinem cordis deſcendit; dimidia huius pars inferior vna cum apice a ſolo ſiniſtro efficitur. Apex in illa multo quam in homine acutior eſt, et figura cordis longe maiori iure conoidea vocari poteſt. Horum omnium in leone nihil obſeruatur. Superficies anterior plana eſt aeque ac poſterior, et margines vtrinque formantur aequales, obtuſi, ſed minus craſſi. Ventriculi in exteriori ſuperficie cordis nullo modo diſtinguuntur. Fibrae enim, quae parietem ventriculi dextri exteriorem conſtituunt, quaeque in homine, in fele, in cane, in vitulo a parte ſepti anteriori oriuntur, ibique a fibris ſiniſtri ventriculi per rimam adipe et vaſis repletam, diſtinguuntur; hae fibrae in leone potius continuationes eſſe videntur fibrarum transverſalium ventriculi ſiniſtri, adeo, vt vterque ventriculus vno communi ſtrato fibrarum, transuerſa-

 lium

lium in ſuperficie exteriori tegatur; vnde ſingularis habitus cordi leonis conciliatur. Porro autem ventriculus dexter aeque ac ſiniſter ad extremitatem vsque inferiorem cordis ſe extendit. Inde apex anguſtior et acutior deficit, et totum cor leonis figuram nanciſcitur ſubrotundam et planam, cum in reliquis, quantum ſcio, animalibus quadrupedibus, ſaltim in vitulo, cane et fele aeque ac in homine, cor craſſum teres et conoideum exiſtat.

Auriculae Tab. XI. Fig. 2. *e. d.*

Auriculae minimae ſunt in corde leonis, in ſpecie dextra (*e.*) quae tanquam tuberculum crenatum baſi venae cauae ſuperioris adſidet, nec niſi ob analogiam cum aliis animalibus tanquam peculiaris pars cordis in hoc animali conſiderari poteſt. Hoc certum eſt, ſanguinis portiunculam, quae tempore ſyſtoles cordis in ea recipi poteſt, nullius plane momenti eſſe. Idemque valet de auricula ſiniſtra (*d.*).

Vaſorum maiorum diſtributio. Fig. 2.

Vaſorum maiorum diſtributio parum a ſtructura felina differt. Subclauia arteria ſiniſtra in fele non quidem ex eodem trunci communis apice, vnde carotides et dextra ſubclauia exſurgunt, ſed neque tamen ſeorſim ex arcu aortae, ſed potius ex facie poſteriori huius trunci communis prope baſin eiusdem oritur. Eadem in leone diſtincta ex arcu aortae prodit (*o.*) cum in homine ſolam dextram cum carotide dextra ex trunco communi, carotidem ſiniſtram vero et ſubclauiam ſiniſtram ſeorſim ex arcu aortae prodire notum ſit.

Inter

Inter omnia vero, quae in corde leonis et in ſyſtemate vaſorum ſanguineorum notaui, maxime, et quaſi ſola, memorabilis mihi viſa eſt magna inter ventriculos et reliqua vaſa, et porro intér truncos vaſorum et ramos ratio luminum, quae ita comparata eſt, vt neque anxia menſura neque ſubtiliori acumine ad eam obſeruandam opus ſit. Iam, quum neruos extremitatis ſuperioris euoluerem, inſignem mirabar paruitatem vaſorum brachialium proportione muſculorum et animalis (vid. Diſſ. priorem fig. 3. *e.*) Suſpicabar, totum ſyſtema vaſorum ad ſimilitudinem neruorum in hoc animali exiguum eſſe. Quo magis autem in detegendis vaſis ad cor accedebam, eo magis quoque haec vaſa increſcere videbam, donec ventriculi cordis aperti veram proprietatem ſyſtematis ſanguinei huius animalis docerent. Hi enim, vti vaſa extremitatum et carotides, earumque rami proportione animalis omnino parua putanda ſunt, reſpectu eodem merito magni dici poſſunt. De magnitudine ventriculorum cordis.

Neque haec magnitudo ventriculorum in corde leonis alios obſeruatores fugit. Pariſinos enim apud *Valentinum* in theatro Zootomico ſequentia verba de illis tradidiſſe lego: "*Subſtantia ipſius* (cor- „dis) *mollis apparuit, priusquam aperiretur, cognitum* „*vero eſt poſtea, ex eo id eſſe, quod parum haberet* „*carnis, et contra potius totum eſſet cauum. Ventri-* „*culi enim tam erant ampli, vt ſiniſter, qui ad cu-* „*ſpidem vsque protenditur*, (monui vero idem valere „de dextro,) *latitudinem pro carne haud maiorem re-* Aliorum Auctorum de ventriculis cordis et de corde leonis ſententiae.

„*linqueret*, *quae eo in loco ipſum tegit*, *quam duarum* „*linearum. Verſus baſin non plures habebat quam* „*ſeptem*, *quot etiam praeditum erat ſeptum fere.* „ Ex his igitur patet, in aliis leonum ſubiectis reſpectu ventriculorum cordis eadem, quae propoſui, obſeruata eſſe. Aliqua tamen ſunt, in quibus hi auctores a meis obſeruatis diſſentiunt. Figuram nempe cordi attribuunt oblongam, et "*cuſpidem valde acuminatam*„. In meo certe ſubiecto cor et planum fuit ob ipſam carnis tenuitatem et ventriculorum amplitudinem, et ſubrotundum, cuſpideque potius priuatum, cuius rei quoque ipſius cauſam adſignaui. Denique cor leonis "*multo maius* quoque *iuxta pro-* „*portionem*„ laudatis Auctoribus viſum eſt, "*quam* „*in vllo alio animali.*„ Sed de magnitudine huius viſceris in ſubſequentibus ex inſtituto dicam.

Ventriculi dextri figura. Tab. XII. Fig. 3.

Ventriculus dexter in leone primo intuitu oblongior quam in aliis animalibus eſſe videtur. Accuratiori tamen examine inſtituto patet, latitudine illum multo magis, quam longitudine ſuperare ventriculum felinum, humanum et vitulinum. Totus enim ventriculus in duas quaſi partes ſecundum longitudinem in leone diuiſus eſt, in anteriorem, quae ante ſeptum ſita eſt, et in poſteriorem, quae retro ſeptum abſconditur et anteriori magnitudine vix cedit. Aperto igitur ventriculo ſola anterior eius pars apparet, quae totam ventriculi longitudinem, dimidiam vero tantummodo latitudinem refert, vnde primo intuitu iſte ventriculus omnino multo

quam

quam in homine aliisque animalibus oblongior videri debet. Si vero ventriculus vna cum ſepto in planitiem extenderetur, haud multo ille minorem, quam cor ipſum, latitudinem haberet, eandemque fere figuram exprimeret.

Septum ſcilicet in ventriculo dextro valde conuexum eſt, ſed alio modo, quam eſſe ſolet in aliis animalibus et in homine. In his enim convexitas haec ſepti maxime a craſſitie carnis pendet; facies ſiquidem ſepti in ventriculum ſiniſtrum reſpiciens haud tanta concauitate praedita eſt, quantum conuexa eſt in ventriculo dextro, ſed potius plana eſt. In leone contra concauitas ſepti in ventriculo ſiniſtro conuexitati qua in dextrum ſpectat aequalis eſt, et tota haec conuexitas a ſepti complicatione pendet; neque in plurimis locis hoc ſeptum craſſitiem 5 vel 6 linearum excedit. In ſola parte infima vbi cum parietibus ventriculorum coniungitur craſſitie 10 linearum eſt. Adeoque ſeptum in corde leonis nonniſi lamina carnea eſt, ita complicata, vt concaua facies verſus ſiniſtrum, conuexa verſus dextrum ventriculum reſpiciat. In aliis animalibus vti in homine, denſa maſſa carnea vtrique ventriculo cordis recta interpoſita eſt. Caeterum haec ſepti facies dextra aequalis eſt, neque lacertis carneis, neque fiſſuris aut foueis, vt eſſe ſolet in aliis animalibus, praedita eſt; vnde omnino aliquod augmentum capacitati ventriculi accedit. In parte inferiori aliquot foraminula coeca exigua dantur. In parte ſuperiori filamentum exoritur (*o*. B.) in valuulae venoſae partem

Septum. Tab. XII. Fig. 3. *m*.

partem anteriorem inſertum, quod ipſum in fele non modo ſed etiam in homine inueniri ſolet.

Paries ventriculi dextri. Tab. XII. Fig. 3. *a. b. c. a e. d.*

Paries ventriculi dextri externus, tenuis eſt et laxus et amplior, quam qui requiritur ad ſeptum tegendum; adeo, vt notabile ſpatium inter concavitatem huius parietis et ſepti conuexitatem intercedat. Firmior duriorque contra in aliis animalibus caro, quae hunc parietem conſtituit, contigua ſepto incumbere ſolet. Craſſities carnis huius parietis in parte ſuperiori propo baſin remota adipe, quae illam in hoc loco tegit, 4 lineis aequalis eſt. Verſus apicem ſenſim tenuior illa euadit. In corde humano in quo ventriculus longe minor eſt, eandem craſſitiem inueni. In fele et in vitulo proportione cordis craſſities etiam quam in homine multo maior eſt.

Lacerti muſculoſi. Tab. XII. Fig. 3. *p. q. r.*

Neque huic parieti multi lacerti muſculoſi, quibus ventriculi cauitas occuparetur, adnati ſunt. Maximus eorum eſt, qui parti parietis anteriori adhaeret (*p. q. r.*). Ille bifurcatus eſt et apice ſuo in extremitatem dextram valuulae tricuſpidalis dictae anterioris inſeritur, quam totam ſolus hic faſciculus ſuſtinet. Alter, priori vicinus, (*p ſ.*) cum eiusque crure altero connexus ſimplicior eſt, et in valuulam poſteriorem inſeritur. Praeter hos in parte huius parietis ſuprema quaedam columnae ramificatae dantur (*s*). Valuulae venoſae pars ſiniſterior, quae ſepti faciei poſteriori adhaeret, meris filamentis ſuſtinetur. Generatim omnes hi faſciculi, quos enumeraui, adeo plani et tenues ſunt vt vix quid-

quidquam in imminuenda cauitate ventriculi poſſint; neque vllo modo comparari poſſunt cum validis craſſis columnis, papillis lacertisque, quibus ventriculi, longe minores, in corde humano et in aliorum animalium cordibus fere repleti ſunt.

In valuulis orificiorum nihil occurrit, quod notatu dignum ſit, vel quod aliquem influxum in oeconomiam vitalem leonis habere poſſet.

Magnitudinem vero huius ventriculi vt recte aeſtimemus, neceſſe eſt, vt comparetur non modo cum ventriculo cordis humani et felini, ſed magnitudo quoque cordis totius horum animalium in conſiderationem venire debet, vt non modo quantum ventriculus ille in vno animali maior quam in altero, ſed etiam, quantum proportione cordis maior ſit appareat. Longitudo igitur cordis in leone a principio aortae vsque ad apicem cordis in ſuperficie anteriori, quae plana eſt, inuenitur 5 poll. 3 lin. Circumferentia eiusdem in parte media inter baſin et apicem, vbi cor leonis maximam latitudinem habet, aequalis inuenta fuit 11 poll. 4 lin. Ad determinandam magnitudinem cordis humani menſuras cepi ex duobus ſubiectis diuerſis adultis, virilibus, mediocris ſtaturae et habitus. In altero horum hominum, qui vitam ſibi ſclopeto ſuſtulerat, cor mediocris magnitudinis erat aſpectu, et veluti in adultis eſſe ſolet. Id tamen habebat ſingulare vt ad baſin latius quam in parte media eſſet, indeque latera continuo et ſub rectis lineis fere in

Magnitudo ventriculi dextri cum eodem ventriculo cordis humani comparati.

apicem paulo acutiorem conuergerent, adeoque figuram efficerent, paulo magis triangularem quam ſolitum eſt. In altero, qui mortem laqueo ſibi intulerat, cor aeque ac vaſa paulo magis dilatata videbantur, adeo, vt cor hoc inter maiora referri poſſet, figurae caeterum frequentiſſimae. In priori igitur homine longitudo cordis, ſimili modo vti in leone, in ſuperficie ſuperiori ſumta, ab ortu arteriae aortae et pulmonalis vsque ad apicem aequalis fuit 4 poll. 10 lin. Circumferentia autem in eo loco, vbi cor maximam latitudinem et craſſitiem habebat, i. e. in hoc ſubiecto circa ipſam baſin, aequalis erat 10 poll. 1 lin. In homine poſteriori longitudo cordis, ſimili modo ſumta, 5 poll. circumferentia autem in parte, inter baſin et apicem ſita, baſi propiori, vbi cor hoc maximam latitudinem habuit, 9 poll. 10 lin. aequalis erat. Ex his, et iis, quae prius monui, longitudinem cordis humani mediam ſumendam eſſe colligo 4 poll. 10 lin. vel 58 lin. Circumferentiam autem 10 poll. vel 120 lin. Adeoque longitudo cordis humani ad longitudinem cordis leonis erit, vt 58:63. circumferentia autem vt 120: 136 vel 15: 17. Vnde nunc porro conſtabit, qua ratione inter ſe ventriculi cordis eſſe deberent, ſi leoni ventriculi cordis eſſent, humanis proportionati, et quantum maiores leonini humanis cenſendi ſunt, id eſt, quantum proportione cordis maiores ſunt. In homine priori longitudo ventriculi dextri a baſi valuularum ſemilunarium vsque in apicem ventriculi, quae

nempe

nempe longitudo ventriculi maxima eſt, filo ſuper ſeptum conuexum ducto, aequalis inuenta fuit 3 poll. 8 lin. In homine poſteriori eadem longitudo ſimili modo ſumta, aequalis erat 3 poll. 9 lin. Adeoque longitudo ventriculi dextri hominis media putari poteſt 3 poll. 8 lin. vel 44 lin. Circumferentia transuerſalis eiusdem ventriculi interna vel ambitus internus in eo loco, vbi ventriculus ampliſſimus eſt, filo vbique ſuper parietes internos ventriculi, adeoque et ſuper ſeptum conuexum, et retro lacertos muſculoſos ducto, in homine priori 5 poll. $1\frac{1}{2}$ lin. in poſteriori 5 poll. 6 lin. inuenitur; quorum ambituum internorum menſuram mediam ſumendam eſſe puto 5 poll. 4 lin. vel 64 lin. Quodſi igitur magnitudo ventriculi cordis in Icone ad magnitudinem cordis totius in eadem ratione eſſet, vti eſt in homine, longitudinem eiusdem eſſe oporteret 3 poll. $10\frac{1}{5}$ lin. ambitum autem 6 poll. $\frac{1}{2}$ lin. Iam vero longitudo ventriculi dextri in corde leonis ſimili prorſus modo ſumta vt in hominibus 4 poll. 7 lin. et ambitus eiusdem 9 poll. 6 lin. aequalis eſt. Ad iuſtam igitur proportionem, quam in homine obſeruamus, longitudo ventriculi leonis erit vt 55 : $46\frac{1}{5}$. ambitus autem eiusdem vt 114 : $72\frac{1}{2}$. Proinde *ventriculus ille fere* (non prorſus) *vna quinta parte iuſto longior, et multo plus quam vna tertia parte iuſto amplior eſt.*

Ne vero haec differentia, quae inter magnitudinem ventriculi dextri cordis leonini et humani intereſt, paruitati potius ventriculi humani, quam magni- **Magnitudo** ventriculi dextri cordis humani

ad cor felinum et vitulinum comparati.

magnitudini leonini adſcribenda eſſe videatur, felinum quoque et vitulinum cor metitus ſum. Illud quidem in catulo iuniori. Longitudo cordis felini, (hac ita, vt omnibus reliquis menſuris ſimili modo ſumta, vti in hominibus et in leone ſumſi), aequalis erat $15\frac{3}{4}$ lin. Circumferentia eiusdem maxima $29\frac{1}{8}$ lin. Pro hac magnitudine cordis ventriculus dexter, ſi eius magnitudo ad magnitudinem cordis in eadem ratione, vti in homine, eſſet, (longitudine nempe ventriculi ad longitudinem cordis, amplitudine eiusdem ad circumferentiam cordis relata,) eſſe deberet longitudine 12 linearum, non penitus quidem, ſed nonniſi minus vigeſima lineae parte quae nullius momenti eſt. Amplitudo autem huius ventriculi eſſe deberet $15\frac{1}{2}$ lin. Iam vero ſumma longitudo ventriculi dextri in hoc corculo felino nonniſi 10 lin. examuſſim et amplitudo $11\frac{1}{3}$ lin. inventa fuit. Vnde patet ventriculum dextrum cordis felini multo etiam humano ventriculo proportione cordis minorem eſſe. Cor vitulinum longitudine erat 4 poll. Circumferentia maxima prope baſin 8 poll. Ventriculus dexter igitur ſecundum proportionem humanam eſſe deberet 3 poll. et $\frac{3}{7}$ lin. Circumferentia autem 4 poll. $3\frac{1}{5}$ lin. Iam vero longitudo huius ventriculi nonniſi 2 poll. 1 lin. et circumferentia 3 poll 10 lin. fuit. Vnde patet, etiam in vitulino corde ventriculum dextrum proportione totius cordis multo quam in humano minorem eſſe. Differentia igitur, quae inter humanum et leoninum ventriculum inuenta fuit, non paruitati humani, ſed ſin-

ſingulari magnitudini ventriculi leonis adſcribenda erit; ſiquidem et feli et vitulo ventriculus humano potius minor exiſtit, nec veriſimile adeo eſt, vel caeteris praeter leonem quadrupedibus ventriculum hunc dextrum cordis multo maiorem humano facile inventum iri.

Ventriculus ſiniſter, qui, vti in homine, ita in reliquis quoque quadrupedibus non modo anguſtior et figurae oblongae, ſed apice quoque valde acuto terminatus eſſe ſolet, in leone multo latior eſt et fine inferiori gaudet valde obtuſo et dilatato. Adeoque figura eiusdem aeque ac dextri ventriculi ſubrotunda eſt et figuram cordis imitatur. *Ventriculi ſiniſtri figura. Tab. XIII. Fig. 4.*

Septum, qua parte in hunc ventriculum ſpectat, concauum eſt et laeue, excepta eius parte inferiori, quae foueis nonnullis maioribus (*m. m.*) iisque ſatis profundis praedita eſt. Lacertis autem muſculoſis fere caret, qui in aliis animalibus totam internam huius ventriculi ſuperficiem occupare ventriculumque fere replere ſolent. Ad eum locum, vbi paries ventriculi cum ſepto coniungitur, faſciculus ramificatus eſt (*i. k.*) ſed planus et parieti adglutinatus. Notabilis autem eſt ſimilis eiusmodi faſciculus (*l.*) qui proxime ſub valuulis ſemilunaribus orificium arterioſum circumdat, cuiusque adeo officium eſſe videtur, tempore ſyſtoles ſphincteris modo hoc orificium conſtringere. *Septum Fig. 4. h.*

Paries externus huius ventriculi latus, mollis et proportione aliorum animalium, certe tenui ſubſtantia carnea compoſitus eſt. Siquidem in parte ſupe- *Paries externus Fig. 4. a. b. B. et*

Lacerti muſculoſi. ſuperiori, non computata adipe nonniſi lineas quinque in inferiori nonniſi tres lineas craſſus eſt. Sed lacertis carneis, non multis quidem, ſed eo validioribus hic paries omnino inſtructus eſt. Omnes tamen filamentis ſuis tendineis in valuulam orificii venoſi inſeruntur; nec vlla datur, vt in homine et in aliis animalibus, eiusmodi columnarum, quae ortae ex vno loco ventriculi in alterum ſe inſerunt vel papillarum, quae tendinibus ſuis in parietes ventriculi inſeruntur. Et praeterea plani ſunt illi lacerti et dimidia ſui parte parieti cordis adnati. Quatuor eiusmodi lacertos muſculoſos numeraui, quorum alter (*o. p.*) ob magnitudinem ſuam praecipue notabilis eſt. Iſte ex variis quaſi, ſed plane in vnum concretis componitur, maximamque partem parietis externi occupat. Ortus a parte parietis infima, indeque porro vsque ad mediam fere partem eidem adnatus verſus valuulam venoſam adſcendit, diſperſusque in filamenta, minus longe numeroſa, quam in homine, in eam valuulam, maxime in partem eius poſteriorem, ſe inſerit, excepto filamentulo vnico, quod ramoſe in ſeptum diſpergitur. Prope hunc alius minor, nec debilis tamen faſciculus eſt (*w*) qui filamenta ſua in eandem valuulam, in eius partem anteriorem mittit. Deinde duo minores dantur, a prioribus tecti, qui filamenta ſua partibus valuulae anteriori et poſteriori promiſcue reddunt.

Valuulae ventriculi ſiniſtri. Tab. XIII. Fig. 4. Caeterum valuula venoſa ventriculi ſiniſtri integra membrana eſt et minus etiam quam in homine in duas valuulus diuiſa. Filamenta recipit pau-

pauciora ſed craſſiora a lacertis carneis, nec vllum eorum, vt fieri ſolet in homine, in ſuperficiem eius exteriorem inſeritur, ſed omnia in ipſum eius marginem fluitantem ſe immittunt; vnde valuulae alienus habitus oritur. In ſemilunaribus nihil eſt, quod notari meretur. *E. G. H. I*

De magnitudine ventriculi ſiniſtri.

Quod magnitudinem autem attinet ventriculi ſiniſtri, ea tantundem non modo, quantum dextri ventriculi magnitudo, ſed magis etiam magnitudinem humani et felini ventriculi ſuperat, adeo, vt ſingularitas haec in ventriculo ſiniſtro magis eluceat, quam in dextro. Sed vna tamen in eo ordine procedendi, quo vſus ſum in aeſtimando ventriculo dextro, et quem ad ſiniſtrum nunc applicabo, occurrit obſeruatio, quam forte vna mecum haud exſpectaſſes. Ea eſt ventriculi cordis vitulini circumferentia interna, quae quidem nullo modo aequalis eſt circumferentiae ventriculi leonis, neque comparari cum ea poteſt; ſed tamen humani ventriculi circumferentiam proportione ſuperat, quod eo magis miratus ſum, cum craſſities parietis huius ventriculi in vitulo enormis ſit et illam in homine multo ſuperet. Exponam autem obſeruationes ipſas et comparationes, quo ordine easdem de ventriculo dextro propoſui.

Magnitudo huius ventriculi ad cor humanum comparati.

In homine priori igitur longitudo ventriculi ſiniſtri eodem huc vsque vſitato modo ſumta a baſi valuularum ſemilunarium vsque ad apicem ventriculi aequalis inuenta fuit 3 poll. 4 lin. In homine

ne poſteriori 3 poll. 5 lin. Mediam igitur longitudinem ventriculi humani aequalem ſuppoſui 3 poll. 4 lin. vel 40 lin. Secundum hanc normam ventriculus ſiniſter in corde leonis proportione totius cordis eſſe deberet longitudine 3 poll. 7 et fere $\frac{1}{2}$ lin. Eſt autem longitudine 5 poll. Circumferentia ventriculi ſiniſtri in homine priori 3 poll. 6 lin. in poſteriori, cuius cor magnum et dilatatum videbatur, 4 poll. 2 lin. fuit. Mediam circumferentiam tamen 3 poll. 10 lin. vel 46 lin. poſui. Ergo circumferentia ventriculi ſiniſtri in corde leonis ſecundum proportionem humanam eſſe deberet 4 poll. $4\frac{1}{8}$ lin. et inuenitur 8 poll. 2 lin.

Magnitudo ventriculi ſiniſtri cordis humani ad cor felinum et vitulinum comparati.

Secundum eandem proportionem humanam longitudo ventriculi ſiniſtri in corculo illo felino, in quo dextrum ventriculum metitus ſum, eſſe deberet $10\frac{3}{4}$ lin. et inuenta eſt 9 linearum. Circumferentia eiusdem eſſe deberet 11 et fere $\frac{1}{5}$ linearum et aequalis fuit $10\frac{3}{4}$ lineis. In corde vitulino ventriculus ſiniſter longus eſſe deberet 2 poll. $9\frac{1}{13}$ lin. Longus eſt 2 poll. 9 lin. Circumferentia huius ventriculi eſſe deberet 3 poll. $\frac{4}{5}$ lin. quae aequalis inventa fuit 3 poll. 6 lin.

Magnitudo ventriculorum cordis leonis determinata.

Excepta igitur ſola hac poſteriori menſura, reliquae omnes in fele et vitulo tam pro dextro, quam pro ſiniſtro ventriculo inſtitutae, oſtendunt ventriculos cordis humani non paruos cenſendos, ſed inter maiores potius referendos eſſe; proinde magnitudinem ventriculorum cordis in leone non plus, quam

quam aequum eſt, extendi, ſi ventriculi cordis humani iuſtae magnitudinis et ſolitae pleriſque animalibus cenſentur, et tanquam norma conſiderantur, ad quam leonis ventriculos comparare et diiudicare oporteat. Quodſi igitur ventriculus in leone ſiniſter cuius longitudo ſecundum proportionem humanam 3 poll. $7\frac{1}{2}$ lin. et circumferentia 4 poll. $4\frac{1}{8}$ lin. eſſe deberet, longitudine gaudeat 5 poll. et circumferentia 8. poll. 2 lin. et ventriculus dexter, qui ſecundum humanam proportionem 3 poll. $10\frac{1}{5}$ lin. longus et in ambitu ſuo 6 poll. $\frac{1}{2}$ lin. eſſe deberet, longus ſit 4 poll. 7 lin. et ambitu gaudeat 9 poll. 6 lin.; *longitudo ventriculi ſiniſtri in leone ad iuſtam et ſolitam pleriſque animalibus longitudinem erit vt* $60 : 43\frac{1}{2}$ *et maior quam* 4 : 3. *Circumferentia vt* $98 : 52\frac{1}{8}$ *vel* $24\frac{1}{2} : 13\frac{1}{32}$ *et fere vt* 2 : 1. *Longitudo ventriculi dextri fere vt* 11 : 9 *eiusdemque circumferentia vt* $114 : 72\frac{1}{2}$. *Proinde ventriculus ſiniſter plus quam quarta parte ſolito longior et duplo fere amplior, dexter quinta fere longior et plus quam tertia amplior eſt. Ventriculus dexter multo ſolito maior, ſed ſiniſter ipſo dextro multo maior eſt.*

De craſſitie carnis, qua ventriculi cordis componuntur.

Extremam quoque tenuitatem carnis, qua ventriculi et cor totum efficiuntur, ad diiudicandam ventriculorum magnitudinem paucis expendere iuuabit. Sufficiet autem ſolam craſſitiem parietis ventriculi ſiniſtri, cuius menſura ob molem maiorem facilior et certior eſt, exempli loco producere, ex qua cognita etiam tenuiorum partium dimenſiones diiudicari aliqua ratione poterunt. In homine prio-

 ri

ri craſſities parietis ventriculi ſiniſtri maxima, quae prope baſin eſt, aequalis erat $8\frac{1}{2}$ lin. In poſteriori craſſitiem parietum non metitus ſum. Proportione illius craſſitiei, ad circumferentiam cordis relatae, eadem in vitulo $6\frac{1}{4}$ lin. in fele $2\frac{1}{7}$ lin. eſſe deberet. Eſt in vitulo pollicis totius vel 12 lin. in fele $3\frac{1}{4}$ lin. Vnde patet, vel enormis craſſitiei hos parietes ventriculorum ſiniſtrorum cordis vitulini et felini dicendos eſſe, qui quippe duplo fere humano craſſiores ſunt, vel valde tenuem putandum illum in corde humano. Et ſecundum hanc tenuem normam humanam, qui eſſe deberet 9 et fere $\frac{2}{3}$ lin. paries ventriculi ſiniſtri in corde leonis, vbi maximam craſſitiem habet, nonniſi 5 linearum eſt. Si igitur cor leonis cum cordibus felis et vituli compararetur, parum abeſſet, quin caro, qua haec efficiuntur, quadruplo craſſior ſit illa, qua cor leonis efficitur.

De ſtructura cordis generatim.

Vnde paulo aliter, quam in reliquis animalibus cor leonis conſtructum et comparatum eſſe videtur. Si enim ſingularem hanc tenuitatem parietum cordis et ſepti, et mollitiem, ſimulque enormem magnitudinem ventriculorum conſideraueris, cor leonis marſupio ſimile videtur, ſepto tenui, molli, complicabili in duas partes diuiſo. Sed eiusmodi idea minime conuenit vel humano vel reliquorum animalium cordibus, quae tanquam durae craſſaeque maſſae carneae potius conſiderari debent, paruis, pro mole carnis, cauitatibus intus inſtructae.

Magni-

Magnitudo autem cordis, quam determinare in ſuperioribus pollicitus ſum, pro mole corporis parua eſſe videtur. Longitudinem cordis vidimus eſſe 5 poll. 3 lin. Longitudo corporis a ſymphyſi maxillae inferioris, capite erecto, vsque ad ſymphyſin oſſium pubis, vel etiam a naribus vsque ad principium caudae erat pedum 5 et 11 poll. Mediocre cor humanum longitudine gaudet 4 poll. et 10 lin. ergo homo mediocris ſtaturae, ſi cor leonis proportionatum eſſet cordi humano, menſura ſumta a vertice capitis vsque ad oſſa pubis, vel ad principium oſſis coccygis eſſe deberet 5 pedum et 5 pollicum. Iam pars corporis humani a vertice capitis vsque ad oſſa pubis dimidiam circiter totius hominis longitudinem efficit. Ergo homo mediocris ſi cor leonis humano proportionatum eſſet, longitudine eſſe deberet 10 pedum et 10 poll. quam gyganteam magnitudinem, cum vix quisquam mortalium habeat, patet, cor leonis pro mole corporis inſigniter paruum eſſe.

De magnitudine cordis.

Verum enim quantumuis magni ſint ventriculi cordis in leone, ſi lumina vaſorum tum inter ſe tum ad ventriculos cordis in eadem ratione eſſent, vti ſunt in homine vel in aliis animalibus; nihil eſſet in his, quod vllam mutationem in functionibus cordis et vaſorum efficere poſſet. Sed aliter haec ſe habent omnino, et vti magni ſunt ventriculi reſpectu cordis, ita magni iidem quoque ſunt reſpectu vaſorum et magni porro in his trunci ſunt reſpectu ramorum.

De ratione arteriarum ad ventriculos cordis.

Aortae ratio ad ventriculum ſiniſtrum, vti ſe habeat ad eandem rationem in homine.

Aorta, vbi primum ex corde emergit, ambitu gaudet externo (nam tunicas vaſorum ſine errore proportionatas ſupponi poſſe exiſtimo,) in homine priori 3 poll. $1\frac{1}{2}$ lin. in poſteriori, cui ambitus ventriculi ſiniſtri maior, 3 poll. 5 lin. Medium ponamus 3 poll. 3 lin. Ambitus igitur radicis aortae in leone proportione ambitus ventriculi ſiniſtri ſecundum hanc normam eſſe deberet 6 poll. $11\frac{1}{12}$ lin. ergo fere 7 poll. ſed inuenitur $3\frac{1}{2}$ poll. Duplo ergo fere aorta in homine proportione ventriculi ſui ex quo oritur, quam in leone amplior eſt.

Rationes vaſorum ad ventriculos cordis in vitulo et in fele, vti ſe habeant ad rationem humanam. Scholion.

Nunc verum quidem eſt, rationem aortae ad ventriculum ſuum in vitulo ob inſignem huius ventriculi circumferentiam, quam notaui, itidem minorem eſſe quam in homine, ſed multo tamen magis haec ratio vitulina maior leonina eſt, quam minor humana. Nimirum ambitus aortae orientis in vitulo eſt 2 poll. 5 lin. et eſſe deberet, ſi aequalis homini et vitulo ratio eſſet, 2 poll. $11\frac{1}{2}$ lin. Sexta igitur parte vna quam in homine minor eſt, ſed tribus quintis partibus quam in leone maior. In fele eadem fere quam in homine eſt. Secundum humanam proportionem ambitus aortae eſſe deberet $9\frac{1}{8}$ lin. et inuenitur 9 lin. Similique modo comparatum eſſe reperi, cum continuatione aortae eiusque ramis. Nimirum vbique hi rami proportione ventriculi ſui paulo anguſtiores ſunt in vitulo quam in homine, vt tamen cum mira illa anguſtia, quae in ramis ſimilibus leonis obſeruatur, nullo modo comparari

parari poſſint, et vbique iidem aequales fere proportione ventriculi humanis inueniuntur in fele.

Ratio ſubclauiae dextrae.

Subclauia dextra in homine priori 1 poll. 3 lin. in poſteriori 1 poll. $6\frac{1}{2}$ lin. erat. Medium ſumamus 1 poll. 5 lin. Subclauia dextra igitur in leone proportione ventriculi ſiniſtri eſſe deberet 3 poll. $\frac{5}{13}$ lin. Eſt autem 1 poll. 5 lin.

Carotidum.

Carotidum, quarum dextram ſiniſtrae, in hominibus aeque ac in leone, aequalem reperi, circumferentia in homine vtroque prope baſin erat 1 poll. Adeoque carotides in leone proportione ventriculi ſiniſtri eſſe deberent 1 poll. $11\frac{9}{13}$ lin. ergo fere 2 poll. vel 24 lin. Sunt autem circumferentia 8 linearum, et triplo igitur humanae ampliores ſunt.

Subclauiae ſiniſtrae.

Subclauia ſiniſtra in homine priori 1 poll. 1 lin. in poſteriori 1 poll. 2 lin. Medium igitur 1 poll. $1\frac{1}{2}$ lin. Subclauia ſiniſtra ergo in leone eſſe deberet 2 poll. $3\frac{2}{3}$ lin. Eſt tantummodo 1 poll.

Aortae poſt ramos maiores.

Aorta, poſtquam ramos maiores edidit, proxime poſt ſubclauiam ſiniſtram in homine priori eſt 2 poll. 8 lin. in poſteriori 2 poll. 11 lin. Medium 2 poll. $9\frac{1}{2}$ lin. In leone igitur aorta in hoc loco eſſe deberet 5 poll. $11\frac{1}{3}$ lin. ergo fere 6 poll. Eſt tantummodo 3 poll. 1 lin.

Aortae deſcendentis.

Aorta vbi perfecto arcu ad corpora vertebrarum dorſi ſe applicat et verticaliter deſcendere incipit, in homine priori 2 poll. 8 lin. in poſteriori

 2 poll.

2 poll. 6 lin. et circumferentia media igitur 2 poll. 7 lin eſt. In leone igitur proportione ventriculi eſſe deberet 5 poll. $6\frac{1}{23}$ lin. Eſt 2 poll.

Aortae prope diaphragma.

Aorta denique thoracica prope tranſitum per diaphragma in homine priori 2 poll. 6 lin. in poſteriori nonniſi 2 poll. 2 lin. et circumferentia media 2 poll 4 lin. eſt. Eadem ergo in leone eſſe deberet 4 poll. $11\frac{15}{23}$ lin. Ergo fere 5 poll. Et nonniſi 1 poll. 9 lin. inuenitur.

Et partis prioris arcus aortae ad ventr. ſin. rationes vti ſint ad humanas.

Caeterum Aortae in media parte inter cor et egreſſum maiorum ramorum, vbi in leone, vti in homine, amplior eſt, nec non proxime ante egresſum eorundem, vbi iterum anguſtior redditur eandem fere erga ventriculum rationem habet, quam in ipſo principio et proxime poſt edita vaſa maiora. Nimirum in parte media inter cor et egreſſum vaſorum circumferentiam aortae mediam in hominibus reperi 3 poll. 4 lin. In leone igitur eſſe deberet 7 poll. $1\frac{5}{23}$ lin. et inuenitur 3 poll. 10 lin. Proxime autem ante vaſa maiora in hominibus circumferentia aortae eſt 3 poll. 1 lin. In leone eſſe deberet 6 poll. $6\frac{15}{23}$ lin. et inuenitur 3 poll. $6\frac{1}{2}$ lin.

Arteriae pulmonalis trunci.

Denique arteria pulmonalis in homine priori 2 poll. 10 lin. eſt. In leone igitur, ſi in eadem, quam in homine priori erga ventriculum dextrum ratione eſſet, eſſe deberet 5 poll. $3\frac{1}{47}$ lin. Eſt 3 poll. 4 lin.

Arteriae pul. dextrae.

Arteria pulmonalis dextra in homine priori 2 poll. 2 lin. In leone proportione ventriculi dextri eſſe deberet 4 poll. $\frac{1}{5}$ lin. Eſt 2 poll.

Arte-

Arteria pulmonalis ſiniſtra in homine priori 2 poll. 4 lin. In leone ad hanc normam eſſe deberet 4 poll. 3 $\frac{1}{12}$ lin.. Eſt 1 poll. 10. lin.

et ſiniſtrae ad ventricul. dextr. rationes vti ſint ad humanas.

Ex his igitur patet, truncos arteriarum, in comparatione ad humanam ſtructuram, proportione ventriculorum ſuorum valde paruos, ſed ramos ipſis truncis tamen minores eſſe reſpectu eodem, et ſic continuo decreſcere. Aorta in leone primo quidem, et eo vſque, donec maiores ramos dedit, in eadem fere continuo ratione manet erga aortam humanam. Nimirum dimidio fere illa proportione ventriculi ſui, quam in homine minor eſt. Tum vero ab hoc termino eius ratio erga humanam aortam euidenter decreſcit, tam in ſui ipſius continuatione, quam etiam in ramis a ſe editis. Quum enim hactenus aorta leonis ad humanam proportione ventriculi ſui fuerit paulo maior quam 1 : 2; nimirum in primo principio vt $1 : (2 - \frac{1}{84})$ in media inter principium et ramos maiores parte vt $1 : (2 - \frac{1}{7})$ proxime ante ramos maiores vt $1 : (2 - \frac{1}{7})$ et proxime poſt ramos maiores editos vt $1 : (2 - \frac{1}{14})$; nunc incipit plus quam dimidio aortâ humanâ minor eſſe. Nam vbi ad columnam vertebrarum primum ſe applicat, eſt vti $1 : 2\frac{3}{4}$. prope diaphragma autem vt $1 : 2\frac{5}{6}$. Atque idem de ramis aortae proximis quoque valet, qui itidem dimidio humanorum minores ſunt. Nam ſubclauia dextra ad eandem arteriam hominis eſt vt $1 : 2\frac{1}{3}$; ſubclauia ſiniſtra vt $1 : 2\frac{1}{3}$; et carotides adeo fere ſunt vt 1 : 3. Arteria autem pulmo-

Arteriae proportione ventriculorum et rami proportione truncorum in leone minores ſunt quam in homine.

pulmonalis truncus, ad eandem arteriam in homire proportione ventriculi ſui dextri eſt vti $1 : 1\frac{3}{5}$. Sed eius ramus dexter vt $1 : 2$ et ſiniſter adeo vt $1 : 2\frac{1}{3}$. Probabile igitur eſt, idem vaſorum decrementum continuatum iri porro per ſuccedentes ramificationes adeo, vt in ordinibus vltimis, in decimo quinto, decimo ſexto vel ſeptimo, nam vsque ad viginti et triginta eiusmodi ramorum diuiſiones in homine numerari ſolent, vaſcula decuplo quoque, vel partibus decimis nouem quam in homine proportione ventriculi ſiniſtri minora ſint. Quum autem vltima vaſcula in animalibus nonniſi vnius globuli ſanguinis capacia eſſe ſoleant; neceſſe eſt, vt pauciores in leone, quam in homine et in aliis animalibus, ramorum diuiſiones dentur, et citius itaque a corde ad vltima vaſa perueniatur.

Celeritas motus ſanguinis in leone comparata cum celeritate, qua ſanguis in homine mouetur.

Si ita igitur arteriae in leone inter ſe et ad ventriculos ſuos ſe habent, neceſſe eſt, vt celeritas, qua ſanguis per arterias mouetur, longe maior ſit in leone quam in homine et in aliis animalibus. Nam ſi ad ſolam circumferentiam ventriculi ſiniſtri reſpicias cuius proportione circumferentia primae aortae in leone dimidio fere quam in homine minor eſt; lumen primae aortae proportione luminis ventriculi quadruplo in leone minus erit quam in homine. Conſequenter eadem ſanguinis, quem ventriculus continet, portio, quae certam aortae partem occupat in homine, quatuor eiusmodi partes occupabit in leone, adeoque per ſpatium quadruplo longius mouebitur tempore eodem, et quadruplo igitur celerius moue-

mouebitur. Iam vero longitudo quoque ventriculi in conſiderationem venire debet, quae aeque ac circumferentia in leone maior quam in homine eſt. Nam ventriculus qualibet ſui contractione ſyſtaltica, quae quidem momentanea eſt, et in leone igitur, quamuis ventriculus longior ſit non plus temporis requirit, quam in homine, omnem ſuum ſanguinem in aortam expellit. Adeoque ad celeritatem ſanguinis in leone comparandam cum celeritate ſanguinis in homine requiretur, vt lumina vaſorum non ex ſui ad lumen ventriculi, ſed ad capacitatem eiusdem ratione aeſtimentur. Et celeritates in vtroque animali erunt in ratione inuerſa luminum arteriarum, diviſorum per capacitates ventriculorum ſuorum. Quibus pro his celeritatibus ratio efficitur $5\frac{28}{29}:1$, et ſextuplo igitur fere celerius ſanguis in leone quam in homine mouebitur per priorem aortam. Vnde haec modo colligo, non nimium eſſe, ſi dixerim, quadruplo celerius in leone quam in homine et in aliis animalibus ſanguinem moueri in aorta priori, in ea nempe eius parte, quae citra ramos eſt; noncuplo vero celerius in ramis ſecundi vel tertii ordinis, quorum, veluti carotidum peripheriae triplo et lumina igitur noncuplo quam in homine minora ſunt; denique centuplo celerius ſanguinem meare, vbi ad ramos decimos quintos peruenerit, quorum peripheriae decuplo et lumina centuplo in leone quam in homine minora ſunt, et quos vltimos eſſe poſuimus, quamuis in homine ad viginti et triginta vsque eiusmodi diuiſiones facile numerentur.

Motus ſanguinis qui in arteriis continuo retardatur in homine, in leone potius accelerari videtur.

Hinc ſequitur porro, cum ſanguis in homine quo magis in ſyſtemate vaſorum progreditur, eo magis quoque in ſuo motu retardetur, ob lumina ramorum, qui ex trunco quouis oriuntur, coniuncta, ſemper maiora lumine trunci; in leone hanc, retardationem vel longe minorem, vel plane nullam eſſe. Prius quam menſuram inſtituimus, monere oportet, aortam proxime poſt ramos maiores editos, vbi incipit vna cum ſubclauiis et carotidibus ramum aortae prioris referre primo ampliorem eſſe deinde ſucceſſiue anguſtiorem fieri ſine nouis ramis productis; veluti ex menſuris ſupra datis apparet, quae docent, prope ſubclauiam hanc aortam eſſe in ambitu ſuo 3 poll 1 lin. prope vertebras autem ante editam primam intercoſtalem 2 poll. Non oportet in colligendis luminibus ramorum metiri hanc aortam prope ſubclauiam, vt facere ſolent in homine, vbi arteriae plerumque cylindricae, vel vix tamen conoideae ſunt, ſed prope intercoſtalem primam, vbi anguſtiſſima eſt. Nam quantum ſub ſingulis diuiſionibus vel poſt ſingulas diuiſiones arteriae vel dilatentur vel anguſtentur, id ſcire noſtra intereſt; ſiue hoc fiat ilico in ipſo ramorum principio, ſiue ſenſim et ad finem eorundem vsque, vbi in alios ramos diuidi incipiunt, hoc nihil refert. His itaque praemonitis, aortae primae, trunci, peripheria cum ſit 3 poll. 6 lin. lumen erit 147 lin. Lumen ſubclauiae dextrae eſt 24$\frac{1}{11}$ lin. carotidis dextrae 5$\frac{1}{3}$, carotidis ſiniſtrae 5$\frac{1}{7}$, ſubclauiae ſiniſtrae 12, et aortae dorſalis priusquam inter coſtalem primam edit 48 lin.

Summa

Summa igitur luminum horum ramorum omnium $94\frac{3}{4}$ ad lumen aortae primae erit vt $94\frac{3}{4} : 147$, id eſt vt $1 : (1\frac{1}{2} + \frac{1}{15})$. Vnde patet, non modo nullam retardationem, ſed accelerationem potius in motu ſanguinis obtinere in leone, prout ille per vaſa progreditur. Frequentiſſima, quae in homine inter ſummam luminum ramorum et lumen trunci inueniri ſolet, ratio eſt $3 : 2$ vel $1\frac{1}{2} : 1$. Eamque PERILL. L. B. v. HALLER ex multis operoſis arteriarum menſuris quaſi mediam elicuit. Simili ergo fere modo ſangius in leone acceleratur, vti retardatur in homine, ſiquidem nempe in aliis diviſionum exemplis eodem ramorum coniunctorum ad truncum ratio obtinet quam in prima aortae diviſione inuenimus. Quare, vt hoc experiamur, etiam arterias pulmonales, quarum menſuras habemus, aeſtimare conueniet. Lumen trunci arteriae pulmonalis igitur eſt $133\frac{1}{3}$ lin. Rami pulmonalis dextri lumen 48, et ſiniſtri $40\frac{1}{3}$ lin. erit; et ſumma igitur luminum ramorum $88\frac{1}{3}$. Ergo ratio ſummae luminum ramorum ad lumen trunci in hoc exemplo erit $88\frac{1}{3} : 133\frac{1}{3}$ quae eſt $1 : (1\frac{1}{2} +$ circiter $\frac{1}{93})$. Haec parum differt a priori, indicatque retardationem fere aequalem, et probat, variationem reſpectu rationis ramorum ad trunces in variis diuiſionum exemplis minorem eſſe quam exſpectari poterat. Si in exemplo priori aortae cum ramis ſuis, loco ſubclauiae dextrae et carotidum, arteriam innominatam poſueris, qua mediante illi rami ex aorta oriuntur; ratio ramorum inde eueniet adhuc minor. Nam

circumferentia arteriae innominatae nonniſi 18 lin. eſt. Lumen igitur 27 lin. idemque coniunctum cum luminibus ſubclauiae ſiniſtrae et aortae dorſalis 87 lin. ad lumen trunci aortae erit vt 87 : 147. vel $1 : (1\frac{1}{2} + \frac{2}{11})$. Ergo neque hoc exemplum prioribus contrarium eſt. Quodſi eadem igitur ramorum ad truncos ratio in ſequentibus quoque arteriarum diviſionibus, quas non metitus ſum, obtineret, quod autem non probabile, quin potius impoſſibile videtur, acceleratio inde enormis eueniret, et celeritas vix imaginabilis in vltimis ramis. Interim hoc modo colligamus ſanguinem in leone non retardari ſed accelerari potius, ſaltim in ramis, qui non ad minimos pertinent. Quod variationes attinet, quae in variis leonum ſubiectis obtinere poſſunt, vti in ſubiectis humanis obtinent, eas non negauerim. Sed eo vsque ſe extendere poſſe has variationes, vt qui rami in vno leone ad ſuum truncum ſunt vti $1 : 1\frac{1}{2}$ in altero maiores ſint hoc trunco, id minime credibile eſt; cum eiusmodi variationes in homine, vbi experimenta reiterata exſtant, nunquam inuentae ſint, neque natura animalis eadem maneret, ſi ſtructura corporis adeo vsque variaret. Neque quidquam contra hanc accelerationem poſſe, quae inter cauſas retardantes a phyſiologis numerari ſolent, affrictum ſanguinis, reſiſtentiam arteriarum etc. facile intelligitur. Nam dummodo rami coniuncti ſuo trunco minores ſunt, abſolute neceſſarium eſt, vt, quanto minores ſunt, tanto in iis fluidum celerius moueatur, aut omnis motus plane ſupprimatur.

Cae-

Caeterum nullum dubium eſt, quin enormis celeritas, qua ſanguis in leone mouetur, magnum influxum ſibi vindicet in oeconomiam vitalem huius animalis, in eiusque naturam et attributa. Inter multos effectus, qui motui ſanguinis debentur, paucorum tantummodo mentionem faciam, qui magis ad ſcopum noſtrum ſpectant.

De effectibus, quos haec celeritas ſanguinis in leone producit.

Communis experientia docet, tempore aeſtiuo, quum vaſa corporis noſtri, praecipue quae exteriorem eius ſuperficiem occupant, a calore dilatantur, adeoque motus ſanguinis retardatur, laſſitudinem non modo in corpore et ineptitudinem ad motus exercendos, ſed veram quoque debilitatem ſentiri; cum contra vel modico frigore conſtrictis cute et vaſis, vel ſpirituoſis aſſumtis, vel alia quacunque cauſa, qua ſanguinis motus expeditior et celerior redditur, admiſſa, agilitas in corpore oritur et alacritas. Denique vinculo arteria artus conſtricta, quominus ſanguis ad artum affluere poſſit, artus primum debilitatur, deinde vera paralyſis eiusdem conſequitur. Patet igitur, a celeriori et expeditiori affluxu ſanguinis robur partibus et agilitatem, alacritatemque toti corpori conciliari. Haec agilitas in leone, vti in fele obſeruatur. Simili cum impetu ille in praedam inſilit, et dum incedit, dum ſe mouet, facilitas in motibus producendis vbique elucet.

Robur corporis, agilitas, alacritas.

Deinde in ipſas animi virtutes haec celeritas ſanguinis influxum habere videtur. Praeterquam quod

Audacia et atrocitas leonis.

quod agilitatem illam et leuitatem corporis confidentiam aliquam in nobis producere experiamur, immo quandoque audaciam; in febribus acutis quoque deliria, furores et ſaepe immenſum robur oriuntur a nulla alia cauſa, niſi a nimia rapiditate, qua ſanguis in partes corporis, praecipue in cerebrum impellitur. Nam coercito ſanguinis impetu per venae ſectionem, vel deriuato tantummodo ſanguine a cerebro, diliria et furores ceſſant. Audaciam itaque leonis, qua non mediocri gaudet, et ferocitatem atrocitatemque ex parte a celeri hoc ſanguinis motu pendere exiſtimo; et memorabile omnino eſt, ipſas carotides, primarias arterias cerebri, adeo inſigniter et prae aliis arteriis anguſtas eſſe.

Tab. XI.

Fig. I.

a. b. c. d. e. Pericardium ſanguine diſtentum.

a. Vertex inferior acutior.

b. Vertex ſuperior obtuſior.

c. Pars anterior, ſterno contigua.

d. Pars poſterior, vertebris incumbens.

e. Appendix pericardii, qua prima aorta et pars arteriae innominatae inuoluuntur.

f. f. Adeps ſub tunica exteriori laxa collectus.

g. g. Membrana tenuis, reticularis, qua pericardium diaphragmati adnectitur.

h. Arteria innominata.

i. Arteria ſubclauia dextra.

k. Carotis dextra. *l.* Siniſtra.

m. Sub-

m. Subclauia ſiniſtra.
n. Aorta dorſalis, ab inflato pericardio antrorſum protracta.
o. Vena caua ſuperior.
p. Vena ſubclauia dextra. *q.* Siniſtra.
r. Iugularis ſiniſtra.
s. Axillaris ſiniſtra.
t. Arteria pulmonalis ſiniſtra.
u. Vena pulmonalis ſiniſtra.
v. w. Rami arteriae pulmonalis ſiniſtrae.
x. z. Rami venae pulmonalis ſiniſtrae.
A. B C. Pulmo ſiniſter. *A.* Lobus medius.
B. Pars lobi ſuperioris, deorſum flexi.
C. Lobus inferior.
D. Pulmo dexter. *E.* Diuiſio carotidis ſiniſtrae.
F – N. Larynx. *F. G. H. I. K.* Cartilago thyreoidea.
F. Pars, quae refert alam ſiniſtram cartilaginis humanae.
G. Pars, quae refert cornu inferius, cricoideam complectens.
H. Alae dextrae pars.
I. Cornu ſuperius ſiniſtrum.
K. Apex huius cartilaginis
L. L. Interſtitia repleta a muſculis cricothyreoideis.
M. Ligamentum cricothyreoideum.
N. Cartilago cricoidea.
O. P. Q. Aſpera arteria.
O. Annuli cartilaginei, (qui non integri ſunt) exteriores.

P. In-

P. Interiores, quibus exteriores ſquamatim incumbunt, vt vix inter annulos interſtitium membranaceum in parte tracheae anteriori detegatur.

Q. Extremitates annulorum latiores, et quae ſaepe connatae ſunt.

Tab. XII. Fig. 2.

a. Cor. Eius ſuperficies anterior plana rugis transverſalibus; diſtinctione ventriculorum nulla conſpicua.

b. Apex obtuſus.

c. Excreſcentia praeternaturalis.

d. Auricula ſiniſtra. *e.* Dextra. Vtraque minima.

f. Vena caua ſuperior.

g. Vena ſubclauia dextra. *h.* Siniſtra.

i. Aorta prima, quae bulbum efficit.

k. Arteria innominata. ſ. truncus communis.

l. Arteria ſubclauia dextra.

m Carotis dextra. *n.* Siniſtra.

o. Subclauia ſiniſtra.

p. Aorta deſcendens.

q. Aorta prope diaphragma reſecta.

r. Lobus pulmonis dextri ſuperior.

s. t. Medius in duos ſubdiuiſus. *v.* Inferior.

w. Pulmonis ſiniſtri lobus ſuperior.

x. Medius. *y.* Inferior.

z. Truncus arteriae pulmonalis.

A. Arteria pulmonalis ſiniſtra.

B. C. Eius rami.

D. Ar-

D. Arteria pulmonalis dextra. *E. F.* Eius rami.
G. H Venae pulmonales dextri lateris.
I. Vena pulmonalis ſiniſtra.
K. vsque ad *Q.* Larynx. *K. N.* Cartilago thyreoidea.
K. Pars, quae alae ſiniſtrae reſpondet.
L. Eadem pars dextri lateris.
M. Apex, in quo partes laterales coniunguntur.
N. Pars, quae cornu inferius refert.
O. Cornu ſuperius ſiniſtri lateris.
P. Foraminulum pro vaſis nutrientibus.
Q. Cartilago cricoidea.
R. Ligamentum cricothyreoideum.
S. S. Interſtitia a muſculis cricothyreoideis in ſtatu integro repleta.
T. T. Annuli aſperae arteriae cartilaginei exteriores, qui aliis interioribus, praecipue in extremitatibus ſuis incumbunt.
V. Interiores ſemitecti.
W. Extremitates annulorum latiores.
X. Eaedem concretae.
Z. Diuiſio carotidis.

Fig. 3. Tab. XII.

Ventriculus cordis dexter apertus.

a. b. c. d. e. Ventriculus apertus. *a. b. c.* Pars parietis, ventriculi dextri, diſſecti anterior reflexa.
a. d. e. Huius parietis diſſecti pars poſterior reflexa.

a. c. Linea, qua paries in parte anteriori ſepto adhaeret.

f. Ventriculus cordis ſiniſter integer.

g. g. Adeps, parieti, verſus baſin cordis externe adhaerens, vna cum pariete diſſectus.

h. h. Paries carnoſus ventriculi dextri diſſectus, vbi craſſior eſt.

i. i. a. Idem paries, vbi tenuior eſt.

k. l. Faſciculi muſculares, a ſepto in parietem tranſeuntes.

m. Septum, eiusque pars anterior.

n. Foraminula caeca.

o. Papilla carnea ſepti, ex qua filamentum in valuulam venoſam ducitur.

p. Lacertus carneus, qui in partem valuulae anteriorem tranſit, totumque huius partis latus dextrum occupat.

p. p. Alter eiusmodi faſciculus carnoſus, qui in partem valuulae venoſae poſteriorem tranſit.

q. q q. Radices horum faſciculorum, quibus ex pariete ventriculi oriuntur.

r. Anaſtomoſis horum faſciculorum.

s. s. s. Columnae carnoſae planiores et debiliores.

t. t. Foueolae.

v. Pars valuulae orificii venoſi anterior, ſurſum flexa, vt orificium venoſum et pars poſterior huius valuulae *D.* appareat. Pars eiusdem valuulae ſiniſterior retro ſeptum latet.

w. w. Filamenta huius partis valuulae, a muſculo *p.* producta.

x. In-

x. Interſtitia inter haec filamenta, quaſi foramina valuulae.

z. Minora eiusmodi foraminula.

A. Foraminula triangularia.

B. Filamentum a papilla *o*. productum.

C. *C*. Filamenta retro ſeptum orta.

D. Pars valuulae venoſae poſterior.

E. Pars valuulae huius, fere annularis, media inter portionem anteriorem et poſteriorem.

F. Filamenta huius partis poſterioris a muſculo *p p*. producta.

G. Pars valuulae venoſae, quae carni cordis adhaeret, et orificium venoſum inueſtit.

G. *H*. Orificium venoſum. *H*. Aditus in auriculam dextram.

I. K. Valuula ſemilunaris anterior diſſecta.

L. Valuula ſemilunaris in orificii arterioſi parte dextra ſita.

M. Valuula parti ſiniſtrae huius orificii adhaerens.

N. *N*. *N*. Baſes harum valuularum vel latera conuexa, quibus parieti orificii adhaerent.

O. *O*. Margines earum liberi.

P. *P*. Sinus inter valuulas et arteriae parietem intercepti, quo loco arteria etiam paulo amplior eſt, vnde ſinus augentur.

Q. *Q*. In hoc loco arteria paulo conſtrictior eſt, et externe primum ex corde emergit.

R. *R*. *R*. Tubercula ſiue noduli calloſi, in quibus extremitates valuularum conueniunt.

S. Truncus arteriae pulmonalis diſſectus.

T. Arteria pulmonalis dextra.

V. Siniſtra.

Tab. XIII.

Fig. 4.

Ventriculus cordis ſiniſter apertus.

a. b. Linea, qua paries ventriculi ſiniſtri cum ſepto coniungitur.

a. b. d. Paries cordis poſterior ſeu ventriculi ſiniſtri.

a. b. c. Septum vna cum ventriculo dextro reflexum.

c. d. Adeps, qui parieti ventriculi ſiniſtri verſus baſin externe incumbit, diſſectus.

e. e. Carnoſa ſubſtantia ventriculi ſiniſtri, vbi minus craſſa.

f. f. Eadem vbi craſſior eſt.

g. g. Eadem vbi tenuior.

h. Septum cordis concauum.

i. k. Faſciculi muſculoſi planiores, ſepto adnati.

l. Craſſior faſciculus muſculoſus, ſed planior itidem, quo ventriculi orificium arterioſum, tanquam ſphinctere conſtringi poteſt.

m. n. Foramina caeca.

o. p. p. Craſſus muſculus, qui ſolus fere totam partem poſteriorem valuulae venoſae ſuis filamentis occupat, compoſitus ex duabus partibus *o* et *p p*, connatis.

q. q.

q. q. Faſciculi, parieti ventriculi immiſſi.

r. Filamentum ſingulare huius muſculi ramoſum ſepto immiſſum.

s. s. t. v. Filamenta huius muſculi in partem poſteriorem valuulae venoſae inſerta.

w. Alius muſculus valuulae venoſae.

x. z. Eius filamenta in partem anteriorem valuulae inſerta.

A. B. Tertius valuulae muſculus filamentis ſuis partim in anteriorem partim in poſteriorem valuulae partem inſertus.

C. C. Filamenta eius in partem anteriorem.

D. Filamenta in partem poſteriorem.

E. Valuula orificii venoſi, eius quidem pars anterior.

F. Pars poſterior; quae partes valuulae mitrales vocari ſolent.

G. G. Valuula ſemilunaris ſiniſterior diſſecta.

H. Valuula ſemilunaris, quae anterior et dexterior eſt.

I. Valuula ſemilunaris poſterior.

K. K. K. Baſes valuularum ſemilunarium, quibus cordi adhaerent.

L. L. Margines earundem liberi.

M. M. Sinus inter valuulas et parietem aortae intercepti.

 N. Ori-

N. Orificium arteriae coronariae dextrae.

O. Orificium arteriae caronariae ſiniſtrum.

P. P. Locus, vbi aorta intus prominet, et quaſi paulum conſtricta eſt.

Q. Tubercula, in quibus extremitates valuularum coniunguntur.

R. Cauitas aortae apertae.

S. Truncus aortae.

T. Arteria innominata.

V. Subclauia ſiniſtra.

W. Aorta deſcendens.

Adiunxi pollicem, quo in menſuris vſus ſum.

OBSER-

OBSERVATIONES SPLANCHNOLOGICAE, AD ACIPENSERIS RVTHENI *LINN.* ANATOMEN SPECTANTES.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Cum Petropoli olim in Acipenſeris Ruſſici anatomia eſſem occupatus, ſtructuram variorum eius organorum ac viſcerum non modo plane ſingularem ac mirabilem, ſed non paucis etiam momentis a conſueta aliorum piſcium conformatione multum diuerſam eſſe, euidenter cognoui; quae, cum digna mihi viſa fuerint, vt orbi literato communicentur, in praeſenti diſſertatione obſeruationes iſtas ſplanchnologicas qualescunque, Anatomiae, quam comparatam vocant, amplificandae cauſa potiſſimum inſtitutas, *Illuſtriſſimae* offerre *Academiae*, easque partim copioſiori ſermone, partim mera ac ſuccincta figuram explicatione, proſequi, nunc mihi conſtitutum eſt.

Anatome
Acipenſeris Rutheni, die 15 Ian. MDCCLIX, Petropoli inſtituta.

Hepar griſeum, punctis obſcurioribus conſperſum, in duodecim lobos erat diuiſum quorum ſeptem dextra

quinque ſiniſtram eius portionem conſtituebant. Illorum primus infra ſummitatem dextrae portionis oblongam et ſubacutam occurrit parallelogramus fere, planiuſculus, latere exteriore, quo fellis veſiculam lambit, concauo carinatus, ac, quamuis eidem nullibi adhaereat, flauo tamen bilis colore tinctus. Continuatur vlterius infra hunc hepatis ſubſtantia, ac incumbentem ventriculi ſummitatem excipit. Facie exteriore eadem portio lateri veſiculae interno arcte adnata eſt, cum e contrario continuata pariter, illique aduerſa hepatis ſubſtantiae portio externum eius latus interna ſeu concaua ſua facie, absque omni nexu, cingat, colore flauo pariter imbuta. Secundus lobus, ſubtriangularis, ſuperficie ſua interna in duas quaſi laminas diuiſus, quarum ſuperior, anguſtior, inferum veſiculae latus tangit, flauedine inde etiam tincta, inferior autem, latior, exterioris ventriculi lateris partem lambit, coloris hepati naturalis. Tertius planiuſculus, anticae pylori regioni libere incumbit, ipſumque inferius excipit. Quartus ſubulatus, tenuis, duodeni principio, et quidem lateri eius externo, absque nexu, applicatus. Quintus et infimus ſitu, ſatis magnus, longus, ſubtriquetrus ac leuiter acuminatus, partim ſub externo, partim ſub poſtico duodeni latere collocatus. Duo adhuc ſuperſunt dextrae portionis lobi, piſcis dorſum reſpicientes, ac oeſophago ſubſtrati; quorum inferior ſextus, maior, tenuis, figura irregularis; ſeptimus denique, ſub ſexto fere totus reconditur, eodemque ſitu parum ſuperior, minimus, ac fere ſubulatus

eſt.

eſt. Inter eos lobos, qui ad ſiniſtram hepatis portionem pertinent, primus, ſummitatis huius viſceris oblongae pariter et ſubacutae continuatio, e lato ſenſim anguſtior factus, illorumque primo, ſibi adverſo ex altero latere, longe maior, ſuper oeſophagi ventriculum ſubeuntis, portionem ſuperiorem, ipſamque ventriculi ſummitatem in transuerſum maxime extenditur. Secundus, longe infra hunc, acuminatus, extremitate ſua pancreas ſic dictum attingit. Tertius et quartus ſub ſecundo, oeſophagi curuaturae interpoſiti, paruuli: ille quidem acutus, planiuſculus et breuis, hic vero planus, fere circularis, obtuſus, iſtoque maior. Quintus tandem, ac omnium vltimus, duplex, irregularis formae, anterius inter pancreas, ventriculi latus internum et oeſophagi finem, in transuerſum ſitus eſt. Sunt equidem praeter hos omnes pauci adhuc lobuli, inter poſticam ſummitatis duodeni faciem et oeſophagi curuaturam reconditi, quos vero, quia minores ſunt momenti, ſicco pede nunc tranſibimus. Id tamen praeterire nolumus, quod eosdem curuaturae huic membrana mediante duplicata, qua plurima vaſa ſanguine turgida, tam ex infimis hepatis lobis, quam ex oeſophagi, lienis, pancreatis, ventriculique ſuperficie prouenientia, ſuſtentantur, annexos viderimus. Aperto horum communi maiori, interno duodeni lateri, infra pancreas, adnato, experti ſumus, aere ſurſum inflato non tantum omnia mox dicta vaſa, ſed ipſum etiam hepar intumuiſſe. Vaſa haec, pro arteriis procul dubio hab nda, per paria

 fere

ſere ſemper incedunt, venulaeque ramulum, ex lienali vena ortum, ſingula eorum includunt. Latus ventriculi internum, conuexaque inprimis pancreatis facies vtroque horum vaſorum genere ſatis copioſe inſtruuntur, eorumque ope arctiſſimo cum hepate nexu coniunguntur.

Veſicula fellis oblonga, bile repleta, ſubſtantiae ſolito craſſioris, *ductum cyſticum* manifeſtum ex inferiore ſua extremitate oblique deorſum ac ſiniſtrorſum emittit, in concaua ſeu interna hepatis ſuperficie, et quidem inter ipſum huius viſceris corpus ac ſecundum dextri lateris lobum, nudum fere decurrentem, et ventriculi faciei poſticae obuerſum. Oeſophagi tractus adſcendens, ventriculum tandem ſubiens, ligamenti lati ope, e diaphragmate ac concaua, eaque media hepatis ſuperficie producti, ipſi hepati adhaeret, ventriculus vero nusquam, niſi circa poſticam et lateralem pylori faciem, eidem arcte, affigitur.

Si *oeſophagum* quoad externam faciem a ventriculo, qui ouatus, craſſus, ac auium granivorarum ventriculo ſimilis eſt, dignoſcere velimus: omnem illum tractum, tam a diaphragmate, pone hepatis poſticam, eamque conuexam partem, deſcendentem, quam etiam aſcendentem, qui iuxta duodenum et pancreas eſt, illius nomine inſignire debemus. Sin vero eius limites ex interna facie, eosque ad aliorum piſcium analogiam, determinare nobis placeat: eiusdem tractus, et quidem deſcendentis

dentis ſuperiorem et plusquam dimidiam partem, ob diuerſam omnino tam a reliqua ipſius portione, quam ab aſcendente ſtructuram, priorem oeſophagum poſteriorem vero ventriculum vocare oportet. Illius enim, ſuperioris ſc. partis interior ſuperficies papillis planiuſculis, ſubtriangularibus, magnis, deorſumque dependentibus, vndique inſtructa, huius vero omnis glaberrima, rugisque longitudinalibus, plus minusue euidentibus notata eſt; qua in re cum aliorum piſcium ventriculo conuenire quodammodo videtur, cum iſta, oeſophagi ſc. proprie ſic dicti portio, terminis ſuis ab inſequente optime diſtinguenda, ob papillas partim etiam, quod prior et ab altera diverſae omnino ſit ſtructurae, oeſophagi nomen potius mereatur. At enim vero, ſi quis hanc admittere velit diſtinctionem, non videmus, quo nomine ouata iſta et muſculoſa valde pars, quam ventriculum ſupra diximus, vocari poſſit. Mallemus itaque omnem illum a faucibus inde ad ouatam vsque et carnoſam partem protenſum canalem, ſtructura quamlibet diuerſum, oeſophagum, ouatam vero ventriculum nuncupare. Poſſet etiam papillata et albida huius canalis pars ingluuies, laeuis vero proprie oeſophagus dici. Papillae iſtae, e lata baſi in acumen abeuntus, quo ſummitati propiores, eo minores ſunt interdum etiam, praeſertim maiores, vno alteroue denticulo quaſi inciſas et auctas vidimus. Infimas earum, ad quinque circiter lineas vsque, rugae comitantur longitudinales, illis alterius portionis longe minores ac copioſiores. Laeuis oeſophagi deſcendentis

 portio,

portio, fere in medio, ſummitatem tamen ſuam propius aliquantum, quam curuaturam, *ductum aereum* patulo ore recipit. Longitudo oeſophagi deſcendentis tractus 6'' erat, eorumque papillata portio 3½'' laeuis 2½'' abſoluebat; tractus aſcendens, laeuis vero 4'' exaequabat. Interior huius ſuperficies exalbida eſt, rugisque prominentioribus, inprimis curuaturam verſus, minusque interruptis, longitudinalibus diſtincta anguſtior quoque parum deſcendente tractu. Ceterum annotari meretur, externam oeſophagi, ventriculi, duodeni ac pancreatis ſuperficiem colore e pallide purpureo nigricante, qualem etiam in Polypo octopodio Ariſt. olim vidimus, fuiſſe tinctam.

Ventriculus tactu durus, muſculoſus valde, tam quoad formam, quam quoad ſubſtantiam, vt ſupra iam monuimus, cum auium graniuorarum ventriculo ſatis conuenit. Hoc ſecundum longitudinem, mediamque conuexae faciei partem diſſecto, craſſitiem ſubſtantiae eius muſculoſae maximam, ſc. in medio, ſeptem circiter exaequare lineas, ac oeſophagum verſus magis, duodenum verſus minus decreſcere ſenſim, ipſamque ſubſtantiam fibrillis tendinoſis, albicantibus, tenuiſſimis, ac vtplurimum longitudinalibus, vndique pertextam eſſe vidimus. Interior ventriculi tunica, muſculoſae ſubſtrata, albicans, ⅓''' craſſa et laeuis, ſinus tres notabiles longitudinales, duosque aggeres quaſi, ſuperius diuiſos, inferius coniunctos, eiusdemque cum ſinubus directionis, alternatim efformat. Ipſa ventriculi cauitas

valde

valde mediocris. Pylorum interior eius tunica parum prolongata conſtituit.

Duodenum teres atque durum, ſi ſecundum longitudinem diſſecetur, duplicem potiſſimum ſubſtantiam exhibet, exteriorem muſculoſam (an vaſculoſam potius vocare conuenit?) diametri $2\frac{1}{2}'''$, fibrillisque tendinoſis, minus licet, quam in ventriculo, manifeſtis, tenuiſſimis, albicantibus, hinc et inde varioque modo in transuerſum excurrentibus diſtinctam; interiorem glandnloſam, craſſitie paulo inferiorem et ex ruffo albicantem. Ipſa autem interior huius inteſtini ſuperficies innumeris foueis, quarum maiores reliquis proxime ſub pyloro occurrunt, expreſſa et reticulata veluti apparet. Foueae hae in ſubſtantiae glanduloſae profundum ducunt, ac perflatu ſingulae, cellularum ſub ſpecie, intumeſcunt.

Pancreatis glandula, figurae quodammodo reniformis, antica facie plana, poſtica conuexa, margine arcuato libero, octo circiter crenis inaequalibus, obtuſis, leuiter inciſo, interiore rectiore, ad dimidiam, eamque inferiorem partem, libero, ad alteram ſuperiorem duodeni ſummitati, eiusdemque ſiniſtro lateri arcte adnato. Longitudo eius $1''$, $8'''$, latitudo $1''$, $1'''$, craſſities autem maxima, ab exteriore, ſc. crenato margine interiorem verſus ſenſim aucta, $7\frac{1}{2}'''$ aequabat. Ad detegendam interiorem huius glandulae conformationem, ſectione per arcuati marginis medium facta, eam in duo quaſi hemiſphaeria diuidebamus, eodem modo, quo alias, ad

monſtrandos ductus vrinarios, renes ſolent incidere anatomici, et ecce, comparuit quoque ſtructura, praeter opinionem renum ſimillima. Subſtantia enim exterior, quaſi corticalis, firma, vaſculoſa, coloris e furuo cineritii, a duodeni exteriore non multum abludens, ac ad ſingulos crenarum angulos, e peripheria centrum verſus, in clauos quaſi alternatim longiores, linea in medio albicante notatos, ac inferius inter ſe inuicem conuergentes producta; interior autem, omnisque ea, quae inter clauos erat interpoſita, arcuatum pancreatis marginem verſus compreſſior, rectiorem verſus ſpongioſa magis, reticulata, foueolisque ac cellulis eiusmodi, quales in duodeno vidimus, praedita erat. In conſpectum inſimul quoque veniebant inter craſſiores clauorum extremitates *ductus* ſex ſeptemue *pancreatici* partiales, ſuccum ipſorum breuiſſima via in receptaculum commune, ſatis anguſtum, quod proxime iis ſubiacet, effundentes. Tota autem tam receptaculi, quam ductuum horum, qui non niſi illius veluti latibula ſunt, interior ſuperficies reticulata pariter, foueolisque ac cellulis apertis, inſtructa. Inde tandem liquor pancreaticus, a ductu excretorio communi breuiſſimo ac ampliſſimo exceptus, ad pylori valvulam, in ſiniſtrum principii duodeni latus prono alueo effluit. Ex modo data pancreatis huius deſcriptione patebit, falli eos vehementer, qui illud pro glandula conglomerata velint agnoſcere; nec conglobata melius diceretur, quod plures vno habeat ductus in cauitate ſua excretorios. Glandulae vero

vero vicibus illud ſungi, nemo inficiabitur, licet ſtructuram eius aliarum glandularum ſtructurae minus conuenientem videat. Pari etiam ratione de ſturionis duodeno iudicandum eſſe cenſemus, cuius interior ſubſtantia humorem quendam, pancreatico analogum ſecernit, quamuis glandulae diſtinctae in ea nusquam appareant. Non admodum rara eſt haec ſtructura, ſed pluribus certe piſcibus communis.

Quod ad *vaſa biliaria* attinet; ductus notabilis hepaticus, ſubſtantia hepatis vndique obtectus, ſub lobi dextri primi baſi, verſus poſticam, eamque mediam, felleae veſiculae faciem flectitur, inde vero cum eadem tunicarum ope arcte coniunctus, curſu deſcendit parallelo, tandemque trium linearum diſtantia ab eiusdem collo cyſtico ductui inſeritur. Iunguntur eidem, proxime ad ipſius inſertionem, duo alii, directe fere ſibi inuicem oppoſiti, alter, e continuata ſub primo dextri lateris lobo ſubſtantia ortus, deſcendens, alter ex imo aſcendens, anguloque acutiſſimo ac communi cum priori oſtio cyſticum ſubeunt. Praeter hos duo alii adhuc adſunt hepatici ductus, quorum vnus, e dextrae hepatis portionis ſummitate ortus, ſatis amplus, et hepatica ſubſtantia vndique pariter obtectus, mediantibus tunicis, cholidocho communi ſub angulo valde acuto adnectitur, eique decem linearum diſtantia a pyloro immittitur; alter vero, praecedenti brevior et anguſtior, e ſiniſtra hepatis portione proveniens, cholidocho, iuxta ingreſſum eius in inteſtinum, inſeritur. Ductus hic ipſe communis mox infra

infra quinti huius hepatici inſertionem, facta prius aliqua inflexione, inter pylori valuulam ſummumque duodeni marginem, idem intrat, illiusque ad oram poſticam ſub papillae albicantis ſpecie, orificioque anguſtiſſimo, intus prominet. Ceterum internam omnem vaſorum horum biliariorum ſuperficiem laeuem atque politam, nec niſi ad ductus hepatici quinti oſtium foraminula nonnulla caeca, quae valuularum forte vices genere poſſunt, obſeruauimus. Ductus hepatico-cyſtici omnino nulli. Reliqua, quae ad aliorum organorum ſtructuram ſpectant, ex ſequenti figurarum explicatione petenda.

Explicatio Figurarum naturali magnitudine delineatarum.

Tab. XIV. Fig. I.

Cor, cum annexis ſibi partibus, poſtica facie expoſitum.

A. Cor.

B. Bulbus Aortae, obſcure rubens, non albicans vt alias eſſe ſolet, nec aortae continuatus, ſed propriis limitibus circumſcriptus, ac tam ſubſtantia, quam colore cordi ſuccenturiato externe ſimilis.

C. C. C. Auricula cordis triloba.

D. Trun-

D. Truncus venoſus, ex venae cauae ſuperioris ac inferioris coniunctione ortus. *d.* Auriculae ſpecies, ei adnexa; an ſanguinis receſſus aut diuerticulum?

E. Oſtium canalis, diaphragma perforantis, venoſum, trunci venoſi oſtio anguſtius.

F. Oſtium canalis venoſi, diaphragma perforantis, maius.

G. Sinus venoſus, ſiue receptaculum Verneianum, confluxu trunci D, canaliumque venoſorum E et F oriundum.

H. Aorta.

α. Lobulus oblongus, membranaceus, tenuior, bulbo adnatus.

β. Lobulus duriuſculus, ex altero latere bulbi baſi affixus, minor, bulbo ipſo parum pallidior.

γ. Lobulus duriuſculus, alterius lateris, bulbi baſi affixus, maior, eiusdem coloris, ac prior.

δ. Sacculus auriculae trilobae.

ε—ε. Lobuli vel prominentiores, vel cordi profundius immerſi.

ζ. ζ. ζ. Venulae, diaphragmate in cor abeuntes.

Obſ. Aere, ſiue per aortam, ſiue per venarum antrium impulſo, tam auricula et cor, quam aorta etiam, ſemper ſimul intumeſcunt; valularum itaque praeſentia effectum hunc impedire nequit.

Fig. 2.

Truncus venoſus (Fig. 1. D.) cum auricula ſua (Fig. 1. *d.*) et canalis venoſus, anguſtior (Fig. 1. E.) diaphragmaticus, diſſecti, vt Receptaculi Verneiani interiora appareant.

A. Oſtium in Auriculam cordis patens.

B. B. B. Trunci venoſi et canalis diaphragmatici partes diſſectae.

C. Auriculae minoris, trunco venoſo, ſub ſacculi ſpecie, appenſae, facies interior, reticulata, tendinoſisque trabeculis nſtructa.

E. F. G Auricula cordis triloba; vbi G ſacculum Fig. 1. ſub lit. δ inſignitum, denotat.

Obſ. Ad venae cauae ſuperioris coniunctionem cum inferiore valuulae duae, ſibi invicem oppoſitae, conſpicuae occurrunt.

Fig. 3.

Trium auricnlae cordis loborum facies interior.

A. A. Oſtium amplum, ex Auricula in cor.

B. Vnus auriculae lobus (vid. Fig. 2. E.).

C. Alter lobus ſacciformis.

D. Tertius lobus.

Fig. 4.

Cor ſecundum longitudinem diſſectum, vt ventriculi interiora in conſpectum veniant.

A. Pars

A. Pars auriculae inferior, reſecta.

B. Cordis (quod inter corda vnius duorumque ventriculorum ambigit) cauitas ſ. ventriculi

C. C. Subſtantiae cordis ſectiones.

D. Valuula cordis maior.

E. Minor.

F. Minima.

G. G. Lobuli cordis diſſecti facies interior, muſculoſa, reticulis hinc et inde lacertoſis, lacunisque cordis inſtar, diſtincta.

H. Locus, ad quem aditus e cordis cauitate anteriore in poſteriorem patet.

Fig. 5.

Cor (iterata ſectione longitudinali, per alterum ipſius latus, ſub angulo cum priore ſectione acuto, et quidem ſecundum viam, e ventriculo in bulbum ducentem, facta) vna cum aortae bulbo et ipſa aorta apertum.

A. Pars ventriculi alterius lateris, in Fig. 4. potiſſimum viſa.

B. Pars ventriculi huius lateris.

C. C. Septum cordis dimidiatum, e columnis carneis conſtans.

D. E. Subſtantiae cordis ſectiones.

F. Sectio ſubſtantiae cordis mediae ad E pertinentis.

G. G. G. Lobulorum cordis diſſectorum facies interior.

H. Lobulus bulbi aortae minor (vid. Fig. 1. β.).

I. Valuularum quatuor, primaeque magnitudinis, ad bulbi inſertionem ſiue baſin occurrentium, infima ſeries.

K. Valuularum quatuor, ſecundae magnitudinis, media ſeries.

L. Valuularum quinque, tertiae magnitudinis,

M. Bulbi aortae facies interior, laeuis.

N. Valuulae tres ſemilunares, ad aortae initium.

O. Aortae facies interior.

Obſ. Ex apparatu omnium harum valuularum tam ſingulari, quam artificioſo euidenter patet, cor et aortam, non, vt in quadrupedibus vel aliis etiam piſcibus alias fieri ſolet, contractione alterna, ſed ſimultanea âgi, ita, vt, ſi v. g. auricula et bulbus aortae in diaſtole verſentur, ſyſtolem exerceant ſynchronam, et vice verſa.

DE

DE
HERMAPHRODITO
AD SEXVM VIRILEM PERTINENTE.

Auctore

I. LEPECHIN.

Caſus obtulit, Illuſtres Academici obſeruationem, quamuis non omnino nouam, omni tamen attentione, vt mihi videtur, dignam: addit enim momentum ad ſupplendas quasdam obſeruationes, et ad euertenda exinde deducta erronea placita (*a*).

Inter militiae deſignatos colonos venit iuuenis xx. annorum ex diſtrictu Werchowaſchescoy (верховажеской уѣздъ) qui lubenter conſcribi cupiebat. Erat ille facie formoſa, corpore procero et bene conſtituto. Aſt dum ex inſtitutis milites conſcribendi nudus inſpiciebatur, primo feriebant oculos mammae muliebres ſat turgidae et duriuſculae, papillae magis protuberantes, quam conſtitutio virilis poſtulabat et areola amplior rubella. Hae notae, facies imberbis et vox feminea iam aliquid inconſueti portendebant. Bene reliquis partibus corporis conſideratis, partes genitales producuntur in ſcoenam. Coles curtus, imperforatus, ſcrotum ſupra baſin membri

(*a*) Vid. Fphemerid. N. C. Au. 3. Obſeruat. 97.

firmatum, et perinaeum quodammodo cauum facile perſuadent chirurgis, virum illum et feminam eſſe. Ipſorum teſtimonio abſoluitur ſorte militiam exercendi et remittitur ad penates.

Interim Illuſtriſſimus *Georgius Andreades de Goloſſzyn*, Praetor militaris, Eques St. Annae et gubernator Archangelopolitanus, audita hac minus ſolita partium conformatione, iuſſit iuuenem ad me adduci, quam ego occaſionem nactus, paucis externam partium deſcriptionem, addita ad viuum depicta icone abſoluo.

Regio pubis erat turgida et eleuata vt in ſexu femineo fieri ſolet; coles flaccidus duos pollices et tres lineas longus, ſine cocco terminatus; praeputium ob defectum frenuli glandem non tegebat. Orificium vrethrae (A A) imperuium et inciſura quaſi notatum (*a*) inde ſecundum totam longitudinem colis inferiorem, vbi Natura vrethrae deſignauit locum, exaratus erat ſulcus vsque ad baſin colis. Hunc viae vrinariae defectum, adimplebat foraminulum, quo vrina emitti poſſit, loco prorſus inconſueto, nimirum ad ſuperiorem perinaei partem (B), quod rimulae inſtar hiabat. Totus perinaei decurſus erat cauus, quae cauitas adhaerente parte laterali ſcroti (*d d*) augebatur, ita vt obiter ſpectata imaginem partium naturalium foeminearum prae ſe ferret. Scrotum ipſum ſupra baſin colis firmatum, nulloque ſepto intermedio diſtinctum duos ſacculos efformabat, qui praeſentibus teſticulis hominеque erecto

Tab. XV.

erecto

erecto anteriora ſpectabant et ad latera diſpoſita videbantur. Hic teſticulorum lateralis ſitus aberrantis quoque Naturae induſtriam commonſtrat; ſi enim ſcrotum ſaccum ad perpendiculum dependentem et continuum formaret, ſubiaceret omnino effluenti vrinae, et ab ipſius acrimonia arroderetur.

Praemiſſa hac ſuccincta partium naturalium enarratione non incommode, vt mihi videtur, tangi poteſt illa multoties agitata Philoſophorum quaeſtio, *vnde primordia noui animalis proueniant? num ſcil. ab vtroque parente? an omnia ad patrem, an ad matrem referenda?* Ardua ſane haec eſt quaeſtio, et an vsquam liquido demonſtrari poſſit dubito; quamuis non eſt inficiendum probabilius videri veritatem a partibus prioris ſtare: nullum enim animal perfectum ſine vtriusque ſexus commercio productum, et ſemper foetum mox patri, mox matri, mox vtrique parenti ſimilem procreatum conſtat; perpendamus interim et reliquarum ſententiarum quaedam pondera. Ex illo tempore, quo vermiculi ſeminales per microſcopiorum auxilia in ſemine maſculo innotuerunt, omnia ad patrem referebantur; ſed lepidam hanc obſeruationem vermiculorum, et exinde deductam ſententiam, multis argumentis euerſam eſſe aliunde conſtat. Qui vero praerogatiuam hanc ſoli matri tribuunt ſententiam ſuam propugnant praeprimis iſtis viarum anguſtiis, quae ab vtero per tubas fallopianas ad ouaria ducunt, et per quas ſemen maſculinum vtpote pigrum peruenire haud valet. Non

minus

minus ponderis quoque ſe habere in exemplis a paruitate penis prauaque ipſius conformatione deſumtis confidunt, quorſum et noſter caſus referendus eſſe videtur; impediretur enim iter ſemini ob aperturam loco minus idoneo factam, et in coitu per attritum ad parietes vaginae obturaretur omnino, niſi Natura in aberrationibus ſuis miraculum faceret, quod non ſine magna animi voluptate hoc in caſu cognoui. Non enim huic ſoli partium genitalium prauam formam induit Natura, ſed et duo ipſius fratres pari paſſu cum ipſo ambularunt.

Hi itidem iuſſu Excellentiſſimi Domini Gubernatoris de *Goloffzin* adducuntur in orbem. Alter ipſorum erat XXX. annos natus, et per decennium iam matrimonio iunctus, alter vero annum XXII agebat, et ante quinque annos vxorem duxit. Maior natu quatuor iam genuit perfectos liberos, quorum duo inter viuos, duo inter mortuos numerantur. Ex lumbis vero natu minoris, ob vxorem decrepitam nulli prodierunt liberi. Ceterum vterque erat ſimillimus fratri minimo natu. Nulla ipſis aderat barba, vbera, vox et facies muliebres. Partes genitales ad aſſem referebant iconem adpoſitam, hoc ſolo cum diſcrimine, quod omnia fuerunt flaccidiora prouti in caſtris veneris exercitatis contingere ſolet. Ex his iam miram illam ad procreandos liberos intellexi potentiam; illis enim dum erigitur coles, intumeſcit ſimul et apertura vrethrae (B), expanditque ſe ſecundum ſulcum colis inferiorem vsque ad inci-

inciſuram glandis (*a*), ſic libera et commoda aperitur via ſemini eiaculato, quod eo fortius erumpit, quo magis per hanc elongationem orificium vrethrae ad extremitatem anguſtatur. His ſub conditionibus facile attingit, orificium vteri, in coituque foecundo ſua peragit officia. Vana igitur mihi videntur argumenta a mala conformatione penis depromta, quibus ſententiam ſuam defendere conantur illi, quibus omnia patri in formatione foetus denegare placet. Nullus enim dubito huius generis obſeruationes non ex amuſſim enarratas, mirumque illum in obſeruationibus Naturae mechanismum neglectum eſſe. Noſtra porro obſeruatione fretus et a paruitate penis deducta argumenta non magni momenti exiſtimo; quid enim vetat et in his ſupponere validioris conſtitutionis muſculos, quibus eiaculatio ſeminis adiuuatur, et vrethram ad orificium magis anguſtatam, vt mirum illum vteri deſcenſum claris viris obſeruatum taceam.

Seminis eruptio noſtris non ſine voluptate contingit, et cum quadam amoena pulſatione in glande. Praeterea ſunt valde ſalaces et celerius ipſis excitatur voluptas; aſt tempore pluvioſo et lurido friget Venus; teſticuli enim tunc retrahuntur in inguina, dolent et totum fatigant corpus, tempore vero ſereno iterum in ſacculos ſcroti delabuntur, priſtinumque corpori reddunt vigorem. Vrina cito colligitur, citoque ob breuitatem vrethrae elabitur. Vires ipſis non foemineae, ſed maſculae et ad exercendos colonorum labores aptae.

 Haec

Haec ſunt illa, quae de noſtris volui, potui. Non enim mihi introſpicere licet internam partium ſtructuram, mirumque illum in coitu mechanismum. Neque diuinare poſſum vnde vox, facies ac mammae muliebres, defectusque barbae proueniant. Non caſu haec fiunt, ſed ex praeternaturali partium genitalium conformatione deriuanda. Illam denique quaeſtionem, vnde tanta in tribus fratribus partium genitalium a via conſueta aberratio, non meam facio; ſuppleant ipſam, ſi lubet, illi, quibus imaginatio felix omnia diuinare permittit. Id tandem mouendum habeo parentes ipſorum bene formatos eſſe, produxiſſeque alios liberos vtriusque ſexus, nullo defectu, nullaque peruerſa conformatione laborantes.

SALMO

SALMO LEVCICHTHYS
ET
CYPRINVS CHALCOIDES.
DESCRIPTI.

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

Mare Caſpium piſcium quantitate omnino abundans, magis indiuiduorum copia, quam ſpecierum varietate ſuperbit; haec enim ad decades quatuor vix accedunt. Plurimae harum *Europaeae* et aquarum dulcium ſunt. Ex *Cyprinorum* genere inueniuntur: *Barbus*, *Carpio*, *Gobio*, *Tinca*, *Caraſſius*, *Rutilus*, *Idus*, *Orfus*, *Erythrophthalmus*, *Ieſes*, *Naſus*, *Aſpius*, *Alburnus*, *Vimba*, *Brama*, *Cultratus*, *Bioerkna*, *Farenus*, *Ballerus*; quibus accedunt *Eſox Lucius*, *Salmo Salar*, *Silurus Glanis*, *Cobitis Taenia* et *Barbatula*, *Perca Cernua*, et *Fluuiatilis* et *Lucioperca*, *Gadus Lota* (quae nomina ex *Edit. XII. Syſt. Nat. Illuſtr. Equ. avr. a LINNE* intelligenda). Agmini huic iungitur generoſa *Acipenſerum* gens, cum vulgo piſcibus adnumeranda, corporis mole ſpecioſa, indiuiduorum copia immenſa, ſpecierum numero minus nota.

Nam praeter *Huſonem*, *Sturionem* et *Sterletam Ruſſorum*, quae *Acipenſer ruthenus* LINNAEI, occurrunt duae ab his diuerſae ſpecies, quarum vna *Seuruga*, altera *Schypa*, et a *Ruſſis* et a nobis trivialiter appellatur; quae certe omnes inter ſe valde affines et aegre, a numero partium vix vnquam, diſtinguendae. Numerus enim radiorum pinnarum vix differt in huius generis naturaliſſimi ſpeciebus, et, ſi differat, nunquam cum certitudine determines; et cirrorum numerus in omnibus quaternus; numerus autem ſquamarum maiorum tuberculoſarum in lineis ordinatarum equidem diuerſus, ſed minime conſtans eſt, quae inſuper in omnibus aetate profectis obſoletae euadunt, ita vt nec praeſentia vel abſentia tuberculorum ſpecies diſtinguat. Capitis partes notas differentiales haud infrequentes et conſtantiſſimas largiuntur. Quaeſiuimus igitur, *Ill* KRAMERI, de animalibus *Auſtriacis* meritiſſimi, veſtigia prementes, notas ſpecificas. Primarias ex roſtri figura, eiusdemque ad oris diametrum proportione, ſecundarias ex labiorum figura et ſitu cirrorum ad roſtri apicem et oris rictum relatiuo; exinde nobis.

Huſo: *Acipenſer* roſtro obtuſiſſimo, oris diametro longitudine cedente; cirris ori propioribus; labiis integris.

Sturio: *Acipenſer* roſtro obtuſo, oris diametro transuerſo longitudine aequali; cirris roſtri apici propioribus; labiis bifidis.

Schuba:

Schypa : *Acipenſer* roſtro obtuſo, oris diametro quoad vnam tertiam partem longiore; cirris roſtri apici propioribus; labiis bifidis.

Sterleta : *Acipenſer* roſtro ſubulato, recto, diametro oris quadruplo longiore; cirris vix ori propioribus; labiis integris.

Seuruga : *Acipenſer* roſtro ſpatulato, ſub recuruo, diametro oris trans-verſo ſextuplo longiore; cirris ori propioribus; labiis integris.

Quorum magnitudine *Huſo* primus, non raro nouempedalis; *Sturio* ſecundus, plerumque ſexpedalis; *Schyia* et *Seuruga* ſubaequales, vix quinque pedales; *Sterleta* tandem raro tripedalis Sufficiant ſpecifica haec *Acipenſerum* nomina, donec plenariam horum hiſtoriam loco opportuniori communicauerimus.

Denominandi reſtant duo Maris *Caſpii* ciues, plane indigeni et Ichthyologis minus noti, qui nobis, altero *Salmonibus*, altero *Cyprinis*, ſecundum principia *Illuſtr. Equitis aurati a LINNE in ſyſtemate Naturae* ſtabilita, adſociato, audiunt: *Salmo Leucichthys* et *Cyprinus Chalcoides*; vtrumque rite deſcribamus.

SALMO LEVCICHTHYS.

Statura et *Magnitudo Salmonis Salaris LINNEI* ſeu *Salmonis primi ARTEDII*, qui *Salmo vulgaris*

garis

garis omnium auctorum, ita vt huius icones etiam *Leucichthydis* ideam ſat claram ſiſtant.

Caput et *Corpus* oblongum, parum compreſſum, extenſione ab apice roſtri ad caudam vsque recta, plane non adſcendente; hinc omnis latitudo piſcis ab abdomine modice deorſum arcuato; *habitus* ſquamoſus et malacopteryeiius.

Roſtrum obtuſiſſimum: *mandibula ſuperior* latiſſima, integra, recta; *inferior* adſcendens, ſubconica, apice tuberculoſo ante ſuperiorem prominens; vtraque edentula, *rictus* terminalis, ampliſſimus, quadratus; *lingua* triangularis, ſoluta, ſubaſpera; *oris cauitas* alba immaculata; *palatum* latum, planum, antrorſum vtrinque ſubaſperum *denticulis* minimis, tactu, non viſu, percipiendis; *nares* medium inter roſtrum et oculum occupantes, apertura vtrinque gemina, anguſta; *oculi* laterales, liberi, ampli, iride argentea, punctulis nigris irrorata.

Vertex fornicatus, nudus, glaberrimus, ſubdiaphanus, hyalino-fuſcus et nigro punctatus.

Branchiarum opercula ex quatuor laminis oſſeis conflata, compreſſa, argentea et punctis nigris irrorata; *Membrana branchioſtega* alba, decem radiata, oſſiculis diſtinctiſſimis, latis, parum arcuatis.

Branchiae vtrinque quinque; *radii* in angulum valde acutum geniculati; in parte connexa quatuor anteriorum *plumae* duplices et laxiſſimae, quinto in ipſis faucibus obuio, nudo; in parte concaua primus ſecun-

ſecundus et quintus *apophyſium* laeuium longiſſimarum vnico, tertius et quartus duplici ordine inſtructi, poſterioribus in tertio obſoletiſſimis, in quarto ſat eminentibus.

Dorſum latiſſimum, vbique conuexum; *venter* a branchiarum foramine ad pinnas ventrales planiuſculus, ab hinc ad eandem ſat conuexus; *latera* plano conuexa, *linea lateralis* recta, dorſo aliquantum propior quam ventri, dorſoque parallela; *ſquamae* pro mole piſcis haud adeo magnae, ſubrotundae, imbricatae, laeues, vbique argenteo ſplendore nitentes, in dorſo a muco cutaneo ſub ſquamis nigro caneſcentes, punctis nigris vbique irroratae, ſed in ventre immaculatae; *anus* caudae multo propior, quam capiti, proxime ante pinnam ani, apertura duplici.

Pinnae dorſales duae, *prima* vera in medio corporis ſita, pinnis ventralibus tantillum anterior, ex albicanti punctis nigris fuſceſcens, radiis quindecim, quorum quatuor primi integri, reliqui apice ramoſi, primus minimus; *ſecunda* ſpuria, adipoſa, craſſa, ſubdiaphana, hyalina, punctis nigris adſperſa, integra, parua, pinnae ani oppoſita.

Pinnae pectorales acuminatae, albae, pone branchiarum foramen ſitae, radiis quatuordecim, primo integro, reliquis ramoſis.

Pinnae ventrales in medio abdomine, pone pectorales ſitae, rotundatae, albae antrorſum fuſco punctatae, radiis vndecim, primo integro; accedit ſupra

ſupra baſin harum pinnarum *apophyſis* triquetra acuminata, cartilaginea.

Pinna ani decreſcens, rubicunda, fuſco-maculata, radiis quatuordecim, primo breui, ſubadipoſo, ſimul cum ſecundo, longiſſimo et integro, reliquis ramoſis.

Cauda perpendicularis, ſemilunata, ſubadipoſa hinc radii aegerrime numerandi, qui inſuper ramoſiſſimi ad baſin fere vsque, ni fallimur, viginti ſeptem, a longiſſimis extimis numerandi.

Magnitudo tripedalis vulgo, non raro vltra.

Dimenſiones partium externarum ſecundum pedem *Londinenſem* ita:

	poll	lin.
Longitudo ab apice maxillae inferioris ad ſuperiorem	—	4.
—— ab apice maxillae ſuperioris ad nares	1.	—
—— —— —— —— —— ad oculum	2.	—
—— —— —— ad foramen branchiarum	6.	—
—— —— ad pinnae dorſ. 1ae initium	19.	6.
—— —— ad pinnae dorſ. 1ae extremum	23	6.
—— —— ad pinnae dorſ. 2ae initium	32.	8.
—— —— ad pinnae dorſ. 2ae extremum	34.	—
—— —— —— —— ad caudae radicem	37.	6.
—— —— ad caudae cruris ſuper. apicem	43	9.
—— ab apice maxillae inferioris ad pinnarum pectoral. radicem	9.	—
—— —— ad pinnarum pector. apicem	14.	—
—— —— ad pinnarum ventral. radicem	20.	6.

Longi-

	poll.	lin.
Longitudo ad pinnarum ventr. apicem	25.	—
—— —— ad anum - - - - - -	31.	—
—— —— —— ad pinnae ani initium	31	4.
—— —— —— ad pinnae ani extremum	35	10
—— —— —— —— ad caudae radicem	39.	4.
—— ad cruris inferior. caudae apicem	45.	—
Diameter rictus oris aperti perpendicularis	3	4.
—— —— —— —— tranſuerſalis - -	2.	8.
—— inter nares - - - - - -	1.	4.
—— capitis perpendicularis inter nares -	2.	—
—— inter oculos - - - - - -	2.	—
—— capitis perpendicularis inter oculos -	3.	—
—— oculorum - - - - - -	—	10.
—— inter lineas laterales ad branchiarum foramen	3.	6.
—— corporis perpendicularis ibidem - -	5.	6.
—— inter lineas laterales ad pinnas ventrales	3.	—
—— corporis perpendicularis ibidem - -	6.	—
—— inter lineas laterales ad anum - -	2	8
—— corporis perpendicularis ibidem - -	4	8.
—— inter lineas laterales ad caudam - -	1	2.
—— corporis perpendicularis ibidem - -	2.	6.
—— corporis perpend. maximus inter pinnas Pect. et Ventr.	6.	6.
—— —— tranſuerſalis maximus ibidem -	4.	—

Pondus Piſcis dimenſi adaequat octodecim libras medicinales.

Cor ſat magnum, exacte pyramidem triquetram referens, carnoſum et ſtrictum, baſi antrorſum

ſeu ſurſum ſpectante, ſiniſtrorſum aorta Bullata, dextrorſum auricula ampliſſima aucta.

Diaphragma membranaceo-tendineum, *peritoneum* album.

Hepar latum, quadrangulum, integrum, brunneo-luteſcens, diaphragmati adiacens, angulo ſiniſtro aliquantum deſcendens; *veſicula fellea* ampliſſima, ſuperficiei inferiori hepatis adhaerens et ad marginem anteriorem prominens, bile atro-virente ſcatens, viſcera adiacentia inquinans.

Lien triangularis, latus, vix hepati minor, aterrimus, in medio fere ventre, ventriculi flexurae adnexus, extremitate ſuperiore ſubbifida.

Oeſophagus ſat amplus diaphragmate perforato continuat in ventriculum nec cardia diſtinctum, nec ampliorem, qui recta per 9. pollices ad medium fere abdominis deſcenſus recuruatur, et per 5. pollices iterum adſcenſus ſpinctere pylori conſtringitur et abit in *inteſtinum*, quod dum longitudine 5. pollicum abſoluta ad hepar peruenerit iterum reflectitur et per 16. pollices ad anum vsque recta procedit, diametro vbique aequali, ventriculo dimidio anguſtiore *proceſſus vermicalares* caeci, numeroſiſſimi, adipe intricati, omnem inteſtini peripheriam a pyloro vsque ad flexuram obſidentes, poſt flexuram in parte deſcendente rariores et in vno tantum latere inteſtini nec vltra regionem pyloro reſpondentem obuii, interne in inteſtinum hiantes; quod interne a luminibus hiſce approximatis quaſi cribroſum et muco

tenuis-

tenuiſſimo albido ſcatens, abhinc obſolete longitudinaliter et tandem aliquot pollices ante anum transverſaliter rugoſum; ventriculus interne longitudinaliter rugoſus, valuulis eminentiſſimis rectis atque annulo parum eminenti ad pylorum terminatus.

Ouaria duo, ſimplicia, per totum abdomen ad latera veſicae aëreae vtrinque decurrentia, obſcure rubra; *veſiculae ſpermaticae* his analogae, albae.

Veſica aërea oblonga, ampliſſima, ſimplex, per totum abdomen ad ſpinam dorſi decurrens; *ductu pneumatico* breui, ſed amplo ab oeſophago ad extremitatem ſuperiorem veſicae abeunte.

Renale viſcus ſanguinolentum, ad ſpinam dorſi latiſſimum.

Caro cruda rubicunda, cocta alba omnino, oleoſo-pinguis, ſapidiſſima, praeſertim fumo indurata et tunc *ſalmonem* vulgarem et gratitudine et dulcedine multoties exſuperans, hinc merito in ſummis per *Ruſſiam* deliciis, menſis principum dicatis.

Coitum celebraturus adſcendit e Mare *Caſpio Wolgam* menſibus hiemalibus, reliqua mare hoc petentium fluuiorum oſtia omnino praetereuns, excepto Iaico ſeu Rhymno.

Per *Ruſſiam* appellatur Belaia Rybyza (белая рыбича) i. e. albus piſcis; inde nomen triuiale noſtrum, naturae piſcis conuenientiſſimum.

 Nemi-

Neminem dubitaturum fore confidimus, quod piſcis nunc ſat fuſe deſcriptus *Salmonibus* LINNAEI iure adſociatus ſit, qui ad *Coregonos* ARTEDII pertinet, atque propter maxillas edentulas et inferiorem pro *Coregono primo* ARTEDII et *Salmone Albula* LINNAEI haberi poſſet, niſi magnitudo et reliqua non pauca aduerſarentur. Ad remouendam hanc ambiguitatem notis hiſce ſpecificis, radiorum membranae branchioſtegae numerus addendus eſt; ſit igitur.

Leucichthys: *Salmo* maxillis edentulis, inferiore longiore; radiis membranae branchioſtegae decem.

Albula: *Salmo* maxillis edentulis, inferiore longiore; radiis membranae branchioſtegae ſeptem.

Synonyma cum veri ſpecie nulla ex ARTEDIO, qui vnicus Ichthyologorum inſtar omnium in peregrinatione ad manus eſt, *Leucichthydi* vindicare poſſumus: hinc pro piſce nouo Mari *Caſpio* proprio habemus.

Accedamus ad ſocium, qui.

CYPRINVS CHALCOIDES.

Statura Clupeae Harengi, cuius clariorem ideam icon magnitudinem naturalem exprimens ſiſtit.

Corpus compreſſo-oblongum, ſquamoſum et malacopterygium.

Caput compreſſum, acuminatum; *mandibula ſuperior* ſubrecta, obſolete emarginata, vaginata; *inferior*

inferior ante ſuperiorem prominens apice tuberculoſo, ſurſum eleuato, ſinui mandibulae ſuper oris reſpondente; vtraque edentula; *rictus* terminalis, rotundatus, vix indicis apicem recipiens; *Lingua* oblonga adnata, cartilaginea, alba, laeuis, *Oris* cauitas alba, ſpatio apicem mandibulae inferioris inter et linguam punctulis fuſcis irrorato, *palatum* ſubconcauum, laeue; *fauces oſſiculo* plano, albo, exaſpero munitae; *nares* verticales, medium roſtrum et oculos inter occupantes, apertura vtrinque gemina, valuula inter media poſticam obtegente diſtincta; *oculi* laterales, liberi, ori propiores, quam branchiarum foramini; iride argentea, ſuperne ſubaurata et punctulis nigris irrorata, inferne plerumque macula ſanguinea notata; pupilla circulari, atra.

Frons et *Vertex*, fuſco-virens, rotundato-planus, linea recta a roſtro procedens; *gula* deorſum arcuata.

Branchiarum opercula plana, laeuia, nitidiſſime argentea; *membrana branchioſtega* triradiata, alba; *branchiae* vtrinque quinque; radii arcuati; in parte conuexa quatuor anteriorum plumae duplices, quinto in ipſis faucibus obuio nudo; in parte concaua apophyſes dentiformes, laeues, in quatuor anterioribus duplici ordine, quorum exterior primi radii reliquis ſub aequalibus multo longiori, in quinto ſimpliciter diſpoſitae.

Dorſum parum conuexum, modice adſcendens; *venter* deorſum arcuatus, vt exinde latitudo piſcis,

 a gula

a gula ad pinnas ventrales planiuſculus, ab hinc ad anum in carinam acutam contractus, caudam verſus rotundatus; *latera* conuexo-plana; *linea lateralis* deorſum arcuata, ventri propior et parallela, punctis eleuatis albidis circiter 70. *Squamae* omne corpus obtegentes, rotundatae, imbricatae, ſtriatae, in dorſo ex caneſcenti et vireſcenti argenteae et punctis fuſcis irroratae, ad latera ſplendide argenteae, in ventre lacteae; *anus* caudae multo propior, quam capiti, proxime ante pinnam ani, apertura duplici.

Pinna dorſalis medium fere dorſi occupans, ſubquadratica, fuſceſcens, radiis duodecim, quorum primus ſecundo dimidio breuior, ſecundus longiſſimus, ambo integri, reliqui decreſcentes et ramoſi.

Pinnae Pectorales pone branchiarum foramen, oblongo-acuminatae, albae, radiis vulgo ſexdecim, rarius quindecim vel ſeptemdecim, quorum primus maximus, reliquis robuſtior, fuſcus et ſimplex, reliqui ſubramoſi, vltimi minimi et proximi.

Pinnae ventrales pone pectorales, parum ante dorſalem, in medio abdomine ſitae, rotundatae, albae, radiis nouem, quorum primus longior et ſimplex, reliqui decreſcentes et valde ramoſi; accedit ſuperius ad pinnarum harum radicem apophyſis ſquamoſa, lanceolata, alba.

Pinna ani medium inter pinnas ventrales et caudam occupans, decreſcens, radiis vulgo nouemdecim, variantibus inter 17 vsque ad 20, quorum primus breuiſſimus, ſecundus duplo longior, tertius lon-

longiſſimus, omnes tres ſimplices, reliqui decreſcentes et ramoſi.

Cauda perpendicularis, bifurca, fuſca, radiis nouemdecim, exceptis quatuor vtrinque breuiſſimis extimis, quorum longiſſimi exteriores ſimplices, reliqui ramoſi.

Magnitudo vix pedalis.

Dimenſiones partium externarum ſecundum pedem londinenſem ita:

	poll.	lin.
Longitudo ab apice maxillae inferioris ad ſuperiorem	—	2.
—— ab apice maxillae ſuperioris ad nares	—	5.
—— —— —— —— ad oculum - - -	—	7.
—— —— —— —— ad branchiarum foram.	1.	10.
—— —— —— —— ad pinnae dorſalis initium	4.	9.
—— —— —— —— ad pinnae dorſalis extremum	5.	11.
—— —— —— —— ad caudae radicem -	9.	3.
—— —— —— —— ad caudae cruris ſup. apicem	11.	6.
—— ab apice maxillae inferioris ad radicem P. pectoralis	2.	2.
—— —— —— —— ad pinnae pector. apic.	3.	6.
—— —— —— —— ad P. ventralium radicem	4.	8.
—— —— —— —— ad anum - - -	6.	6.
—— —— —— —— ad P. ani initium	6.	7.
—— —— —— —— ad P. ani extremum	8.	2.

Lon-

	poll	lin.
Longitudo ad caudae radicem - - -	5.	7.
—— —— —— —— ad caudae cruris inf. apicem	11.	10.
Diameter rictus oris aperti perpendicularis	—	8.
—— —— —— —— —— tranſuerſalis -	—	6
—— inter nares - - - - - - -	—	5
—— capitis perpendicularis inter oculos -	1	1.
—— inter oculos - - - - - -	—	11
—— oculorum - - - - - - -	—	6.
—— inter lineas laterales ad branchias - -	1.	1
—— corporis perpendicularis ibidem - -	1.	1
—— inter lineas laterales ad pinnas ventrales	1.	1
—— corporis perpendicularis ibidem - -	2	4.
—— corporis perpendicularis ad anum - -	2	—
—— inter lineas laterales ad caudam - -	—	3
—— corporis perpendicularis ibidem - -	1.	—
—— corporis perpendicularis maximus ad P. dorſalem	2.	5.
—— corporis tranſuerſalis maximus ibidem	1.	3.

Cor ſubrotundum, piſo vix maius, corpore dextrorſum, auricula ſiniſtrorſum ſpectante, pericardio argenteo, tendineo, diaphragmati adnexo incluſum.

Diaphragma tendineum, ſtrictum; *peritoneum* argenteum, punctis nigris irroratum.

Hepar corpore lato, plano, diaphragmati ſuccumbente, e quo procedunt lobi tres, tenuiſſimi, longi; quorum medius reliquis longior, ad pinnas ventra-

ventrales vsque extenſus, abdomini parallelus; dexter longitudine medius, in hypochondrio dextro ſpinam dorſi verſus ſitus et *veſicula fellea* parua auctus; ſiniſter breuiſſimus; omnes inteſtino arctiſſime adnexi et adipe inuoluti.

Lien atro-rubens, tenuis, linearis, extremitati lobi ſiniſtri hepatis adnexus et inter hunc et ventriculum proceſſum longum diaphragma verſus emittens.

Ventriculus ab inteſtino non diſtinctus, niſi quod aliquantum amplior ſit; *inteſtinum* primo ad anum deſcendit, tunc iterum ad diaphragma retrogreditur et tandem ad anum redit; latitudinis vbique aequalis, pennam anſerinam vix excedentis; longitudinis a gula ad anum eiusdem cum piſce toto; interne laeue, muco albido repletum et *Faſciolas inteſtinales* fouens.

Ouaria duo, linearia, ad latera veſicae aereae ſita, per totum abdomen decurrentia, albida, ouulis minimis foeta, hinc *veſiculis ſpermaticis* his analogis aegre diſtinguenda.

Veſica aerea a diaphragmate ad anum extenſa, ſpinae adiacens, medio conſtricta; *ductu pneumatico* longo, tenui, ex faucibus ad partem inferiorem veſicae procedente.

Renale viſcus ſanguinolentum, ſpinae dorſi pone veſicam aeream adhaerens.

Caro cruda et cocta alba; adeps oleoſa, inter abdominis tunicas et viſcerum plexum abundans.

Coſtae vtrinque quindecim; vertebrae quadraginta quatuor; oſſicula ſetacea muſculis interpoſita plurima.

Coitum celebraturus adſcendit gregatim e mare *Caſpio* per Nouembrem, Decembrem et Ianuarium *Terek* fluuium et *Cyrum* ſeu *Kur* Perſarum, a *Wolga* et *Iaico* omnino abhorrens, nec non *Sulak* fluuii oſtium, vix ſemigradum a *Terek* fluuio diſtans, et huic maximopere analogum, praetereuns.

A Perſis et Tataris appellatur noſter *Schamahi* ſeu contracte *Schumai* i. e. princeps piſcium, quia caro omnium ſapidiſſima, praeſertim aſſata ſeu fumo cocta; a Coſacis Terekienſibus ruſſice *dſchirnaia ryba* (жирная рыб) i. e. pinguis piſcis, ob adipem largiſſimam; a Germanis in Ruſſiam obuiis propter locum natalem et corporis habitum *Harengo* non abſimilem, *Kuzlariſcher Hering*, i. e. Kislarienſis Harengus; inde etiam noſtrum triuiale nomen a Graecis, quibus Harengus chalcois audiebat, mutuatum.

Nominis generici ratio ex deſcriptione nunc tradita ſatis ſuperque patet. Inter congeneres proxime accedit ad *Aſpium*, a quo attamen plurimis et euidenter magnitudine diuerſiſſimus; nomine ſpecifico igitur *Chalcoides* optime denominandus.

Cyprinus pedalis; radiis pinnae ani nouemdecim; maxilla inferiore longiore, incurua.

Synonyma pro chalcoide nulla inuenimus; nam *cyprinum americanum* LINNAEI, quanquam huic quae-

dam

dam cum *Chalcoide* communia ſint, huc referre nequimus, quia ea, quae de hoc piſce ex *Syſtemate Naturae* nota ſunt, nimis laconica, vt exinde aliquid certi concludi poſſit; nec corpus noſtri ſat latum eſt, vt cum *Rutilo* conferri poſſit, hinc eo magis dubitamus.

Hi ſunt igitur noti, cum minus notis, maris *Caſpii* ciues e piſcium gente; quibus adſociantur *Phoca vitulina* et *muſtela lutra* ad ripas maris et inſularum ſat frequentes. Ex *Cetaceorum*, *Molluſcorum*, *Conchyliorum* et *Piſcium Chondropterygiorum*, Acipenſeribus exceptis, familiis, nemo, quantum nobis equidem conſtat, mare hocce inhabitat, cuius maturiorem et conſummatam deſcriptionem ab *Illuſtr.* GMELINO noſtro, totas quantas haſce aquas a ſeptentrione ad meridiem vsque induſtria et ſagacitate ſumma inueſtigante, exſpectat orbis litteratus. Liceat interim ichthyologis per *vos* ACADEMICI, ſpoliis hiſce maris *Caſpii*, ad *Wolgae* et *Terek* fluuii oſt a iuſſu IMPERATRICIS et ACADEMIAE ad inquirendum concredita, collectis vti.

KRASCHENINNIKOVIA,

NOVVM PLANTARVM GENVS.

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

Corpora omnia viua et organica arctiſſimo affinitatis vinculo inter ſe coniunxiſſe ſummum rerum conditorem, ſatis ſuperque patet naturae conſultis, omne in eo conuertentibus, vt ſingula elegantiſſimae huius concatenationis membra perſpiciant. Horum induſtria, quae intermediam Zoophytorum naturam rite determinauit, factum eſt, vt alieniſſima, animalia nimirum et plantae, fratres germani euaſerint. Sed dantur adhuc hiatus ſat ampli inter ordines claſſium et ampliores inter genera ordinum, non culpa naturae, ſaltum facere neſciae, ſed cognitionis noſtrae, temporis beneficio amplificandae, tenuitate, qua in tanta rerum naturalium copia et inueſtigatorum inopia non poſſumus non hucusque laborare. Hinc Hiſtorici naturales, praeſertim Botanici, ſyſtemati naturali indulgentes, nonniſi fragmenta ordinum propoſuerunt, quae ſaepius manca ſunt, ſaepius nimis diuerſa coniungunt, ob deficientem ſpecierum notitiam; quarum ſi plures notae euadunt, ordines ſaepe coaleſcunt et genera, quae antea fere diuerſi ordinis dixiſſes, intermediis nouis ſat arcte combinantur.

Veritas

Veritas dicti elucet, ſi, vt reliqua taceamus, ad ordinem XII. ſyſtematis naturalis, quod *Ill. Eques auratus a* LINNE in *Editione ſexta Generum plantarum* propoſuit, attendere velis. Conuenies equidem nobiſcum *Laurum* et *Callitrichen* toto coelo, vt aiunt, differre; attamen quaedam communia habent, vt non absque ratione eidem ordini inſerantur, et forſan dies ſero veniens, plantis intermediis detectis, maiorem affinitatem reuelabit. *Chenopodii*, *Atriplicis* et *Ceratocarpi* facies externa vix repugnat, quo minus eiusdem ordinis naturalis haec genera habeas, quibus *Vrtica* non inepte adſociari poſſit. Sed eadem haec facies et partium ſtructura indicat gnaris, plantas alias adhuc latere, quae ad integritatem affinitatis ſcalae requiruntur.

Ad hiatum hunc aliquomodo implendum inſeruit planta hucusque minus cognita, quae nobis per campos *Tanaicenſes* et *Wolgenſes* peregrinantibus obuiam iuit; *Ceratoidem orientalem fruticoſam*, *Elaeagni folio* TOVRNEFORTII (vid. *corollar.* p. 52.) volumus, cuius partium fructificationis cognitione et deſcriptione omnino carent Botanici; hinc factum eſt, vt ab illis vage huc inde relata ſit.

TOVRNEFORTIVS, qui omnium primus plantam in *Oriente* lectam propoſuit, cum *Ceratoidi orientali maiori* et *minori*, *annua*, *Pſyllii folio*, ſeu cum *Ceratocarpo* BVXBAVMII et LINNEI eiusdem generis eſſe putauit; STELLERVS, qui eam in campis *Sibiricis* inuenit, nunc ad *Blitum*, nunc ad *Campbora-*

phoratam retulit; LINNEVS prius *Vrticae*, nunc *Axyridi* adnumerauit; GMELINVS tandem, monitis *Linneanis* ſequens, pariter *Axyridi* adſociauit in *Florae Sibiricae* Tom. III. p. 18. aſt ſemper dubitanter; hinc *l. c.* ait: 'quouis modo in ſtructuram par-„tium ad florum et fructuum formationem ſpectan-„tium, diligenter inquiſiuimus, ſed, quod candide „fatemur, nihil diſtincti, oculis licet armatis vten-„tes, elicuimus, vt de charactere generico certi „quid proferre nondum liceat. B. STELLERVS ni-„hil quidquam ſeminum detexit, tria tantum ſta-„mina in ſingulis floribus ſibi vidiſſe viſus eſt; du-„bitat autem, an non imaginatione tantum eiusmo-„di illi ſors contigerit„.

Planta viua in ſolo natali florente a nobis examinata, certo certius conſtat, quod non ſolum STELLERVS, ſed et omnes reliqui Botanici, huius plantae mentionem facientes, errauerint, cui cum *Axyride* vix vlla, cum *Atriplice* et *Vrtica* haud pauca et cum *Ceratocarpo* adhuc plura communia ſunt. Flores plantae noſtrae cum characteribus horum generum, quos *Ill. Eques a* LINNE in *editione ſexta generum plantarum* dedit, conferenti, ſtatim patet, quod nullam horum intrare poſſit, ſed potius genus proprium conſtituat, omnino intermedium inter *Atriplicem*, *Vrticam* et *Ceratocarpum*, cum his ſimul in ordine ſupra citato naturali *Holoracearum* militandum.

Genus

Genus hocce nouum ſalutatur a nobis: *Kraſcheninnikouia.* Sacrum enim eſſe optamus manibus STEPHANI KRASCHENINNIKOVII, membri *Illuſtriſſimae Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* quondam digniſſimi, Botanici e *Ruſſica* gente primi, improbo itinere *Kamtſchatico*, quod hiſtoriae naturalis gratia iniit, ſedula *Florae ingricae* conſcriptione, quam *Perill. de* GORTER, ceu opus poſthumum edidit, atque eruditis variis diſſertationibus quas *Commentarii Petropolitani* continent, orbi litterato ſatis ſuperque noti atque de nobiliſſima noſtra ſcientia, quam profeſſus eſt et egregie auxit, meretiſſimi; aequum igitur eſſe putauimus, vt haec ipſa memoriae *Viri optimi*, praecaci fato deflorati, monumenta ponat, licet non aerea, ſed lignea, iis tamen perenniora.

Kraſckeninnikouiae characterem genericum ad naturae nutum concinnauimus ſequentem:

Maſculi flores ſubamentacei;

CALYX: *Perianthium* tetraphyllum, perſiſtens; *foliolis* aequalibus, obtuſis, concauis, in globulum conniuentibus.

COROLL: nulla.

STAMINA: *filamenta* quatuor, capillaria, thalamo inſerta, foliolis calycinis oppoſita, eorumque longitudine; *antherae* ſubrotundae, didymae.

Feminei flores in eadem cum maſculis planta;

CALYX:

CALYX: *Perianthium* monophyllum, vrceolato-compreſſum, ſulco vtrinque carinatum, ſubbifidum; *laciniis* cornuto-erectis, parallelis, tubuloſo-concauis; *fauce* inter laciniarum ſinum anguſtiſſima, perforata.

COROLLA nulla.

PISTILLVM: *germen* ouatum, ſuperum; *ſtylus* ſimplex, per faucem perianthii tranſiens; *ſtigmata* duo, capillaria, reflexa.

PERICARPIVM: *Calyx* dilatatus, amplificatus, ſemen in ſinu fouens et vndique tegens.

SEMEN vnicum, ouato-compreſſum, *arillo* laxiuſculo veſtitum, quo defracto extremitates duae deorſum flexae et approximatae ſecedunt, vna acuminata et integra, altera obtuſa in duo labia dehiſcente.

Kraſcheninnikouia igitur ſyſtematis *Linneani* Monoeciae Tetrandriae, poſt *Vrticam*; ſyſtematis *Gleditſchiani* Thalamoſtemonibus Tetrantheris, floribus ſimplicibus, apetalis, hypocarpiis, poſt *Vrticam*; ſyſtematis *Ludwigiani* Relatiuis Monophytis, apetalis, poſt *Ceratocarpum*, ſyſtematis *Tournefortiani* herbis et ſuffruticibus ſtamineis, quorum piſtillum abit in ſemen calyce obuolutum, poſt *Atriplicem*; et ſic reliquis auctorum ſyſtematibus plantarum inſerenda eſt.

Mirabuntur forſan lectores, quod tanta inter *Kraſcheninnikouiam* et *Ceratocarpum* antea praedicata ſit

ſit affinitas, quam vix inuenient conferentes characterem *Ceratocarpi*, ab *Ill. Equite a* LINNE *l. c.* traditum, cum *Kraſcheninnikouiae* charactere nunc exhibito; ſed deſinent mirari certiores facti, characterem *Ceratocarpi* huc vsque notum minus naturae conſentaneum eſſe. En! reformatum:

Ceratocarpi maſculi flores ſolitarii, ſparſi;

CALYX: *perianthium* monophyllum, cordato-tubuloſum; *limbo* poſtice acuminato, antice ſemilunato, integerrimo.

COROLLA nulla.

STAMEN: *filamentum* vnicum, capillare, vix tubo perianthii longius, thalamo inſertum et fundo calycis adglutinatum; *anthera* didyma, erecta, vltra calycis limbum prominens.

Feminei flores in eadem cum maſculis planta;

CALYX: *Perianthium* monophyllum, cordato-compreſſum, neruo vtrinque eminenti carinatum, ſubbifidum; laciniis ſubulatis, diuergentibus; *fauce* inter laciniarum ſinum anguſtiſſima, rimam referente.

COROLLA nulla.

PISTILLVM: *germen* oblongum, ſuperum; *ſtyli* et *ſtigmata* duo, capillaria, per faucem calycis tranſeuntia, patentia.

PERICARPIVM: *Calyx* maior, figura immutata, ſemen in ſinu fouens et vndique tegens.

SEMEN oblongo-compreſſum, inferne anguſtius, fundo calycis adhaerens, alias liberum, *arillo* laxiuſculo veſtitum; quo detracto extremitates duae deorſum flexae et approximatae ſecedunt, vna acuminata et integra, altera obtuſa in duo labia dehiſcente.

Ita partes fructificationis *Ceratocarpi* BVXBAVMII in ſolo natali arenoſo-argilloſo camporum apricorum *tanaicenſium*, *wolgenſium* et *terekienſium* a 54 ad 43. gradum latitudinis frequeter creſcentem et laete per aeſtatem florentem vidimus, multoties examinauimus, ſedulo deſcripſimus et pingere curavimus.

Patet nunc ſole meridiano clarius ex hoc genuino *Ceratocarpi* charactere, ſumma affinitas *Kraſcheninnikouiae*, propter partes femineas ſimillimas. Floribus autem maſculis genera haec duo diuerſiſſima ſunt; his enim accedit *Kraſcheninnikouia* ad *Atriplicem* et propter numeri partium conuenientiam magis adhuc ad *Vrticam*, a quibus attamen propter florum feminecorum ſtructuram neceſſario ſeparanda.

Planta,

Planta, quae nouum nunc ſat ample determinatum genus conſtituit, nobis audit triuialiter:

Kraſcheninnikouia Ceratoides; cuius ſynonyma ſunt ſequentia:

Ceratoides orientalis, fruticoſa, Elaeagni folio TOVRNEFORTII *coroll. p.* 52.

Vrtica foliis lanceolatis, femininis hirſutis ROYENI *Lugdb.* 210.

Axyris foliis lanceolatis tomentoſis, floribus femineis lanatis LINNEI *Spec. Plant. edit.* 2. *p.* 1389.

Axyris fruticoſa, floribus femineis lanatis GMELINI *Flor. Sibir. Tom. III. p.* 17.

Blitum arboreſcens incanum, Lauerdulae folio STELLERI *Flor. Ircut.* 767. ſecundum GMELINVM *l. c.*

Camphorata, ſpecies alia hirſuta et lanuginoſa Id. l. c. 1150. ſecundum GMEL. *l. c.*

Reſtat, vt tradatur conciſa *Kraſcheninnikouiae Ceratoidis*

DESCRIPTIO.

RADIX lignoſa, ramoſa, pollice craſſior, pede profundius deſcendens, perennis, pro plantae ratione ſat magna.

CAVLES plures, diffuſi, ſubprocumbentes, ſuffruticoſi, teretes, penna anſerina tenuiores, vix tripedales; ſeniores corticae ſordide cinereo et fiſſo obducti, ramoſi, ramis virgatis; iuniores ſimplices, inferne glabri, pallide nitentes, a foliorum lapſu cicatriſati, ſuperne ſubuilloſo - incani.

FOLIA alternatim conferta, lanceolata, vtrinque attenuata, floralia fere linearia, integra, margine ſubreflexa, nonnunquam leuiter vndulata, ſupra obſolete trineruia, infra a coſta prominente parum carinata, vtrinque, ſed inferne magis, incana, ſubpetiolata; *petiolo* baſi dilatato faſciculum foliorum axillarem ſaepius amplexante.

FLORES axillares, ſeſſiles, in ſpica interrupta terminali, vel ſimplici, vel ſpiculis breuibus lateralibus ſubracemoſa diſpoſiti, monoici.

MASCVLI flores in caulis et ſpicularum extremo confertiſſimi, minimi, fere granulati, quorum *perianthium* tetraphyllum, perſiſtens, emarcidum, foliolis minimis, concauis, obtuſis, in globulum conniuentibus, externe interneque tomento breviſſimo

viſſimo ſubſtellato ſeu radiato obſitis; *filamenta* quatuor, capillaria, breuiſſima, vix vltra calycem prominentia, thalamo foliolis calycinis oppoſita inſerta; *antherae* ſubrotundae, didymae, luteſcentes, polline globuloſo faetae; *piſtilli* rudimentum nullum.

FEMINEI flores infra maſculos, rariores et maiuſculi; horum *perianthium* monophyllum, vrceolato-compreſſum, ſubbifidum; laciniis cornuto-erectis, parallelis, tubuloſo-concauis; fauce inter laciniarum ſinum anguſtiſſima, perforata; ſuperficie interna laeui, externa tota tomento breuiſſimo, ſtellato obſita et praeterea ad fundum villis capillaribus, quadrifarie ad angulos poſitis et perianthio longitudine aequalibus ornata; ſutura vtrinque ad plana perianthii conſpicua, ſulcata, duo quaſi foliola calycis mutuo coniungente, ſed adeo firmiter, vt neutiquam absque dilaceratione ſecedant, hinc calyx omnino monophyllus; germen ouatum, villoſum, ſuperum, et totum a perianthio tectum, ſed vndiquaque liberum et non niſi fundo ſeu potius thalamo adhaerens; *ſtylus* vnicus, rubens, per faucem perianthii tranſeuns; *ſtigmata* duo, capillaria, reflexa, rubentia, ipſo apice lutea et pubeſcentia; *pericarpii* vicibus fungitur calyx quadruplo maior, ſubinflatus, fauce vix peruia et villis fundi valde elongatis; hinc ſpicae in planta fructificante villoſiſſimae, ſericeo-nitentes; *ſemen* ouato-compreſſum, extremitate tenuiore thalamo adhaerens, ceterum in calyce

 omnino

omnino liberum nec vllibi adnatum, *arillo* laxiuſculo et villoſo veſtitum, quo detracto extremitates duae, quae deorſum flexae et approximatae erant, ſecedunt, vna acuminata et integra, altera obtuſa in duo labia dehiſcente. [Structura ſeminis accedit ad *Salſolam*; tunica enim communis, quae ſemen ſpiraliter contortum continet et inuoluit, rectius pro arillo, ac pro capſula habetur in *Salſola*, qua detracta tunica, amplius nulla et extremitas altera obtuſiuſcula pariter in duo labia, ceu in duos cotyledones, dehiſcit; et dantur praeterea *Salſolae* ſpecies, quarum ſemen ſemel tantummodo inflexum et *Kraſcheninnikouiae* et *Ceratocarpi* ſemini ſimillimum eſt].

ODOR florum et foliorum plane nullus.

SAPOR foliorum ſubauſterus, herbaceus; radicis ligneus, iners.

FLORET per Auguſtum ad medium vsque Septembris; per Septembrem et Octobrem fructificans; ſemina vento calycem villoſiſſimum apprehendente diſperguntur.

HABITAT in ſolo arenoſo-argilloſo, loca elata aprica amans; ad *Tanain* ante oſtia fluuii *Buſulac* et ad *Wolgam* ante oſtia riuuli *Meſchotnae* circa vrbem *Zarizyn* a nobis; in *Sibiria* ad *Ieniſeam* et *Baicalem* lacum a GMELINO et STELLERO; in *oriente* a TOVRNEFORTIO lecta.

Suffi-

Sufficiant haec de *Kraſcheninnikouia Ceratoide*, quibus ea, quae in *Florae Sibiricae* Tom. III. pag. 17. ſeqq. de planta noſtra praedicata ſunt, conferre non iniucundum erit.

Addamus coronidis loco *iconum* explicationem:

Fig. 1. Flos maſculus *Kraſcheninnikouiae*. Tab. XVII.

Fig. 2. Flos femineus *Kraſcheninnikouiae*.

Fig. 3. Piſtillum eiusdem e calyce exemtum.

Fig. 4. Calyx *Kraſcheninnikouiae* fructum maturum continens, villis ad fundum quadrifarie poſitis et elongatis.

Fig. 5. Semen maturum *Kraſcheninnikouiae*, e calyce exemtum, arillo villoſo veſtitum.

Fig. 6 Semen idem nudum, arillo detracto in duas extremitates et ad harum alteram in duo labia receſſum.

Fig. 7. Flos maſculus *Ceratocarpi* a parte antica, vt pateat, quod limbus ſit ſemilunatus et filamentum vltra tubum promineat.

Fig. 8. Flos idem a parte poſtica, vt pateat, quod limbus ibidem acuminatus ſit et anthera promineat.

Fig. 9. Flos femineus *Ceratocarpi*.

Fig.

Fig. 10. Calyx *Ceratocarpi* ſemen maturum continens.

Fig. 11. Semen *Ceratocarpi* e calyce exemtum ; arillo veſtitum.

Fig. 12. Semen idem nudum , arillo detracto in duas extremitates et ad harum alteram in duo labia ſeceſſum.

Fig. 13. *Kraſcheninnikouia Ceratoides* florens et fructificans.

Figurae omnes naturalem partium, quas referunt , magnitudinem ſiſtunt , exceptis 7 et 8. quae aliquoties microſcopio auctae ſunt , quia flos maſculus *Ceratocarpi* adeo exiguus eſt , vt vix nudis oculis eum perſpicere , multo minus diſtincte pingere liceat.

KOEL-

KOELREVTERIA PANICVLATA
NOVVM PLANTARVM GENVS.

Auctore

E. LAXMANN.

Etiamſi iam per vicennium et quod excurrit in hybernaculis horti academici haec viget arbuſcula, attamen ad amuſſim illam determinare hucvsque nemini licuit deficiens quotannis fructificatio. Prior pars proxime praeterlapſae aeſtatis, menſes dico Maium Iuniumque, qui adeo ſudi erant adeoque florae fauebant, vt Arachis hypogaea aliique Zonae torridae proprii ſtirpes in feneſtris muſei mei non tantum laete floruerint ſed et fructus maturauerint, hanc quoque arbuſculam, cuius lectum genialem, per plures annos fruſtra exoptare noſtri botanici, in area horti, floribus ornarunt Contigit itaque mihi, nec ſine delectatione perquam eximia, rariſſimarum harum nuptiarum ſpectatorem eſſe, qui viſis floribus, arbuſculam hanc proprium genus conſtituentem, ad viuum delineare curaui, et vt Viro, et de re herbaria et de horto noſtro botanico, optime merito Celeberrimo *Koelreutero*, qualecunque pignus exiſtimationis meae, regnique vegetabilis cultorum, erga ipſum darem, KOEL-

REVTERIAM nominaui, cuius characterem genericum et deſcriptionem ſequentibus trado.

CALYCIS *perianthium* pentaphyllum, inferum, foliolis ouatis, obtuſis, concauis, membranaceis, inaequalibus, verſus latus ſuperius adſcendentibus, verſus inferius vero apperturam relinquentibus.

COROLLA tetrapetala, petalis flauis, aequalibus, verſus ſuperius latus adſcendentibus; *vnguibus* linearibus, teretiuſculis, piloſis, erectis, longitudine foliorum perianthii illorumque baſi affixis; *laminis* ouato lanceolatis, planis, apicibus reuolutis, ab vnguibus ad angulum rectum diſtantibus.

NECTARIVM ſquama vndulata, erecta, purpureo cinnabarina, ad baſin ſingulae laminae vnica, faucem coronatam quaſi ſiſtens antherasque cingens.

STAMINVM *filamenta* octo, ſubulata, erecta, vnguibus petalorum paulo breuiora, corpuſculo cylindrico, quod eſt receptaculum genitalium, affixa: *Antherae* oblongae, obtuſae biualues.

PISTILLI *germen* oblongum, triquetrum, *Stylus* ſimplex, adſcendens, longitudine laminarum, *Stigma* trifidum, paruum, laciniis patentibus.

PERICARPII *capſula* trilocularis, oblonga, corpuſculo cylindrico receptaculi analogo affixa.

SEMINA nulla ob continuas pluuias per totum Iulium maturauere.

Con-

Conſiſtit itaque character *Koelreuterae* noſtrae cuius mihi nomen triuiale, ob flores paniculatos, *paniculata* audit, in *calyce* penthaphyllo, infero, foliolis inaequalibus; in *corolla* tetrapetala petalis aequalibus, verſus latus ſuperius adſcendentibus; in *nectariis* petaloideis ſquama ſcilicet vndulata ad baſin ſingulae laminae vnica; inque demum corpuſculo receptaculi analogo, genitalia tantum ſuſtinente.

Examinatis ſic quae ad characterem genericum pertinent, ſequatur deſcriptio reliquarum partium.

RADIX ramoſa, ob anguſtiam forte vaſis varie tortuoſa et in fibras plurimas capillares diuiſa.

TRVNCVS arboreus, erectus, teres, tunicatus, laeuis, ramoſus, altitudinem humanam ſuperans.

RAMI ſparſi, patentes, tortuoſi, aetate provectiores trunciformes, iuniores glandulis punctatis adſperſi, foliati.

GEMMAE ex axillis foliorum valde reſinoſae, ſquamis imbricatis coniformes.

PETIOLI ſparſi, patentiſſimi, baſi clauati, verſus apicem canaliculati, longiſſimi.

FOLIA pinnata, pinnis plerumque ſexiugis cum impari, ouatis, laciniatis, ſerratis, acutis, glabris, planis.

PEDVNCVLI terminales, ſparſi, patentes, plurimis pedicellis ramoſi.

 FLO-

FLORES paniculati in ſingulo pedicello tres vel plures.

De loco natali nihil certi conſtat. Hoſpitatur in tepidario.

Floruit circa initium Iulii.

T. XVIII.

Explicatio Figurarum.

Fig. 1. Icon KOELREVTERAE *paniculatae* florentis magnitudine naturali.

Reliquae figurae per Microſcopium delineatae ſunt.

Fig. 2. flos.

Fig. 3. calyx.

Fig. 4. piſtillum.

Fig. 5. ſtamen.

Fig. 6. petalum cum nectario.

Fig. 7. Receptaculum cum ſtaminibus, piſtillo et vno petalo.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

EXPERIMENTA
CIRCA LONGITVDINEM PENDVLI SIMPLICIS MINVTA SECVNDA KOLAE ET ARCHANGELOPOLI OSCILLANTIS.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKI.

In diſſertatione, in qua expoſui obſeruationem Tranſitus Veneris per diſcum Solis Kolae inſtitutam, mentionem inieci experimentorum, circa Longitudinem penduli ibidem a me habitorum. Rationem igitur eorum, pro vt promiſi, Academiae Scientiarum redditurus, ordiar a tentaminibus authomato, pendulo inuariabili inſtructo, inſtitutis.

Authomaton hoc idem ipſum fuit, quo vſus eſt *Griſchouius* ad definiendam Longitudinem penduli ſimplicis Petropoli, Oeſeliae aliisque in locis, et cuius deſcriptio legi poteſt in Nov. Comm. Tom. VII.

Quo ſecurius iudicium de experimentis his lectores ferre queant, maioremque fiduciam conſequentiae inde deductae mereantur, longior, aliquantum ero in referendis circumſtantiis, quae illa concomitabantur; in primis igitur ſiſto obſeruationes, ex quibus perſpiciatur motus horologii aſtronomici

mici a *le Paute* elaborati, cum quo motum authomati pendulo inuariabili inſtructi comparaui.

	Merid. verus ex altit. ☉lis correſpondentibus	*Retardatio Horologii*
Die 30 April / 11 Maii	11ʰ. 59′. 1″, 4	
7/18 Maii	11. 58. 15, 8	.... 6″, 7
14/25 Maii	11. 57. 57, 0	.... 6, 5
15/26 Maii	11. 5 /. 55, 4	.... 6, 4
19/30 Maii	11. 57. 57, 8	.... 6, 4
20/31 Maii	11. 57. 56, 5	... 9, 8
21 Maii / 1 Iunii	11. 57. 54, 3	.... 11, 1
22 Maii / 2 Iunii	11. 57. 52, 5	.... 11, 0
23 Maii / 3 Iunii	11. 57. 21, 0	.... 11, 0
25 Maii / 5 Iunii	11. 57. 45, 3	.... 12, 8.

Conferenti obſeruationes meteorogicas Kolae hoc menſe habitas, in Comm. Tom. XIV. relatas, patebit temperiem aeris fuiſſe in cauſa, quod horologium aſtronomicum a die 30. April ad 19 Maii diuerſo motu ac ſequentibus inceſſerit.

Primum tentamen comparationum penduli aſtronomici cum authomato pendulo inuariabili gaudente inſtitui die 4/15. Maii Quoniam vero in hoc experimento non contentus ſui ſtatu authomati, ſuperſedeo referendis hoc die inſtitutis comparationibus; id ſolum addo, numerum oſcillationum ſpatio diei ſolaris medii in temperie 2° ſupra 0 therm. Reaum.

Reaum. a pendulo inuariabili confectarum ex iis ſequi 98995 quam proxime. Die ſequenti nullum non moui lapidem, vt authomaton hoc in talem ſtatum, qui mihi optimus videretur, redigerem, et poſtquam id multiplicibus tentaminibus fuerim aſſecutus, die $\frac{6}{17}$. Maii ſequentes inſtitui obſeruationes.

EXPERIMENTVM I.

	Horologium Aſtronom.	Thermom. Reaum.	Pendul. Inuariab.	Num. oſc. Sol. med.	ſpat. diei confectar.
I.	$10^h.57'.\ 7''$m.		73 oſc.	I. V.	98994,0
II.	54. 55		128	II. VI.	98994,0
III.	56. 24	$4\frac{1}{2}$ ſupra 0	230	III. XII.	98993,0
IV.	10. 59. 43		450	IV. XIV.	98992,8
V.	11. 31. 29	$4\frac{3}{4}$	2642	V. XIII.	98992,8
VI.	33. 5		2752	VI. XII.	98992,9
VII.	0. 2. 28. v.		4772	VII. XI.	98993,2
VIII.	3. 9	5	4819	VIII. XIII.	98993,0
IX.	0. 4. 52		4937	IX. X.	98993,3
X.	4. 43. 49	6	24115	X. I.	98992,9
XI.	4. 45. 32		24223	XI. XIV.	98963,0
XII.	7. 46. 26		36670	XII. X.	98993,2
XIII.	— 40. 52	$4\frac{3}{4}$	36906	XIII. II.	98992,8
XIV.	8. 10. 33		38328	XIV. I.	98992,9
			Medium		98993,1

In comparatione harum et ſequentium obſervationum id ſolum pro norma habuï, ne combinandae obſeruationes minori quam vnius horae interuallo a ſe inuicem diſtarent: caeterum promiſcue in computum ductae ſunt.

Abbas *de la Caille* Pariſi's inſtitutis experimentis reperit idem ipſum authomaton in temperie aeris $6\frac{1}{2}°$ ſupra o therm. Reaum. ſpatio diei Solaris medii conficere 98908 oſcill. at cum per experimenta *Griſchouii* eodem authomato Petropoli inſtituta conſtet variationem vnius gradus thermometri Reaumuriani producere variationem vnius quam proxime oſcillationis in motu penduli inuariabilis, numerus oſcillationum ſupra inuentus minuendus erit vna oſcillatione, vt experimenta noſtra ad eandem temperiem, in qua Pariſiis inſtituta ſunt, reducantur. Quare numerus oſcillationum ſpatio diei Solaris medii Kolae confectorum ſtatui poterit rotunde 98692.

EXPERIMENTVM II.

Die $\frac{13}{24}$. Maii retardatione horologii aſtronomici exiſtente $6\frac{1}{2}''$ concurſus illius cum pendulo inuariabili ſequentes ſunt obſeruati.

Horol.

	Horolog. Aſtronom.	Thermom. Reaum.	Pendulum Inuariab.	Num. oſc. ſpat. diei Sol. med. confectar.
I.	9h. 32'. 9" m.		295 oſc.	I. XI. 98995,8
II.	— 33. 52	5½ ſupra o	413	II. X. 98995,9
III.	9. 35. 35		531	III. V. 98997,0
IV.	10. 59. 13	6.	6281	IV. VI. 98995,7
V.	11. 1. 16		6422	V. II. 98996,6
VI.	0. 5. 36 v.		10845	VI. II. 98995,7
VII.	— 7. 5	7½.	10947	VII. V. 98994,8
VIII.	0. 8. 27		11041	VIII. X. 98995,9
IX.	8. 29. 21		45479	IX. III. 98995,9
X.	— 30. 57	6.	45589	X. IV. 98996,0
XI.	8. 32 33		45699	XI. VI. 98995,9

Hinc ſumendo medium prodit 98995, 9 ſiue rotunde 98996. Numerus hic nulla correctione indigere videtur, quippe qui in experimento hoc eadem quam proxime fuit temperies, quae et Pariſiis.

EXPERIMENTVM III.

Die $\frac{10}{21}$ Maii retardatione horologii a die Solari medio poſita 9", 8 ſiue 10" concurſus illius cum pendulo inuariabili obſeruati ſunt, vt ſequitur.

 Horolog.

	Horolog. Aſtronom.	Therm Reaum.	Pendul. Inuariab.	Num. oſcil. ſpat. diei Sol. med. confectar.
I.	$0^h. 9'. 16''$		78080	I. XVII. 98991,9
II.	— 10. 18	$10\frac{3}{4}$ ſupr. 0	78151	II. XVI. 98992,0
III.	— 12. 8		78277	III. XVII. 98992,3
IV.	1. 44. 6		84600	IV. X. 98992,2
V.	— 45. 8	13.	84671	V. XI. 98993,0
VI.	1. 46. 30		84765	VI. XII. 98992,4
VII.	2. 31. 31		87860	VII. XII. 98992,5
VIII.	— 33. 14	12.	87978	VIII. XIII. 98992,0
IX.	2. 34. 29		88064	IX. XI. 98992,0
X.	3. 28. 59	$13\frac{1}{3}$.	91811	X. I. 98992,0
XI.	3. 30. 28		91913	XI. XV. 98991,3
XII.	4. 15. 29		95008	XII. X. 98992,4
XIII.	— 16. 38	14.	95087	XIII. VII. 98991,8
XIV.	4. 18 0		95181	XIV. I. 98991,7
XV.	6. 5. 38		102581	XV. IV. 98991,7
XVI.	— 9. 24	$13\frac{1}{5}$.	102840	XVI. VI. 98992,0
XVII.	6. 20. 22		103594	XVII. VI. 98992,0

Medium 98992,1

Vt reducatur ad temperiem Pariſinam + 6,0

Numerus oſcillationum quaeſitus 98998,1.

EXPERIMENTVM IV.

Retardatione horologii Aſtronomici diurna exiſtente 11'' pro vt patet ex ſupra relatis obſeruationibus, die $\frac{20}{21}$. Maii ſequentes comparationes inſtitutae ſunt.

Horolog.

	Horolog. Aſtronom.	Therm. Reaum.	Pendulum Inuarib.	Num. oſc. ſpat. diei Sol. med. confectar.
I.	$9^h.51'.25''$. m		103 oſc.	I. XV. 98990,6
II.	54. 9.	14. ſupr. o	291	II. XI. 98989,5
III.	9. 56. 6.		425	III. X. 98989,7
IV.	10. 32. 33.	$14\frac{1}{4}$.	2931	IV. VIII. 98991,2
V.	— 37. 14.		3253	V. X. 98989,7
VI.	11. 3. 17.	$15\frac{3}{4}$.	5044	VI. I. 98990,7
VII.	— 5. 41.		5209	VII. XIV. 98991,0
VIII.	11. 34. 49.	$15\frac{1}{2}$.	7212	VIII. I. 98991,0
IX.	— 39. 3.		7503	IX. V. 98991,1
X.	0. 15. 37. v.	16.	10017	X. XV. 98991,3
XI.	— 18. 35.		10221	XI. IV. 98991,8
XII.	1. 42. 54.	17.	16018	XII. X. 98991,8
XIII.	— 48. 50.		16426	XIII. II. 98990,5
XIV.	3. 7. 47.	$16\frac{1}{2}$.	21854	XIV. II. 98990,6
XV.	— 10. 32.		22043	XV. VIII. 98990,5

Sumto hinc medio prodit $98990\frac{1}{3}$ et pro ratione temperiei aucto $8\frac{1}{2}$ oſcil. fit numerus oſcillationum quaeſitus 98999.

EXPERIMENTVM V.

Die $\frac{22\ Maii}{2\ Iunii}$ poſita eadem retardatione horologii diurna poſt meridiem ſequentes comparationes inſtitui

	Horolog. Aſtronom.	Therm. Reaum.	Pendul. Inuariab.	Num. oſcil. ſpat diei Sol. med. confectar.
I.	2h. 22'. 30''		155 oſc.	I. XI. 98990,3
II.	— 24. 27	$12\frac{1}{4}$ ſupr. o	289	II. XIII 98990,5
III.	2. 25. 42		375	III. XII. 98990,4
IV.	4. 49. 40		10273	IV. XI. 98990,5
V.	— 51. 50	$12\frac{1}{2}$	10422	V. XIV. 98990,2
VI.	4. 53. 33		10540	VI. XII. 98990,5
VII.	5. 26. 7	$14\frac{1}{2}$	12779	VII. I. 98990,2
VIII.	27. 43		12889	VIII. II. 98990,6
IX.	5. 54. 41		14743	IX. III. 98990,1
X.	56. 3	$14\frac{1}{2}$	14837	X. XIII. 98990,0
XI.	5. 57. 39		14947	XI. IV. 98990,4
XII.	7. 16. 36		20375	XII. VII. 98990,9
XIII.	— 18. 26	$13\frac{1}{2}$	20501	XIII. VIII. 98990,4
XIV.	7. 19. 48		20595	XIV. IX. 98991,2
			Medium	98990,5

Id quod pro ratione temperiei $7\frac{1}{2}$ oſc. auctum dat numerum oſcillationum queſitum 98998.

Ex obſeruationibus itaque die 6 Maii inſtitutiis numerus oſcillationum ſpatio diei Solaris medii in temperie aëris $6\frac{1}{2}^{\circ}$ ſupra o Therm. Reaum. a pendulo inuariabili Kolae confectarum eſt - - - - 98992.

Die 13. Maii - - - - - - - - 98996,
— 19. —— - - - - - - - 98998,
— 20. —— - - - - - - - - - 68999,
— 22. —— - - - - - - - - - 98998.

Omnium

Omnium medium dat $98996\frac{1}{3}$. Idem vero pendulum in eadem temperie aëris eodemque temporis ſpatio Pariſiis conficit 98908. Quare vis grauitatis Pariſiis ad vim grauitatis Kolae erit = 100000 : 100179, et cum Longitudo penduli ſimplicis Pariſiis per Experimenta abbatis *de la Caille* ſit 440, 55 lin. Longitudo penduli oſcillationibus ſuis minuta ſecunda Kolae ſub Latitudine 68° $52\frac{1}{2}$ indicantis erit $= \frac{440,55 \times (98996\frac{1}{3})^2}{(98908)^2} = 441,34$ lin.

Cl. *Malletus* in Ponoi ſub latitudine 67°, 4′ Longitudinem penduli ſimplicis minuta ſecunda oſcillantis reperit 441, 22 lin. poſita Longitudine penduli Pariſina 441, 57, qualis a de *Mairan* inuenta eſt; quodſi nos eandem in calculo adhibere velimus, prodibit Longitudo penduli minuta ſecunda Kolae oſcillantis 441, 36 lin.

In eandem rem alio modo beneficio ſc. penduli ſimplicis inquiſiturus, aliud horologium ab eodem artifice elaboratum data opera ita adaptabam, vt a tempore medio retardaret $4\frac{2}{3}$′ circiter. Apparatus ad haec experimenta adhibitus idem ipſe fuit, quali Selenginski vſus ſum, et qui deſcriptus a *Griſchouio* legitur in Tom. VII. Nov. Comm. ſc. virga ferrea et ponduſculum biconicum ab abbate *de la Caille* ad *Griſchouium* transmiſſa, filum aloes, forceps cui filum ponduſculo onuſtum inſeritur, et machina ad ſuſtinendam virgam ferream a *Griſchouio*

exco-

excogitata, qua virga prehenſa ope cochlearum ſurſum et deorſum, prorſum et antrorſum, dextrorſum et ſiniſtrorſum mouetur, ita vt mediante hoc triplici motu commodiſſime virga pendulo applicari, et num longitudo fili aequalis ſit longitudini illius microſcopio examinari poſſit.

EXPERIMENTVM I.

Die $\frac{16}{17}$. Maii retardatione diurna horologii Aſtronomici a die Solari medio exiſtente $4'. 39''$, barometro monſtrante 29 dig. 4 lin. menſ. Lond. in temperie aeris thermometri Reaumuriani 3° ſupra 0, comparando oſcillationes penduli ſimplicis cum motu horologii Aſtronomici primus pendulorum concurſus ad eandem partem obſeruatus eſt horologio monſtante $5^h. 27'. 0''$, dein pendulum ſimplex prae horologio Aſtronomico lucrari videbatur concurrendo.

	ad eandem partem		ad diuerſas
0. oſc.	$5^h. 17'. 0''$.	1. oſc.	$5^h. 20'. 17''$.
2.	5. 23. 55.	3.	5. 27. 18.
4.	5. 30. 45.	5.	5. 33. 50.
6.	5. 37. 27.	7.	5. 40. 40.
8.	5. 43. 51.	—	— — —
10.	5. 50. 48.	11.	5. 53. 59.
12.	5. 57. 27.	13.	6. 0. 34.
14.	6. 3. 52.		

In

In difficultate concurſus obſeruandi origo ſita eſt, quod concurſibus aeque a ſe inuicem diſtantibus raro reſpondeant aequalia temporis interualla. Diſparitatem hanc cum cernerem in reliquis quoque experimentis, et in certus haererem, quibusnam concurſibus maior fides habenda ſit, cum omnes pari cura obſeruati eſſe viderentur, in computando interuallo temporis, quo pendulum ſimplex lucretur vnam oſcillationem ad ſequentem methodum confugi.

Sit momentum horologii, quo primus pendulorum concurſus obſeruatus eſt $= t$, et interuallum temporis, quo pendulum ſimplex prae horologio Aſtronomico lucratur vnam oſcillationem $= x$, horologio monſtrante $t + x$ pendula concurrent, et ſimplex prae pendulo horologii lucrabitur vnam oſcillationem. Poſt modum horologio indicante

$t + 2x$	pendulum ſimplex lucrabitur	2. oſcill.
$t + 3x$	- - - - - -	3. oſcill.
$t + 4x$	- - - - - -	4. oſcill.

et ita porro vsque dum pendulum ſimplex ad quietem fuerit redactum aut experimentum fuerit continuatum. Ponamus illud finitum fuiſſe poſtquam pendulum ſimplex lucratum fuerit n oſcillationes et obſeruatos eſſe m concurſus, ſumma omnium momentorum, quibus concurſus euenire debebant, erit $m\,t + (1 + 2 + 3 \ldots + n)\,x$, et cum ſumma momentorum, quibus concurſus actu ſunt obſeruati,

detur ex ipſo experimento, quae ſit $= s$, habebitur $mt + (1+2+3 \ldots + n)\,x = s$. Hinc $x = \frac{s - mt}{1+2+3 \ldots + n}$ vel ſi continuo omnes concurſus fuerint obſeruati erit $m = n + 1$, et $x = \frac{s - (n+1)\,t}{\frac{1}{2}\,n\,(n+1)}$.

Facta applicatione ad experimentum ſit $s = 79^h.\ 21'.\ 43''$, $m = 14$, $mt = 73^h.\ 58'.\ 0''$ et diuiſor, quia nonus concurſus deficit, hoc modo exprimi poterit $\frac{1}{2}\,n\,(n+1) - 9$, ac erit ille $= 96$; vnde interuallum temporis, quo pendulum ſimplex prae horologio Aſtronomico lucratur vnam oſcillationem, prodit $= 3'.\ 22''$, 3, et numerus oſcillationum ſpatio diei Solaris medii in temperie aeris 3° ſupra 0 a pendulo ſimplici Kolae confectarum 86546, 7.

Per multiplicia vero *Griſchouii* experimenta conſtat variationem trium graduum thermometri Reaumuriani producere variationem vnius quam proxime oſcillationis in motu penduli ſimplicis ſpatio diei Solaris medii; quare vt experimenta noſtra ad eandem temperiem, in qua Pariſiis eodem pendulo ab abbate *de la Caille* inſtituta ſunt nempe 12° ſupra 0, reducantur, a numero inuento ſubtrahi debent 3 oſcillationes, et prodit numerus oſcillationum quaeſitus 86543, 7.

EXPERIMENTVM II.

Die $\frac{6}{17}$. Iulii retardatione horologii Aſtronomici a die ſolari medio exiſtente 4'. 41'', 2 in temperie

rie aeris 13° ſupra 0, barometro monſtrante 29 dig. 7 lin. menſurae Lond. incitabam ad motum pendulum ſimplex; peractis aliquot oſcillationibus pendula concurrendo ad eandem partem concordare viſa ſunt horologio monſtrante $4^h. 46'. 20''$, ſequentes vero concurſus ſequentem in modum ſunt obſeruati.

	ad eandem partem		ad diuerſas
0. oſcil.	$4^h. 46'. 20''$.	1. oſc.	$4^h. 49'. 45''$.
2 —	4. 53. 22.	3.	4. 56. 36.
4 —	5. 0. 0.	5.	5. 3. 23.
6.	5. 6. 56.	7.	5. 10. 26.
8.	5. 13. 40.	9.	5. 16. 55.
10.	5. 20 20.	11.	5. 23. 27.
12.	5. 26. 56.	13.	5. 30. 21.
14.	5. 33. 36.	15.	5. 37. 0.
16.	5. 40. 16.	—	

Vnde fit $s = 88^h. 48'. 49''$, $(n + 1)\,t = 81^h. 7'. 40''$ et $\frac{1}{2}\,n\,(n + 1) = 136$; quare interuallum temporis, quo pendulum ſimplex prae horologio Aſtronomico lucrabatur vnam oſcillationem, eſt $3'. 23'', 4$, et nu-rus oſcillationum ſpatio diei Solaris medii a pendulo ſimplici confectarum erit $= 86542, 2$. Numerus hic nulla correctione indigere videtur, quippe qui temperies aeris in hoc experimento eadem fere fuit, in qua Pariſiis experimenta eodem pendulo ſunt capta.

EXPERIMENTVM III.

Die $\frac{10}{21}$. Iulii retardatione horologii Aſtronomici diurna exiſtente 4'. 43'', barometro monſtrante 29 dig. 9 lin. menſ. Lond. in temperie aeris 12° ſupra o ante meridiem incitato ad motum pendulo ſimplici primus pendulorum concurſus ad eandem partem euenire viſus eſt horologio monſtrante 10^h. 19'. 40'', dein pendulum ſimplex prae horologio Aſtronomico lucratum eſt concurrendo.

	ad eandem partem		ad diuerſas
0. oſc.	0^h. 19'. 40''.	1. oſc.	10^h. 23' 8''.
2.	10. 26. 34.	3.	10. 29. 52.
4.	10. 33. 12.	5.	10. 36. 34.
6.	10. 39. 58.	—	— — —
8.	10. 46. 22.	9.	10. 49. 26.
10.	10. 52. 48.	11.	10. 55. 42.
12.	10. 59. 26.	—	— — —

In hoc experimento concurſus ad eandem partem praecipue ſunt obſeruati, quare ſi illorum tantum in computo ratio habeatur, prodibit $x = 3'. 20\frac{1}{2}''$, et numerus oſcillationum ſpatio diei Solaris medii in temperie aeris 12° ſupra o a pendulo ſimplici confectarum prodibit 86546.

EXPERIMENTVM IV.

Die $\frac{14}{25}$. Iulii retardatione horologii diurna exiſtente 4'. 43$\frac{1}{2}$'', barometro monſtrante 29 dig. 5 lin. menſ.

menſ. Lond. in temperie aeris 17° ſupra o poſt meridiem pendula concurrebant ad eandem partem horologio monſtrante $3^h. 18'. 20''$. Dein reliqui concurſus ſequentem in modum fuere obſeruati.

	ad eandem partem		ad diuerſas
o. oſc.	$3^h. 18'. 20''$.	1. oſc.	$3^h. 21'. 32''$.
2.	3. 25. 5.	3.	3. 28. 21.
4.	3. 31. 35.	5.	3. 34. 57.
6.	3. 38. 30.	7.	3. 41. 36.
8.	3. 45. 20.	9.	3. 48. 35.
10.	3. 52. 2.	11.	3. 55. 18.
12.	3. 58. 43.	13.	3. 2. 0.
14.	4. 5. 28.	15.	4. 8. 57.
16.	4. 12. 12.	—	— — —

Hinc obtinebitur $s = 63^h. 48'. 21''$, $(n + 1)\,t = 56^h. 11'. 40''$ et $\frac{1}{2}\,n(n + 1) = 136$, quare $x = 3'. 21\frac{1}{2}''$ et numerus oſcillationum a pendulo ſimplici ſpatio diei Solaris medii confectarum = 86543, 8, qui pro ratione temperiei auctus 1, 7 oſcill. prodit $86545\frac{1}{2}$.

EXPERIMENTVM V.

Die $\frac{16}{27}$. Iulii retardatio horologii Aſtronomici a die Solari medio inuenta eſt $4', 41''$, barometro monſtrante 29 dig. 2 lin. menſ. Lond. in temperie aeris 8° ſupra o poſt meridiem incitabam ad motum pendulum ſimplex, ac ſequentes concurſus obſeruabam.

	ad eandem partem		ad diuerſas
0.	$4^h. 57'. 58''.$	1.	$5^h. 1'. 15''.$
2.	5. 4. 42.	3.	5. 7. 57.
4.	5. 11. 40.	5.	5. 14. 59.
6.	5. 18. 27.	7.	5. 21. 47.
8.	5. 25. 8.	9.	5. 28. 22.
10.	5. 31. 50.	—	— — —
12.	5. 38. 38.	13.	5. 42. 0.
14.	5. 45. 26.	15.	5. 48. 54.
16.	5. 52. 10.	17.	5. 55. 37.
18.	5. 58. 52.	—	— — —

Facta applicatione methodi ſupra memoratae fit $m = 18$, $s = 98^h. 25'. 52''.$ $mt = 89^h. 23'. 24''$, et quia vndecimus concurſus deficit $\frac{1}{2}n(n+1) - 11 = 160$; hinc $x = 3'. 23'', 4$ et numerus oſcillationum ſpatio diei Solaris medii in temperie aeris 8° ſupra 0 a pendulo ſimplici confectarum prodit $86541\frac{1}{3}$ vel demta $1\frac{1}{3}$ oſcill. pro ratione temperiei fit 86540.

Numerus itaque oſcillationum Kolae in temperie aeris 12 ſupra 0 ſpatio diei Solaris medii a pendulo ſimplici confectarum eſt per

Exper. I. - - - - - - - - - -	86543, 7
II. - - - - - - - - - -	86542, 2
III. - - - - - - - - - -	86546, 0
IV. - - - - - - - - - -	86545, 5
V. - - - - - - - - - -	86540, 0
Medium	86543, 5

Idem

Idem vero pendulum in eadem temperie aeris Pariſiis iuxta experimenta abbatis *de la Caille* ſpatio diei Solaris medii conficit 86454 oſc. et longitudo penduli ibidem eſt 440, 55 lin. Quare Longitudo penduli Kolae minuta ſecunda indicantis erit $\frac{440,55 \times (86543\frac{1}{4})^2}{(86454)^2} = 441,46$ lin. quae a prius inuenta differt $\frac{12}{155}$ lin. Cum vero experimenta pendulo ſimplici inſtituenda maioribus difficultatibus ſint obnoxia, quam quae pendulo inuariabili peraguntur, longitudinem penduli ſupra inuentam veritati magis eſſe conſentaneam exiſtimo.

Kola naui vectus Archangelopolin perueni die 15 Auguſti. Animus ibi fuit a *De l'Iſlio de la Croyere* Longitudinem penduli ſimplicis anno 1728 inuentam propriis experimentis comprobare; verum negotium hoc ea qua par eſt certitudine perficere non potui. Motum horologii aſtronomici cognoſcere cupiens, ſpatio duarum hebdomadum nullum praetermiſi diem, quin caperem ante meridiem altitudines Solis, verum poſt meridiem die 28 Aug. tantum correſpondentes, et ſequenti mane easdem capere licuit, ita vt ex iis meridiem verum et mediam noctem elicere, indeque motum horologii ſtabilire fuerit in poteſtate. En ipſas altitudinum obſeruationes.

Die

Die 28. Aug. / 8. Sept.

ante meridiem	altit. ☉lis	Poſt. merid.	Meridies
8h. 45'. 24''	24°. 20'	2h. 22'. 8''	11h. 34'. 16''
— 46. 21		— 21. 13	— — 17
— 50. 45	24. 40	— 17. 50½	— — 17¾
— 51. 40		— 16. 50	— — 15
— 55. 7½	25. 0	— 13. 28	— — 17¾
— 56. 4		— 12. 31	— — 17½
8. 59. 34½	25. 20	— 9. 0	— — 17¼
9. 0. 37.		2. 7. 58	11. 34. 17½

Meridies medius 11 34. 16,7
Correctio meridiei + 31,8

Meridies verus 11. 34. 48, 5.

Die 28. Aug. / 8. Sept. Poſt. merid.	Altit. ☉lis	Die 29. Aug. / 9. Sept. Ante merid.	Media nox	Correctio med. noctis	Mediam nox vera
2h. 22'. 8''	24°. 20'	8h. 50'. 14''	11h. 36'. 11''	— 1'. 47'', 2	11h. 34' 23'', 8
— 21. 13		51. 7	— — 10¼	— 1. 47, 7	— — 22, 5
— 17. 50½	24. 40	54. 38	— — 14¼	— 1. 50, 4	— — 23, 2
— 16. 50		55. 37	— — 13½	— 1. 50, 1	— — 22, 4
— 13. 28	25 0	8. 59. 7½	— — 17¾	— 1. 53, 7	— — 24, 0
— 12. 31		9. 0. 7	— — 19	— 1. 54, 5	— — 24, 5
— 9. 0	25. 20	— 3. 46	— — 22	— 1. 57, 4	— — 24, 6
2. 7. 58		9. 4. 48	11. 36. 23	— 1. 58, 4	11. 34. 24, 6

Media nox vera 11. 34. 23, 8.

Vnde colligitur retardatio horologii ſpatio dimidii diei ſolaris medii 14½'' et retardatio diurna 29''.

Tem-

Temperies aëris intra hos binos dies iuxta thermometrum Reaumurianum ante meridiem 9 graduum poſt meridiem vero ad 13 vsque gradus aſcendere eſt obſeruata, eadem ſcilicet quam proxime fuit quae et Kolae, dum idem horologium ſpatio diei ſolaris medii retardaret 10″. Et cum longitudo penduli minuta ſecunda Kolae indicantis par praecedentia experimenta ſit 441, 34 lin. habebitur longitudo penduli ſingula·minuta ſecunda Archangelopoli ſub latitudine 64°. 33′ oſcillantis $= \frac{441,34 \times (86371)^2}{(86390)^2}$ $= 441,15$ lin. pariſ.

De l'Islius ibidem diuerſam ab hac reperit penduli longitudinem nempe 440, 70 lin. pariſ. Penes lectores iudicium ſit, vtra determinatio veritati magis ſit cenſentanea. Comparatio vero longitudinum penduli Kolae 441, 35; in Ponoi 441, 22; in Pello 441, 17 et Petropoli 441, 02 inuentarum monſtrare videtur determinationem *De l'Islianam* huic eſſe poſtponendam.

DE PARALLAXI SOLIS

CONCLVSA EX TRANSITV VENERIS PER SOLEM A. 1769. IN INSVLA REGIS GEORGII OBSERVATO.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

I.

Dum ex obſeruationibus Tranſitus Veneris per Solem, quantitas parallaxeos Solaris inueſtigari debet, maxime e re eſt, vt eiusmodi obſeruationum inter ſe fiat comparatio, pro quibus effectus Parallaxis inſigni afficitur diuerſitate, ne alioquin ipſi errores in obſeruationibus commiſſi omnem effectum Parallaxis vel plane abſorbeant, vel ſaltem qua potiorem partem imminuant. Hinc igitur liquet ex obſeruationibus nouiſſimi Tranſitus A. 1769. in variis Europae regionibus inſtitutis, dum inter ſe comparantur, nihil certi de Parallaxi Solis ſtatui poſſe; contra vero harum obſeruationum comparationem cum iis quae in America inſtitutae fuerunt, eo certiores pro Parallaxi Solis praebere concluſiones, quo magis fuerit diuerſus effectus Parallaxeos pro obſeruationibus Americanis, ab eo qui pro Europeicis

ropeicis obtinuit. In Parte II[da] Tom. XIV. horum Commentariorum fuſe iam explicatum eſt, qualem praebeant Parallaxin obſeruationes ad Sinum Hudſonis et in fortalitio St. Ioſephi Californiae inſtitutae ſi cum Europeicis comparentur; quum igitur valores pro Parallaxi tum inuenti egregie inter ſe conſenſerint, iisdem omnino acquieſcere liceret, praeſertim quia certiſſime nobis habemus perſuaſum, quantitatem Parallaxis tum inuentam vltra partem quintam vnius minuti ſecundi a veritate discrepaturam non fore. Verum enim vero quum obſeruationes in inſula Regis Georgii ab Aſtronomis Anglis inſtitutae, ita ſint comparatae, vt pro iis effectus Parallaxeos non modo ſit inſignis, ſed etiam plane contrarius illi, quo obſeruationes in Europae factae erant affectae, facile perſpicitur iſtas obſeruationes ad parallaxin Solis determinandam cenſeri debere aptiſſimas, ideoque omnino operae pretium fuiſſe, vt inquireretur quaenam prodeat quantitas parallaxeos Solis, ſi harum obſeruationum inſtituatur comparatio cum iis, quae in variis Europae regionibus fuerunt factae. Certiſſimam enim nobis facere poſſumus ſpem, valorem Parallaxeos inde inuentum, vix vltra partem decimam vnius minuti ſecundi a iuſto aberraturum eſſe. Huiusmodi igitur disquiſitionem dum hac occaſione ſuſcipere in animum induxi, id tantum praemonere neceſſum duco, methodum a me hoc in negotio adhibitam, eandem eſſe, quam Illuſtr. *Eulerus* in ſupra memorata Part. II. Tom. XIV. Nouor. Comment. tradidit ad cuius praecepta, reli-

quae huius Tranſitus obſeruatiònes a me computatae fuerunt.

2. Antequam ipſum computum obſeruationum in Inſula Regis Georgii inſtitutarum adgrediamur, haud abs re eſſe iudicauimus, breuem heic adponere recenſionem harum obſeruationum, talem ſcilicet, qualis ab Illuſtr. Societate Scientiarum Londinenſi cum Illuſtr. Academia Scientiarum noſtra communicata fuit:

Obſeruationes contactuum Veneris cum Sole.

Nomen Obſeruat.	pro ingreſſu cont. extern.	cont. intern.	pro egreſſu cont. intern.	cont. extern. Temp. vero
Green	$21^h.25'.40''$	$21^h.43'.55\frac{1}{2}''$	$3^h.14'.3''$	$3^h.32'.14''$
Cook	25.45	$44.15\frac{1}{2}$	14.13	32.2
Solander	- - - -	$44.2\frac{1}{2}$	- - - -	32.13

Diſtantia minima centrorum Solis et Veneris $10'.25'',4$. Latitudo ſtationis vbi obſeruatio peracta $17°.28'.55''$ Auſtr. Longitudo huius loci Occident. a Grenouico $149°.20'.0''$, ſeu in tempore $9^h.57'.44''$ adeoque a Lutetia Pariſiorum $10^h.7'.0''$.

Circa has obſeruationes annotaſſe iuuabit, momenta contactuum a Cel. *Green* aſſignata a nobis in vſum vocata fuiſſe, obſeruatione tantum contactus interni pro ingreſſu excepta, vbi quum momenta huius contactus a binis obſeruatoribus Dnis *Green* et *Cook* aſſignata 20'' inter ſe diſcrepent, proxime nos ad veritatem acceſſuros exiſtimauimus, ſi momen-

mentum a Dno Doct. *Solander* pro hoc contactu aſſignatum ſeligeremus, ſiquidem medium quaſi teneat inter bina reliqua. Poſtmodum autem occaſio dabitur inquirendi, qualem ipſa Parallaxis patiatur mutationem, ex diſcrepantia horum momentorum.

Calculus obſeruationum in Inſula Regis Georgii inſtitutarum.

3. Quum eleuatio Poli pro loco vbi obſeruatio peracta, inuenta ſit $17^\circ. 28'. 55''$ Auſtr., erit diſtantia Poli Auſtralis a Zenith huius loci apparente $72^\circ. 31'. 5''$, ideoque diſtantia inter Zenith verum et apparens $9'. 41''$, ita vt ſit diſtantia Zenith veri a Polo Auſtrali $= Pz = 72^\circ. 40'. 50''$ circiter. Porro quum longitudo huius loci a meridiano Pariſino aſſignata ſit $10^h. 7'. 0''$ ſtatuamus eam reuera eſſe $10^h. 7' - \theta''$.

I. Obſeruatio contactus externi circa ingreſſum.

Facta eſt d. 2. Iunii $21^h. 25'. 40''$ Temp. vero, vnde habetur angulus $\odot Pz = 38^\circ. 35'. 0''$. Quum vero tempus Pariſinum huius obſeruationis ſit d. 3. Iunii $7^h\ 32'. 40''$, erit $t = 2^h. 37'. 13'' = 2,620277$, ex quo ſequens inſtituatur calculus:

Tab. XIX. Fig. 1.

$L.\ t = 0,4183473$	
$L.(\alpha+\beta) = 2,3756636$	
$L\ \gamma = 1,5492486$	$\gamma t = 92,8$
$L.\ \odot V = 2,7940109$	$l = 613,4$
$L.\ \gamma t = 1,9675959$	♀ $V = 706,2$
$L.Tang.\sigma = 2,8489277$	L.♀ $V = 2,8489277$
$L.\ \odot V = 2,7940109$	$L.ſin.\sigma = 9,8752128$
$L.\ Tang.\sigma = 10,0549168$	$L\ s = 2,9737149$
$\sigma = 48^\circ\ 36'.\ 47''$	$s = 941,27.$

Pro tempore autem obſeruationis habetur angulus $A \odot P = 82^\circ.54'.30''$ et $\odot P = 112^\circ.25'.50''$ circiter, vnde triangulum $\odot P z$ ſic reſoluetur.

Fig. 2.

L. ſin. $Pz = 9,9798486$	L. tang $Pz = 10,5060715$
L. ſin. $\odot Pz = 9,7949425$	L. coſ. $\odot Pz = 9,8930412$
L. ſin. $zQ = 9,7747911$	L. tang. $PQ = 10,3991127$
	$PQ = 68^\circ.15'.10''$
	$\odot P = 112.\ 25.\ 50$
	$\odot Q = 44.\ 10.\ 40$
L. coſ. $zQ = 9,9049604$	L. tang. $zQ = 9,8698252$
L. coſ. $\odot Q = 9,8556287$	L. ſin. $\odot Q = 9,8431624$
L. coſ. $\odot z = 9,7605891$	L. tang. $P\odot z = 10,0266628$
$\odot z = 54^\circ.48'.50''$	$P\odot z = 46^\circ.45'.30''$
	$A\odot P = 82.\ 54.\ 30$
	$A\odot z = 36.\ 9.\ 0$
	$A\odot$♀ $= 131.23.10$ circ.
	$z\odot$♀ $= 167.32.10$

Quum

Quum igitur ſit $\odot ♀ v = z \odot ♀ + \frac{7}{5}\omega$ habebimus :

$L\,s = 2,9737149$	$L\,s = 2,9737149$
$L.\,coſ.\,z\odot ♀ = 9,9896421\,(-)$	$L.ſin.\,z\odot ♀ = 9,3341002$
$L.\odot R = 2,9633570$	$L.cot.\,\odot z = 9,8482257$
$\odot R = 919'' = 15'.19''$	$L.\,\omega = 2,1560408$
$z ♀ = 55^\circ.\ 4'.\ 10''$	$\omega = 143''; \frac{7}{5}\omega = 3'.20''$
	$\odot ♀ v = 167^\circ.35'.30''$

Pro calculo parallactico erit :

$L.\,ſin.\,z ♀ = 9,9137326$	$L.\,\frac{♀ v}{\pi} = 0,3135793$	Tab. XIX.
$L\,(\frac{a}{b} - 1) = 0,3998467$	$L.ſin.\odot ♀ v = 9,3321907$	Fig. 3.
$L.\,\frac{♀ v}{\pi} = 0,3135793$	$L.\,\frac{v\omega}{\pi} = 9,6457700$	
$L.coſ.\odot ♀ v = 9,9897350\,(-)$	$L.\,v\omega = 0,6457700$	
$L.\,\frac{♀\omega}{\pi} = 0,3033143$	$L.\,s = 2,9737149$	
$♀\omega = -2,0105.\pi$ hinc	$L.\,T.♀\odot v = 7,6720551$	
$\odot v = 941,27 + 2,0105.\pi$	$\odot ♀ v = 0^\circ.\ 16'.\ 9''$	
	$B\odot ♀ = 48.\ 36.\ 47$	
	$B\odot v = 48.\ 20.\ 38$	

Iam propter augmentum ex vX oriundum habebitur correctio $+ 0,6647.x + 0,0443\,\theta$, augmentum autem vY dabit correctionem $+0,7472.y + 0,0071.\theta$, vnde coniunctim prodibit correctio $+ 0,6647.x + 0,7472.y + 0,0514\,\theta$, valor igitur correctus diſtantiae centrorum Solis et Veneris erit : Fig. 4.

$$941,27+2,0105.\pi+0,6647.x+0,7472.y+0,0514.\theta$$

qui

quiſ quum aequatis eſſe debeat $9764 \cdot \mu''$, inde haec elicietur aequatio :

$$\mu = -34,73 + 2,0105.\pi + 0,6647.x + 0,7472.y + 0,0514.\theta.$$

II. *Contactus internus pro ingreſſu.*

Contigit $21^h. 44'. 2''\frac{1}{2}$ vnde deducitur ang. ⊙Pz $= 33°. 59'. 22''\frac{1}{2}$. Tempus autem Pariſinum huius obſeruationis eſt $7^h. 51'. 2''\frac{1}{2}$ ex quo habetur $t = 2^h. 18'. 50''\frac{1}{2} = 2,314027$.

L. $t = 0,3643686$	
L. $(\alpha + \beta) = 2,3756636$	
L. $\gamma = 1,5492486$	$\gamma t = 82,0$
L. ⊙ V $= 2,7400322$	$l = 613,4$
L. $\gamma t = 1,9136172$	♀ V $= 695,4$
L. ♀ V $= 2,8422347$	L. ♀ V $= 2,8422347$
L. ⊙ V $= 2,7400322$	L. ſin. $\sigma = 9,8946278$
L. tang. $\sigma = 10,1022025$	L. $s = 2,9476069$
$\sigma = 51°. 40'. 49''$	$s = 886,35.$

Tab. XIX. Fig. 1.

Pro tempore obſeruationis eſt A ⊙ P $= 82°. 54'. 50''$ et ⊙ P $= 112°. 25'. 50''$.

Fig. 2.

L. ſin. P z $= 9,9798486$	L tang. Pz $= 10,5060715$
L. ſin. ⊙ P z $= 9,7474445$	L. coſ ⊙Pz $= 9,9186275$
L. ſin. z Q $= 9,7272931$	L. tang. PQ $= 10,4246990$
	P Q $= 69°. 23'. 20''$
	⊙ P $= 112. 25. 50$
	⊙ Q $= 43. 2. 30$

L. coſ.

L. coſ. z Q $=$ 9,9272040	L. tang. z Q $=$ 9,8000903
L. coſ. $\odot$ Q $=$ 9,8638327	L. ſin. $\odot$ Q $=$ 9,8341218
L. coſ. $\odot z =$ 9,7910367	L tang. P $\odot z =$ 9,9659685
$\odot z = 51^\circ. 49'. 30''$	P $\odot z = 42^\circ. 45'. 30''$
	A $\odot$ P $=$ 82. 54. 50
	A $\odot z =$ 40. 9. 20
	A $\odot$ ♀ $=$ 128. 19. 10
	$z \odot$ ♀ $=$ 168. 28. 30

Ob $\odot$ ♀ $v = z \odot$ ♀ $+ \frac{7}{5}\omega$ fiet:

L. $s =$ 2,9476069	L. $s =$ 2,9476069
L. coſ. $z \odot$ ♀ $=$ 9,9911541 (-)	L. ſin. $z \odot$ ♀ $=$ 9,3005857
L. $\odot$ R $=$ 2,9387610	L cot. $\odot z =$ 9,8955419
$\odot$ R $= 868'' = 14''. 28''$	L. $\omega =$ 2,1437345
z ♀ $= 52^\circ. 4'. 0''$	$\omega = 139''$, $\frac{7}{5}\omega = 3'. 15''$
	$\odot$ ♀ $v = 168^\circ. 31'. 40''$

Sequitur calculus parallacticus

Tab. XIX. Fig. 3.

L. ſin. z ♀ $=$ 9,8969265	L. $\frac{♀ v}{\pi} =$ 0,2967732
L. $(\frac{a}{b} - 1) =$ 0,3998467	L. ſin. $\odot$ ♀ $v =$ 9,2986191
L. $\frac{♀ v}{\pi} =$ 0,2967732	L. $\frac{v \omega}{\pi} =$ 9,5953923
L. coſ. $\odot$ ♀ $v =$ 9,9912355 (-)	L. $v\,\omega =$ 0,5953923
L. $\frac{♀ \omega}{\pi} =$ 0,2880087	L. $s =$ 2,9476069
	L. T. ♀ $\odot v =$ 7,6477854
	♀ $\odot v = 0^\circ. 15'. 17''$
♀ $\omega = -$ 1,9409. π hinc	B $\odot$ ♀ $=$ 51. 40. 49
$\odot v =$ 886,35 $+$ 1,9409. π	B $\odot v =$ 51. 25. 32

 Hinc

Hinc ergo deducetur diſtantia centrorum correcta:

$$886,35 + 1,9409.\pi + 0,6235.x + 0,7818.y + 0,0490\theta$$
$$= 918 + \nu$$

ex quo ſequens emergit aequatio:

$$\nu = -31,65 + 1,9409.\pi + 0,6235.x + 0,7818.y + 0,0490.\theta.$$

III. Contactus internus pro egreſſu.

5. Obſeruatus eſt d. 3 Iun. $3^h. 14'. 3''$, vnde habetur ang. $\odot P z = 48^\circ. 30'. 45''$, atque ob tempus Pariſinum huius obſeruationis $= 13^h. 21'. 3''$ erit $t = 3^h. 11'. 10'' = 3, 186111$.

Tab. XIX. Fig. 1.

$$L.\, t = 0,5032609$$
$$L.\, (\alpha + \beta) = 2,3756636$$
$$L.\, \gamma = 1,5492486 \qquad \gamma t = 112, 8$$
$$L.\, \odot V. = 2,8789245 \qquad l = 613, 4$$
$$L.\, \gamma\, t = 2,0525095 \qquad ♀ V = 500, 6$$
$$L.\, ♀ V = 2,6994908 \qquad L.\, \odot V = 2,8789245$$
$$L.\, \odot V = 2,8789245 \qquad L.\, coſ.\, \sigma = 9,9211721$$
$$L.\, tang.\, \sigma = 9,8205663 \qquad L.\, s = 2,9577524$$
$$\sigma = 33^\circ. 29'. 13'' \qquad s = 907, 30$$

Pro momento obſeruationis eſt $A \odot P = 83^\circ. 0'. 10''$ et $P \odot = 112^\circ. 27'. 30''$.

Tab. XIX. Fig. 5.

$$L.\, ſin.\, P z = 9,9798486 \qquad L.\, tang.\, P z = 10,5060715$$
$$L.\, ſin.\, \odot P z = 9,8745399 \qquad L.\, coſ.\, \odot P z = 9,8211575$$
$$L.\, ſin.\, z Q = 9,8543885 \qquad L.\, tang.\, P Q = 10,3272290$$
$$P Q = 64^\circ. 47'\, 30''$$
$$\odot P = 112.\ 27.\ 30$$
$$\odot Q = 47.\ 40.\ 0$$

L. coſ.

L. coſ. z Q = 9,8444587	L. tang. z Q = 10,0099389
L. coſ. ⊙ Q = 9,8283006	L ſin. ⊙ Q = 9,8687851
L. coſ. ⊙ z = 9,6727593	L. tang. P ⊙ z = 10,1411538
⊙ z = 61°. 55'. 10''	P ⊙ z = 54°. 9'. 0''
	A ⊙ P = 83. 0. 10
	A ⊙ z = 137. 9, 10
	A ⊙ ♀ = 33. 29. 10
	z ⊙ ♀ = 170. 38. 20

Ob ⊙ ♀ v = z ⊙ ♀ + $\frac{7}{5}$ ω erit:

L. s = 2,9577524	L. s = 2,9577524
L. coſ. z⊙♀ = 9,9941776 (-)	L. ſin. z⊙♀ = 9,2112709.
L. ⊙ R = 2,9519300	L. cot. ⊙ z = 9,7271460
⊙ R = 895'' = 14'. 55''	L. ω = 1,8961693
z ♀ = 62°. 10'. 0''	ω = 79''; $\frac{7}{5}$ω = 1'. 50''
	⊙ ♀ v = 170°. 40'. 10''

Pro calculo parallactico habebimus Tab. XIX. Fig. 6.

L. ſin. z ♀ = 9,9466043	L. $\frac{♀ v}{\Pi}$ = 0,3464510
L. $(\frac{a}{b}-1)$ = 0,3998467	L. ſin. ⊙ ♀ v = 9,2098636
L. $\frac{♀ v}{\Pi}$ = 0,3464510	L. $\frac{v ω}{\Pi}$ = 9,5563146
L. coſ. ⊙ ♀ v = 9.9942157 (-)	L. v ω = 0,5563146
L. $\frac{♀ ω}{\Pi}$ = 0,3406667	L. s = 2,9577524
♀ ω = − 2,1911. π hinc	L. tang. ♀ ⊙ v = 7,5985622
⊙ v = 907,30 + 2,1911. π	♀ ⊙ v = 0°. 13'. 38''
	A ⊙ ♀ = 33. 29. 13
	A ⊙ v = 83. 42. 51

 Ex

Tab. XIX. Fig. 7. Ex particula vX iam naſcitur decrementum $-0,8318.x - 0,0554.\theta$ et ex particula vY incrementum $+0,5550.y + 0,0053.\theta$, conſequenter erit diſtantia centrorum correcta:

$$907,30+2,1911.\pi-0,8318.x+0,5550.y-0,0501.\theta = 918+\nu$$

ex quo haec deducitur aequatio finalis:

$$\nu=-10,70+2,1911.\pi-0,8318.x+0,5550.y-0,0501.\theta$$

At contactus internus circa ingreſſum praebuit

$$\nu=-31,65+1,9409.\pi+0,6235.x+0,7818.y+0,0490\,\theta$$

multiplicata igitur hac poſteriori aequatione per $\frac{501}{495}$ obtinebimus:

$$1,022\nu=-32,36+1,9845.\pi+0,6375.x+0,7994.y+0,0501.\theta.$$

Ex hac autem aequatione cum ſuperiori comparata deducitur ſequens valor ipſius ν, incognitam θ non inuoluens:

$$\nu=-21,29+2,0647.\pi-0,0961.x+0,6697.y$$

IV. Contactus externus pro egreſſu.

6. Obſeruatus eſt $3^h.\ 32'.\ 14''$ ex quo fit ang. $\odot P z = 53°.\ 3'.\ 30''$. Quum vero tempus Par ſinum huius obſeruationis ſit $13^h.\ 39'.\ 14''$, habebitur $t = 3^h.\ 29'.\ 21'' = 3,489166$:

Tab. XIX. Fig. 1.

$$\text{L. } t = 0,5427217$$
$$\text{L. } (\alpha+\beta) = 2,3756636$$
$$\text{L. } \gamma = 1,5492486$$
$$\text{L. } \odot V = 2,9183853$$
$$\text{L. } \gamma t = 2,0919703$$

$$\gamma t = 123,6$$
$$l = 613,4$$
$$♀ V = 489,8$$

L. ♀ V

L. ♀ V = 2, 6900188 L. ⊙ V = 2, 9183853
L. ⊙ V = 2, 9183853 L. coſ. σ = 9, 9349365

L. Tang. σ = 9, 7716335 L. ſ = 2, 9834488
σ = 30°. 35′. 9″ ſ = 962, 61.

Pro tempore obſeruationis eſt A ⊙ P = 83°. 0′. 30″ et ⊙ P = 112°. 27′. 30″.

L. ſin. P z = 9, 9798486 L. Tang. P z = 10, 5060715 Tab. XIX.
L. ſin. ⊙ P z = 9, 9026815 L. coſ. ⊙ P z = 9, 7788756 Fig. 5.

L. ſin. z Q = 9, 8825301 L. Tang. P Q = 10, 2849471
P Q = 62°. 34′. 40″
⊙ P = 112. 27. 30

⊙ Q = 49. 52. 50

L. coſ. z Q = 9, 8104899 L. Tang. z Q = 10, 0720421
L. coſ. ⊙ Q = 9, 8091442 L. ſin. ⊙ Q = 9, 8834927

L. coſ. ⊙ z = 9, 6196341 L. Tang. P ⊙ z = 10, 1885494
⊙ z = 65°. 23′. 10″ P ⊙ z = 57°. 3′. 50″
A ⊙ P = 83. 0. 30

A ⊙ z = 140. 4. 20
A ⊙ ♀ = 30. 35. 10

z ⊙ ♀ = 170 39. 30

L. ſ = 2, 9834488 L. ſ = 2, 9834488
L. coſ. z ⊙ ♀ = 9, 9942018 L. ſin. z ⊙ ♀ = 9, 2103759
L. ⊙ R = 2, 9776506 L. cot. ⊙ z = 9, 6609878

⊙ R = 950″ = 15′. 50″ L. ω = 1, 8548125
z ♀ = 65°. 39′ 0″ ω = 72″; $\frac{7}{5}$ω = 1′. 40″
⊙ ♀ v = 170°. 41′. 10″.

 Pro

Pro calculo Parallactico habemus:

Tab. XIX Fig. 6.

L. ſin. z♀ $= 9,9595393$	L. $\frac{♀v}{\pi} = 0,3593860$
L. $(\frac{a}{b} - 1) = 0,3998467$	L. ſin. ⊙♀$v = 9,2090940$
L. $\frac{♀v}{\pi} = 0,3593860$	L. $\frac{v\omega}{\pi} = 9,5684800$
L coſ. ⊙♀$v = 9,9942364$ (−)	L. $v\omega = 0,5684800$
L. $\frac{♀\omega}{\pi} = 0,3536224$	L. $s = 2,9834488$
♀$\omega = -2,2575.\pi$	L. Tang. ♀⊙$v = 7,5850312$
⊙$v = 962,61 + 2,2575.\pi$	♀⊙$v =$ 0°. 13′. 14″
	A ⊙♀ = 30. 35. 9
	A ⊙v = 30. 48. 23.

Hinc fit diſtantia centrorum correcta.

$$962,61 + 2,2575.\pi - 0,8589.x + 0,5121.y - 0,0523\,\theta = 976 + \mu$$

vnde deducitur

$$\mu = -13,39 + 2,2575.\pi - 0,8589.x + 0,5121.y - 0,0523.\theta.$$

Contactus vero externus pro ingreſſu quum praebuerit:

$$\mu = -34,73 + 2,0105.\pi + 0,6647.x + 0,7472.y + 0,0514.\theta$$

multiplicando poſteriorem hanc aequationem per $\frac{523}{514}$ prodibit

$$1,017.\mu = -35,34 + 2,0457.\pi + 0,6763.x + 0,7602.y + 0,0523.\theta$$

quam

quam aequationem cum ſuperiori combinando, eliciemus ſequentem valorem ipſius μ a θ liberum:

$$\mu = -24, 15 + 2, 1329. \pi - 0, 0905. x + 0, 6306. y$$

quum vero eſſet

$$\nu = -21, 29 + 2, 0647. \pi - 0, 0961. x + 0, 6697. y$$

hinc quoque deducitur

$$\mu + \nu = -45, 44 + 4, 1976. \pi - 0, 1866. x + 1, 3003. y \text{ et}$$

$$\mu - \nu = -2, 86 + 0, 0682. \pi + 0, 0056. x - 0, 0391. y.$$

Comparatio formularum pro inſula Regis Georgii inuentarum, cum iis quae ex obſeruationibus in Europa inſtitutis deducuntur.

7. Si valores ipſorum μ et ν modo inuenti, iis aequentur qui ex obſeruationibus in Europa factis eliciti ſunt, et qui in P. II. Tom. XIV. Nov. Comment. p.p. 531 et 534. recenſentur, inde valores ipſius x facili negotio deduci poterunt, qui in duas claſſes diſtribui debent, quarum prima eos complectetur, qui ex obſeruationibus circa ingreſſum Veneris inſtitutis eruuntur, poſterior vero illos, quos obſeruationes circa egreſſum Veneris ſuppeditarunt.

Claſſis I.

ex contactu externo circa ingreſſum

$$x = -36, 09 + 5, 957. \pi - 0, 125. y \text{ pro Grenouico}$$

ex

ex contactu interno circa ingreſſum

$x = -35,42 + 6,138\,\pi - 0,124\,y$ pro Grenouico

$x = -34,17 + 6,066.\pi - 0,119\,y$ Holmia

$x = -33,57 + 5,956.\pi - 0,119.y$ Caianeburg

$x = -33,22 + 5,838.\pi - 0,115.y$ Wardhus

$x = -33,03 + 5,852.\pi - 0,115.y$ Kola

Claſſis II.

ex contactu interno circa egreſſum

$x = 63,12 - 5,115.\pi - 0,214.y$ pro Petropoli

$x = 59,36 - 4,787.\pi - 0,212.y$ Wardhus

$x = 58,78 - 4,860.\pi - 0,211.y$ Kola

$x = 65,92 - 5,685.\pi - 0,208.y$ Gurjef

ex contactu externo circa egreſſum

$x = 59,34 - 4,816.\pi - 0,206.$ pro Caianeburg

$x = 65,88 - 5,518.\pi - 0,202.y$ Gurjef

$x = 52,96 - 4,064.\pi - 0,197.y$ Iakutsk.

8. Iam ſi omnes valores ipſius x ex obſeruationibus ingreſſus deducti in vnam colligantur ſummam, habebimus:

$$6x = -205,50 + 35,807.\pi - 0,717.y.$$

Simili ratione omnes valores ipſius x ex obſeruationibus circa egreſſum inuentos addendo, obtinebimus:

$$7x = +425,36 - 34,845.\pi - 1,450.y.$$

Ex priori aequatione medium ſumendo deducitur:

$$x = -34,25 + 5,968.\pi - 0,119\,y$$

ex

ex poſteriori autem

$$x = +60,77 - 4,978.\pi - 0,207.y$$

hos igitur valores iam inter ſe aequando, ſequens reſultabit aequatio

$$0 = 95,02 - 10,946.\pi - 0,088.y$$

ex qua colligitur $\pi = 8,68 - 0,0080.y$, qui valor ipſius π praeter numerum abſolutum, aliquantulam partem ipſius y inuoluit. Quum autem certo conſtet, tum valorem ipſius y eſſe poſitiuum, cum infra $10''$ ſubſiſtere, maxima incertitudo, quae propter hunc terminum coefficiente y affectum in determinationem Parallaxeos redundare poſſet, nequidem ad decimam partem vnius minuti ſecundi aſſurget. Si valor pro π inuentus in alterutro valorum ipſius x introducatur, prodibit

$$x = 17,56 - 0,167.y.$$

9. Valor ipſius π modo inuentus, cum iis quos obſeruationes ad Sinum Hudſonis et in California factae, praebuerunt, adeo egregie conſentit, vt nullum ſit dubium, quin idem valor ad veritatem quam proxime accedat. Quum enim obſeruationes ad Sinum Hudſonis factae dediſſent $\pi = 8,69 - 0,0034.y$, Californienſes autem $\pi = 8,70 - 0,0070.y$, tantilla diſcrepantia, quae inter has concluſiones adhuc ſupereſt, ex minutiſſimis erroribus obſeruationum facile deriuari poteſt. Nihilo minus infra operam dabimus, vt ſi fieri poſſit adhuc exactiores valores

pro Parallaxi ex ſingulis obſeruationibus Americanis deducamus.

10. Quamuis ex formulis noſtris valor ipſius y deduci non poſſit, niſi ſemidiametrum Solis tamquam perfecte cognitam conſideremus; hoc tamen loco multum conducet, examinare quinam valores pro correctionibus ſemidiametrorum tam Solis quam Veneris ex obſeruationibus in Inſula Regis Georgii factis prodire debeant, ſiquidem hinc infallibile deduci poteſt criterium, ex quo de exactitudine harum obſeruationum iudicare licebit. Si igitur in valore ipſius $\mu + \nu$ §. 6 inuento, loco π et x valores ipſorum ſupra traditi introducantur, prodibit

$$\mu + \nu = 12,29 + 1,2976 . y,$$

hincque poſito

$$\mu + \nu = 2\lambda, \text{ erit } y = 9,47 + 1,541 . \lambda.$$

Valor autem hic ipſius λ, iam ſatis differre videtur ab eo, quem obſeruationes pro Sinu Hudſonis dediſſent, ex iis enim inuenimus

$$2\lambda = -11,51 + 1,2788 . y.$$

Grauis igitur hinc ſuboritur ſuſpicio in obſeruationes inſulae Regis Georgii haud leues irrepſiſſe errores, ad quam ſuſpicionem vlterius confirmandam, quaeramus quoque valorem ipſius

$$\mu - \nu = -2,86, +0,0682 . \pi + 0,0056 . x - 0,0391 . y.$$

Si nimirum heic pro π et x valores inuenti ſubſtituantur, prodibit

$$\mu - \nu = -2,18 - 0,0406 . y,$$

de

de qua expreſſione iam nullum quidem eſt dubium, quin eadem a veritate multum aberret. Praeterquam enim quod obſeruationes ad Sinum Hudſonis dederint

$$\mu - \nu = - 0{,}328 - 0{,}0388 . y ,$$

menſurae diametri Veneris exactiſſimae, vnanimi fere conſenſu probant eandem 57″ non multo maiorem eſſe. Hinc igitur iam liquet, non modo, quod ex obſeruationibus ſuper inſula Regis Georgii inſtitutis dum ſeorſim conſiderantur, nulla deduci queat certa determinatio latitudinis Veneris Geocentricae vel ſemidiametri huius planetae, ſed etiam quod in his obſeruationibus inſignes lateant errores. Infra autem euidenter probabimus momenta contactuum externorum ad minimum 30″ erroribus obnoxia eſſe, contactum ſcilicet externum in ingreſſu iuſto tardius eſſe obſeruatum, contactum vero externum pro egreſſu multo citius, quam reapſe contigit.

11. Quoniam itaque in contactibus externis adeo inſignes deprehenduntur errores, videtur inde haud ſine veriſimilitudine inferri poſſe, valorem ipſius μ ex his contactibus concluſum ad erroneos quoque valores Parallaxeos perducere, adeo vt noſtra determinatio ſupra allata pro ſatis certa haberi non deberet. Quod autem erroribus obſeruationum modo memoratis non obſtantibus, valor Parallaxeos prodierit veritati ſatis conformis; ratio eſt, partim quod valores ipſius x ex contactibus externis deducti, cum iis quos ex internis eruimus, in vnam

 fuerint

fuerint collecti ſummam, partim quoque quod coefficiens ipſius π adeo ſit inſignis, vt niſi errores obſeruationum fuerint enormes, concluſiones pro Parallaxi inde vix ſenſibilem patiantur mutationem. Quo autem euidentius haec pateant, excluſis valoribus ipſius x ex contactibus externis deductis, in vnam ſummam colligamus valores x vtriusque claſſis ex contactibus tantum internis deriuatos, vnde inueniemus:

$$5x = -169,41 + 29,850.\pi - 0,592.y \text{ et}$$

$$4x = +247,18 - 20,447.\pi - 0,845.y$$

vnde mediis ſumtis, fit

$$x = -33,88 + 5,970.\pi - 0,118.y \text{ et}$$

$$x = +61,79 - 5,112.\pi - 0,211.y.$$

Hinc autem deducitur

$$0 = 95,67 - 11,082.\pi - 0,093.y$$

ideoque

$$\pi = 8'',63 - 0,0084.y,$$

qui valor ipſius π a prius inuento non niſi viceſima parte minuti ſecundi differt, valor autem ipſius x hinc reſultans eſt

$$x = 17,66 - 0,168.y.$$

Accuratior determinatio Parallaxeos et Elementorum Aſtronomicorum.

12. Quoniam vis Methodi a nobis adhibitae, in eo imprimis conſiſtit, quod valores ipſorum μ et

et ν ex obſeruationibus Americanis eliciti aequentur iis harum quantitatum valoribus, quos obſeruationes in Europa factae praebuerunt, indeque duplicis generis aequationes eruantur pro valore ipſius x determinando, quarum aequationum dum medium ſumitur, bini oriuntur valores ipſius x, qui inter ſe aequati, aequationem ſuppeditant ex qua quantitas Parallaxis definiri poteſt; hinc facile perſpicitur conclusionem ex huiusmodi operatione deductam eo maiorem ſibi vindicare certitudinis gradum, quo maior fuerit numerus obſeruationum, cum quibus illae in America inſtitutae hoc modo combinantur, ſiquidem ea ratione erroribus in obſeruando commiſſis tutiſſima adfertur medela. Quum vero praeter eas obſeruationes, ex quibus valores ipſorum μ et ν eliciti fuerunt in Part. II. Tom. XIV. Nou. Comment. plures quoque aliae calculo ſubiectae fuerunt, operae omnino pretium eſſe iudicauimus ex iisdem valores ipſorum μ et ν inueſtigare, vt deinceps harum obſeruationum comparatio cum Americanis inſtitui quoque poſſet. Enimuero quia in calculo harum obſeruationum, non ſolum certus valor parallaxis iam pro vero aſſumtus ſit, ſed etiam correctionum quibus reliqua elementa Aſtronomica indigent ratio ſit habita; pro hiſce correctionibus valores ipſorum tum adhibitos reſtituendo, inueſtigandum erat quomodo numeri abſoluti valores ipſius μ vel ν ingredientes ſe eſſent habituri, tum vero quia ob elementa Aſtronomica correcta ipſi quoque coefficientes correctionum x et y fuerint immutati, ne-

 ceſſum

ceſſum quoque fuit inquirere, quid his coefficientibus addi deberet, vt ad eam redirent formam, quae locum habet pro hypotheſi, qua hae correctiones x et y plane ſupponuntur incognitae. Denique et id non reticendum eſt, pro nonnullis harum obſeruationum, numeros abſolutos valores ipſorum μ et ν ingredientes ex eo capite inſignem ſubiiſſe mutationem, quod Longitudinibus Geographicis locorum, vbi hae obſeruationes erant factae, eae applicatae ſint correctiones, quae in P. II. Tom. XIV. pag. 520. et ſequ. fuerunt ſtabilitae. Neque tamen hoc pro circulo vitioſo in argumentando habendum eſt, quod hae Longitudines quaſi ex ipſa determinatione Parallaxis fuerint deriuatae, vt enim taceam valorem Parallaxis tum inuentum, ad veritatem proxime accedere, pleraeque harum Longitudinum ex obſeruatis contactibus Veneris cum Sole alia ratione confirmari poſſunt, qua omnino perinde erit, quam quis adhibere voluerit parallaxin, ne modo in eius valore aſſumendo enormis committatur error. Sic ex. gratia nulla habita ratione correctae Longitudinis Geographicae, contactus internus pro ingreſſu ad Promontorium Lezard obſeruatus hanc praebet aequationem:

$$\nu = 3,70 - 2,484.\pi + 0,644\, x + 0,764.\, y + 0,051\, \theta$$

quae ſi ſubtrahatur a Grenouicenſi etiam ex obſeruato contactu interno circa ingreſſum deducta:

$$\nu = 5,06 - 2,501.\pi + 0.648.\, x + 0,\ ,62.\, y \text{ remanebit}$$

$$0 = 1,36 - 0,017.\pi + 0,004.\, x - 0,002.\, y - 0,c51.\theta.$$

Hacc

Haec autem aequatio ſubſtituendo pro $x, + 16$ et $y, + 8$, quod ſaltem ſine ſenſibili errore fieri poteſt, transmutabitur in ſequentem:

$$0 = 1,40 - 0,017.\pi - 0,051.\theta.$$

Supponamus iam primo parallaxin $8''$, atque habebimus $0,051.\theta = 1,26$ ideoque $\theta = 25''$, deinde ſtatuamus $\pi = 9$ eritque $0,051\,\theta = 1,25$ vnde $\theta = 25''$ perinde vt antea In Parte II. Tom. XIV. Comment. autem ſuppoſita erat $\theta = 21''$, qui valor a modo inuento quam minimum diſcrepat. Caeterum de Longitudine Promontorii Lezard conſuli quoque poteſt Tom. XV. Nou. Comment. p. 638.

13. Hac igitur ratione ſequentes adepti ſumus valores ipſorum μ et ν, quos more recepto in binas diſpeſcere licebit claſſes, prouti ſcilicet obſeruationes vel circa ingreſſum Veneris, vel circa eiusdem egreſſum in computum venerunt:

Claſſis I.

ex contactu externo circa ingreſſum.

I. $\mu = 2,82 - 2,449.\pi + 0,684.x + 0,729.y$ Caua
II. $\mu = 3,01 - 2,471.\pi + 0,683.x + 0,729.y$ Promont. Lezard
III. $\mu = 1,31 - 2,455.\pi + 0,687.x + 0,726.y$ Holmia
IV. $\mu = 1,68 - 2,278.\pi + 0,690\ x + 0,723.y$ Ponoi

ex contactu interno circa ingreſſum.

I. $\nu = 4,76 - 2,505.\pi + 0,647,x + 0,762.y$ Lutetia Pariſior.
II. $\nu = 4,72 - 2,470.\pi + 0,645. + 0,764.y$ Caua
III. $\nu = 4,71 - 2,484.\pi + 0,644.x + 0,764\ y$ Promont. Lezard
IV. $\nu = 2,79 - 2,307.\pi + 0,654.x + 0,756.y$ Ponoi.

Claſſis

Claſſis II.

ex contactu interno circa ingreſſum.

I. $\nu = 28,10 - 2,209.\pi - 0,859.x + 0,512.y$ Orenburg

II. $\nu = 27,70 - 2,223.\pi - 0,859.x + 0,512.y$ Orsk

ex contactu externo circa egreſſum.

I. $\mu = 22,52 - 1,567.\pi - 0,883.x + 0,469.y$ Wardhus

II. $\mu = 25,88 - 1,845.\pi - 0,883.x + 0,469.y$ Petropolis

III. $\mu = 27,96 - 2,157.\pi - 0,881.x + 0,471.y$ Orenburg

IV. $\mu = 27,71 - 2,278.\pi - 0,881.x + 0,471.y$ Orsk.

Numerum autem huiusmodi aequationum, facile adhuc augere potuiſſemus, ſi non ſolum obſeruationes in aliis locis pro ingreſſu inſtitutas, de quibus in P. II. Tom. XIV. nulla facta eſt mentio, calculo ſubiicere voluiſſemus, ſed etiam pro ſingulis locis ad momenta a ſingulis obſeruatoribus aſſignata attentionem feciſſemus. Exiſtimauimus autem nos eo tutius huic labori ſuperſedere poſſe, quod valor Parallaxis infra ſtabiliendus vix vltra partem viceſimam minuti ſecundi a veritate diſcrepare poſſit, an vero maior exactitudo hoc in negotio ſperari queat, plures ſane adſunt dubitandi rationes.

14. Valoribus ipſorum μ et ν iam allatis, aequales ponantur ii, quos pro inſula Regis Georgii inuenimus, atque ex aequationibus inde reſultantibus quaerantur valores pro x, qui ita ſe habebunt:

Claſſis

Claſſis I.

ex contactu externo circa ingreſſum

I. $x = -34,80 + 5,912.\pi - 0.126.y$

II. $x = -35,09 + 5.948.\pi - 0,127.y$

III. $x = -32,72 + 5,897.\pi - 0,122.y$

IV. $x = -33,06 + 5,648.\pi - 0,118.y$

ex contactu interno circa ingreſſum

I. $x = -35,06 + 6.151.\pi - 0,123.y$

II. $x = -35,10 + 6,120.\pi - 0,127.y$

III. $x = -35,13 + 6,147.\pi - 0,127.y$

IV. $x = -32,10 + 5,829.\pi - 0,115.y.$

Claſſis II.

ex contactu interno circa egreſſum

I. $x = +64,73 - 5,601.\pi - 0,207.y$

II. $x = +64,20 - 5,620.\pi - 0,207.y$

ex contactu externo circa egreſſum

I. $x = +58,92 - 4.671.\pi - 0,205.y$

II. $x = +63,17 - 5,022.\pi - 0,205.y$

III. $x = +65,96 - 5,430.\pi - 0,203.y$

IV. $x = +65,65 - 5,584.\pi - 0,203.y.$

15. Si iam omnes valores ipſius x ex obſervationibus introitus concluſi addantur, prodibit:

$8x = -273,06 + 47,652.\pi - 0,985.y$

coniunctim igitur cum aequatione §. 8. inuenta:

$6x = -205,50 + 35,807.\pi - 0,717.y$, erit

$14x = -478,56 + 83,459.\pi - 1,702.y$

ex quo medio ſumto colligitur

$x = -34,18 + 5,961.\pi - 0,121.y.$

Eodem modo omnibus valoribus ipſius x ad poſteriorem claſſem pertinentibus, in vnam ſummam collectis, fiet

$6x = +382,63 - 31,928.\pi - 1,230.y$

et huic addendo aequationem §. 8. inuentam

$7x = +425,36 - 34,845.\pi - 1,450.y$ prodibit

$13x = +807,99 - 66,773.\pi - 2,680.y$

ex quo medio ſumto deducitur

$x = 62,15 - 5,136.\pi - 0,206.y.$

Valores igitur ipſius x medios inter ſe aequando, obtinebimus

$0 = 96,33 - 11,097.\pi - 0,085.y$

ex qua deducitur:

$\pi = 8'',68 - 0,0077.y$ et $x = 17'',57 - 0,167.y.$

16. Quoniam vt ſupra obſeruauimus, momenta contactuum externorum ſuper inſula Regis Georgii obſeruata pro vsque adeo certis haberi nequeant; haud inutile erit examinare, qui valor prodeat pro parallaxi, ſi ſola momenta contactuum internorum in computum ducantur, collectis igitur valoribus x prioris

prioris claſſis ex contactu interno deductis, habebimus:

$$4x = -137,39 + 24,247.\pi - 0,492.y$$

At ſupra §. 11. inuenimus

$$5x = -169,41 + 29,850.\pi - 0,592.y$$

quorum ſumma dat

$$9x = -306,80 + 54,097.\pi - 1,084.y$$

vnde medium ſumendo prodit

$$x = -34,09 + 6,011.\pi - 0,120.y$$

Porro ſi valores x poſterioris claſſis ex contactu interno deriuati inuicem addantur prodit:

$$2x = +128,93 - 11,221.\pi - 0,414.y$$

quum igitur §. 11. haberemus:

$$4x = +247,18 - 20,447.\pi - 0,845.y,$$ inde fiet

$$6x = +376,11 - 31,668.\pi - 1,259.y$$

ideoque medio capto

$$x = 62,69 - 5,278.\pi - 0,210.y$$

Binos igitur valores medios quantitatis x inter ſe aequando obtinebimus

$$0 = 96,78 - 11,289.\pi - 0,090.y,$$

ex qua aequatione deducitur

$$\pi = 8,58 - 0,0080.y$$

tum vero hunc valorem in alterutra aequatione valorem ipſius x exhibente ſubſtituendo, fiet

$$x = 17,44 - 0,168.y.$$

17. De valore parallaxis iam inuento omnino certiſſimam fouere licet ſpem, quod a veritate non admodum diſcrepaturus ſit, quia coefficiens ipſius π, in aequationibus parallaxi determinandae inſeruientibus ſit praemagnus, quippe qui ad 11 vsque vnitates aſſurgit. Qui autem ſingulos valores ipſius x vtriusque claſſis ſeorſim inter ſe comparare voluerit, inueniet valores pro parallaxi inde orituros ſat arctis limitibus contineri, imprimis autem ſi rationem tantum habere voluerit contactuum internorum, deprehendet in expreſſione pro Parallaxi numerum abſolutum nec vltra 8,80 aſſurgere, neque infra 8,41 deprimi, medium autem horum numerorum 8,60 vix differt a numero abſoluto expreſſionem parallaxis ſupra inuentam ingrediente. Quum itaque quantitas parallaxis ex huiusmodi comparatione inueſtiganda tam arctis includatur limitibus, nullum eſt dubium, quin hac ratione errores obſeruationum, cum quibus eae ſuper inſula Regis Georgii factae comparantur, quam proxime deſtructae ſint, vnicum igitur dubium quo praecedens determinatio premitur, originem repetit ex iis erroribus, quibus ipſae obſeruationes inſulae Regis Georgii affectae eſſe poſſint. De contactibus externis iam quidem quid ſentiamus, diximus, quod vero internos attinet, infra inquiremus, quid tantilli errores circa ipſos commiſſi, ad valorem parallaxis immutandum valeant. In anteceſſum tamen monere iuuabit, incertitudinem hinc oriundam ad ſextam partem minuti ſecundi non aſſurgere.

18. Quo certiores quoque euadamus de valoribus parallaxis, quos obſeruationes ad ſinum Hudſonis et in California factae praebent, valores ipſorum μ et ν pro his locis inuentos, iam aequemus iis, quos §. 13 adduximus, hinc autem pro priori quidem loco ſequentes obtinebimus valores ipſius x.

Claſſis I.

ex contactu externo circa ingreſſum.

I. $x = -3, 13 + 2, 455. \pi - 0, 163. y$

II. $x = -3, 38 + 2, 487 \pi - 0, 163. y$

III. $x = -1, 17 + 2, 453. \pi - 0, 158. y$

IV. $x = -1, 64 + 2, 216. \pi - 0, 154. y$

ex contactu interno circa ingreſſum

I. $x = -4, 30 + 2, 519. \pi - 0, 163. y$

II. $x = -4, 26 + 2, 478. \pi - 0, 166. y$

III. $x = -4, 26 + 2, 507. \pi - 0, 167. y$

IV. $x = -1, 63 + 2, 231. \pi - 0, 154. y.$

Claſſis II.

ex contactu interno circa egreſſum

I. $x = +34, 49 - 2, 045. \pi - 0, 168. y$

II. $x = +33, 97 - 2, 063. \pi - 0, 168. y$

ex contactu externo circa egreſſum

I. $x = +27, 90 - 1, 284. \pi - 0, 169\ y$

II. $x = +32, 13 - 1, 634. \pi - 0, 169. y$

III. $x = +34, 84 - 2, 032. \pi - 0, 167. y$

IV. $x = +34, 53 - 2, 186. \pi - 0, 167. y.$

19. Omnes valores ipſius x prioris claſſis in vnam colligendo ſummam obtinebimus:

$$8x = -23,77 + 19,346.\pi - 1,288.y$$

cui aequationi ſi addatur iſta p. 477. P. II. Tom. XIV. Nov. Comment. tradita

$$6x = -21,23 + 14,331.\pi - 0,942.y$$

prodit

$$14x = -45,00 + 33,677.\pi - 2,230.y$$

hincque medium ſumendo

$$x = -3,21 + 2,405.\pi - 0.160.y$$

Addantur nunc quoque ſinguli valores x e poſteriori claſſe, quo facto habebitur:

$$6x = 197,86 - 11,244.\pi - 1,008.y$$

at loco citato Tom. XIV. Comment. erat

$$7x = 212,27 - 10,544.\pi - 1,193.y$$

horum igitur ſumma praebet:

$$13x = 410,13 - 21,788.\pi - 2,201.y$$

hincque medio capto

$$x = 31,55 - 1,676.\pi - 0.170.y.$$

His valoribus ipſius x inter ſe aequatis, erit

$$0 = 34,76 - 4,081.\pi - 0,010.y$$

ex qua deducitur

$$\pi = 8,52 - 0,0019.y, \text{ hincque } x = 17,62 - 0,167.y$$

Si valores ipſius x ex contactibus internis deriuatos ſelige-

ſeligere vellemus, ii prioris claſſis collectim ſumti dabunt

$$9x = -31,22 + 21,563 . \pi - 1,432 . y$$

vnde valor medius

$$x = -3,47 + 2,396 . \pi - 0,159 . y$$

valores autem poſterioris claſſis coniunctim praebent

$$6x = +195,92 - 10,424 . \pi - 1,029 . y$$

ex qua fit

$$x = 32,65 - 1,737 . \pi - 0,171 . y$$

priorem autem valorem a poſteriori ſubtrahendo oritur:

$$0 = 36,12 - 4,133 . \pi - 0,012 . y$$

ex qua aequatione colligitur

$$\pi = 8,74 - 0,0029 y \text{ et } x = 17,47 - 0,166 . y.$$

20. Eodem modo ex valore ipſius y pro fortalitio *Sti Ioſephi* in California inuento, ſequentes deriuantur valores quantitatis x.

Claſſis I.

ex contactu interno circa ingreſſum

I. $x = -20,32 + 4,413 . \pi - 0,145 . y$

II. $x = -20,32 + 4,378 . \pi - 0,148 . y$

III. $x = -20,34 + 4,403 . \pi - 0,148 . y$

IV. $x = -17,51 + 4,109 . \pi - 0,136 . y.$

Claſſis

Claſſis II.

ex contactu interno circa egreſſum

I. $x = +50,57 - 3,932 . \pi - 0,186 . y$

II. $x = +50,04 - 3,950 . \pi - 0,186 . y$

Dum hi valores coniunctim ſumuntur cum iis, qui p. 533 P. II. Tom. XIV. Nouor. Comment. occurrunt, pro priori claſſe conſequemur:

$$9x = -174,86 + 38,538 . \pi - 1,266 . y$$

pro poſteriori autem

$$6x = +291,25 - 21,666 . \pi - 1,138 . y$$

hincque mediis ſumtis

$x = -19,43 + 4,282 . \pi - 0,141 . y$ et

$x = +48,54 - 3,611 . \pi - 0,190 . y$ vnde

$0 = 67,97 - 7,893 . \pi - 0,049 . y$

ex qua aequatione deducitur

$\pi = 8,61 - 0,0062 . y$ hincque $x = 17,44 - 0.168 . y$.

31. Nunc igitur determinationem verae parallaxeos Solis tuto ſuſcipere poterimus, dum nimirum ex valoribus modo inuentis, medium quendam eligamus. Quum vero ſingulae aequationes ex quibus parallaxis determinatur, quoad certitudinem eodem loco haberi nequeant, ſiquidem illis ſine dubio maior tribui debeat fides, pro quibus coefficiens ipſius π maiorem habuerit valorem; tutiſſimum nobis viſum eſt, vnicuique concluſioni eam aſſignare probabilitatem, quae coefficienti ipſius π proportionalis eſt. Pro-

Proinde probabilitas valoris pro π ex obſeruationibus ſuper inſula Regis Georgii deducti numero 11 haberi debet proportionalis, probabilitas vero valoris ipſius π ex obſeruationibus ad ſinum Hudſonis eliciti, numero 4 ſtatuendus eſt proportionalis et denique probabilitas determationis, quam obſeruationes in California inſtitutae praebent, numero 8 proportionalis cenſenda eſt. Breuitatis autem gratia valores ipſius π pro tribus locis Americanis inuentos, reſpectiue litteris A, B, C deſignemus, vbi ſedulo obſeruandum eſt valores duarum priorum litterarum, duplices haberi, prouti ſcilicet vel momenta omnium contactuum adhibentur, vel tantum ea contactuum internorum in vſum vocantur.

22. Quodſi nunc ſine diſcrimine tam contactuum externorum quam internorum rationem habere velimus, valor ipſius π medius inuenietur, ſi multiplicetur A per 11, B per 4 et C itidem per 4, tum vero ſumma productorum diuidatur per 19, quum enim in Califormia binos tantum contactus internos obſeruare licuit, determinationi C dimidius tantum valor reſpectu reliquarum A et B tribuendus eſt. Hinc igitur obtinebimus:

$$19\pi = 11(8,68 - 0,0077.y) + 4(8,52 - 0,0019.y)$$
$$+ 4(8,61 - 0,0062.y)$$

ideoque

$$\pi = 8,63 - 0,0062.y.$$

Porro ſi pro inſula Regis Georgii, tantum contactuum internorum reſpectum habere velimus, inuenietur

valor ipſius π medius, multiplicando A per 11, B per 8 et C per 8 et diuidendo ſummam productorum per 27, tum ſcilicet erit

$$27\pi = 11(8,58 - 0,0080.y) + 8(8,52 - 0,0019.y) + 8(8,61 - 0,0062.y)$$

vnde

$$\pi = 8,57 - 0,0057.y.$$

Denique ſi pro ſinu Hudſonis quoque momenta contactuum externorum penitus excludantur, valor medius ipſius π habebitur multiplicando A per 11, B per 4 et C per 8 ſummamque productorum diuidendo per 23, erit enim

$$23.\pi = 11(8,58 - 0,0080.y) + 4(8,74 - 0,0029.y) + 8(8,61 - 0,0062.y)$$

proinde

$$\pi = 8,62 - 0,0065.y,$$

qui valor ab illo pro prima hypotheſi inuento vix differt, ex quo medio quaſi ſumto inter binas vltimas determinationes, tuto ſtatuere licebit valorem Parallaxis eſſe

$$\pi = 8,60 - 0,006.y$$

nulla enim ſufficiens adeſſe videtur ratio, cur obſeruationes contactuum externorum ad ſinum Hudſonis factae in dubium reuocari deberent. Hoc valore autem pro π aſſumto reperietur

$$x = 17,47 - 0,168.y.$$

13. Quoniam dum obſeruationes Americanas, cum iis in Europa inſtitutis comparauimus, certas ſuppo-

ſuppoſuimus longitudines locorum, vbi hae obſeruationes fuerunt factae, quae ſi multum eſſent erroneae, nullum ſane eſt dubium, quin ipſa Parallaxeos determinatio inde maxime redderetur dubia; vt igitur pleniorem nobis acquiramus conuictionem, valorem parallaxis iam inuentum veritati conſentaneum eſſe, eas obſeruationes ſeorſim conſiderare placet, quas in eodem loco tam circa egreſſum, quam ingreſſum inſtituere licuit, quales ſunt illae Wardhuſii, Caianeburgi et Kolae factae. Si enim huiusmodi obſeruationum inſtituatur comparatio, cum obſeruationibus totius tranſitus in America factis, valor Parallaxis inde deducendus ob errores in Longitudinibus horum locorum commiſſos ſenſibili non adficietur variatione. Modo autem conſueto valores ipſius x in binas diſtribuamus claſſes, ſicque ex comparatione obſeruationum in Lapponia habitarum, cum illis ad inſulam Regis Georgii, ſequentes obtinebimus valores ipſius x:

Claſſis I.

ex contactu interno circa ingreſſum

$x = -33,57 + 5,956.\pi - 0,119\,y$ Caianeburg

$x = -33,22 + 5,838.\pi - 0,115.y$ Wardhus

$x = -33,03 + 5,852.\pi - 0,115.y$ Kola

Claſſis II.

ex contactu interno circa egreſſum

$x = +59,36 - 4,787.\pi - 0,212.y$ Wardhus

$x = 58,78 - 4,860.\pi - 0,211.y$ Kola

 ex

ex contactu externo circa egreſſum

$x = 58,92 - 4,671.\pi - 0,207.y$ Wardhus

$x = 59,34 - 4,816.\pi - 0,206.y$ Caianeburg.

Summa omnium valorum x prioris claſſis eſt

$3x = -99,82 + 17,646.\pi - 0,349.y$

ex quo medio ſumto fit

$x = -33,27 + 5,882.\pi - 0,116.y$

omnes autem valores x poſterioris claſſis in vnam ſummam collecti praebent

$4x = 236,40 - 19,134.\pi - 0,836.y$ ideoque

$x = 59,10 - 4,784.\pi - 0,209.y$

ex quibus valoribus ipſius x inter ſe aequatis colligitur

$\pi = 8,66 - 0,0087.y$ et $x = 17,67 - 0,167.y$.

Sin pro egreſſu tantum contactus internos adhibere placuerit, fiet

$x = 59,07 - 4,823.\pi - 0,211.y$

vnde deducitur

$\pi = 8,62 - 0,0089.y$ et $x = 17,47 - 0,168.y$.

24. Ex comparatione obſeruationum ad Sinum Hudſonis cum Lapponicis ſequentes deducuntur valores ipſius x:

Claſſis I.

ex contactu interno

$x = -3,08 + 2,356.\pi - 0,155.y$ Caianeburg

$x = -2,79 + 2,245.\pi - 0,153.y$ Wardhus

$x = -2,61 + 2,259.\pi - 0,153.y$ Kola

Claſſis

Claſſis II.

ex contactu interno

$x = +29,45 - 1,257 \cdot \pi - 0,174 \cdot y$ Wardhus

$x = 28,86 - 1,329 \cdot \pi - 0,174 \cdot y$ Kola

ex contactu externo

$x = 28,39 - 1,434 \cdot \pi - 0,171 \cdot y$ Caianeburg

$x = 27,90 - 1,284 \cdot \pi - 0,169 \cdot y$ Wardhus.

Si ex valoribus prioris claſſis medium ſumatur, prodit

$x = -2,83 + 2,287 \cdot \pi - 0,154 \cdot y$

ex valoribus vero poſterioris claſſis deducitur

$x = 28,65 - 1,326 \cdot \pi - 0,172 \cdot y$

et contactus externis excluſis

$x = 28,14 - 1,359 \cdot \pi - 0,170 \cdot y$.

Prior ſuppoſitio praebet

$\pi = 8,71 - 0,0050 \cdot y$ et $x = 17,10 - 0,166 \cdot y$

poſterior autem

$\pi = 8,50 - 0,0044 \cdot y$ et $x = 16,60 - 0,166 \cdot y$.

25. Denique comparatione facta obſeruationum in California inſtitutarum cum Lapponicis, ſequentes prodeunt valores ipſius x.

I. Claſſis.

$x = -18,97 + 4,235 \cdot \pi - 0,136 \cdot y$ Caianeburg

$x = -18,66 + 4,121 \cdot \pi - 0,135 \cdot y$ Wardhus

$x = -18,47 + 4,135 \cdot \pi - 0,135 \cdot y$ Kola

vnde medium

$$x = -18,69 + 4,164.\pi - 0,135.y.$$

II. Claſſis.

$$x = 45,23 - 3,122.\pi - 0,192.y \text{ Wardhus}$$

$$x = 44,64 - 3,194.\pi - 0,192.y \text{ Kola}$$

hincque medio ſumto

$$x = 44,93 - 3,158.\pi - 0,192.y.$$

Valoribus ipſius x iam inter ſe aequatis, ex aequatione inde reſultante deducitur

$$\pi = 8,69 - 0,0078.y \text{ et } x = 17,49 - 0,167.y.$$

26. Si nunc tres valores pro parallaxi ex ſingulis obſeruationibus Americanis deducti, litteris A, B, C deſignentur, tumque tres vt ſupra formentur hypotheſes, quarum

I. $19.\pi = 11\,A + 4\,B + 4\,C$

II. $27.\pi = 11.\,A + 8\,B + 8\,C$

III. $23.\pi = 11.\,A + 4\,B + 8\,C$

ſequentes inde deducentur valores medii ipſius π

I. $\pi = 8,68 - 0,0076.y$

II. $\pi = 8,67 - 0,0074.y$

III. $\pi = 8,62 - 0,0077.y$

qui valores certe non magis differunt ab iis, quos ſupra inuenimus, quam vt huius diſcrepantiae ratio a leuibus obſeruationum erroribus facile deduci poſſit.

27. Nunc quoque iniucundum non fore arbitramur, inquirere quales inueniantur pro parallaxi valores, ſi obſeruationum Americanarum inter ſe inſtituatur comparatio. Quum igitur obſeruationes ad ſinum Hudſonis factae praebuerint

$$\nu = 1,57 - 0,636.\pi - 0,095.x + 0,641.y$$

ex obſeruationibus autem in inſula Regis Georgii factis prodeat:

$$\nu = -21,29 + 2,065.\pi - 0,096.x + 0,670.y$$

horum valorum differentia dat:

$$0 = 22,86 - 2,701.\pi + 0,001.x - 0,029.y$$

ex qua deducitur

$$\pi = 8,46 + 0,0004.x - 0,011.y$$

ſeu pro x ſubſtituto eius valore

$$x = 17,47 - 0,168.y,$$

$$\pi = 8,47 - 0,011.y.$$

Simili modo ex contactibus externis habetur pro Sinu Hudſonis

$$\mu = +0,40 - 0,549.\pi - 0,090.x + 0,603.x$$

et pro inſula Regis Georgii

$$\mu = -24,15 + 2,133.\pi - 0,091.x + 0,631.x.$$

ex quibus fit

$$0 = 24,55 - 2,682.\pi + 0,001\,x - 0,028\,y$$

vnde

$$\pi = 9,15 + 0,0004\,x - 0,011.y$$

ſeu

ſeu pro x eius valore ſubſtituto

$$\pi = 9,16 - 0,011.y.$$

Porro quia obſeruationes contactuum internorum pro California dederunt

$$\nu = -10,38 + 0,783.\pi - 0,098.x + 0,654.y$$

hoc valore iſti aequato, qui pro inſula Regis Georgii inuentus eſt, habebitur

$$0 = 10,91 - 1,282.\pi - 0,002.x - 0,016.y$$

hincque

$$\pi = 8,51 - 0,0016.x - 0,0125.y$$

et pro x valore ſubſtituto

$$\pi = 8,48 - 0,012.y$$

Demum ſi valores ipſius ν ex obſeruationibus ad Sinum Hudſonis et Californiae inſtitutis deductae inter ſe aequentur, obtinebitur haec aequatio:

$$0 = 11,95 - 1,419.\pi + 0,003x - 0,013\ y$$

vnde

$$\pi = 8,42 + 0,0021.x - 0,0092.y$$

et pro x valore eius introducto

$$\pi = 8,46 - 0.0096.y.$$

Medium autem ex his quatuor determinationibus $\pi = 8,64 - 0,11.y$, cum ſupra inuentis ſatis bene conuenit. Nihilo minus tamen nullum eſt dubium, quin determinatio ex contactibus externis deducta plus iuſto a veritate diſcrepet Quod autem e contra com-

comparatio contactuum internorum iuſto minores praebeant valores Parallaxis, propter leuiſſimos errores obſeruationum fieri poteſt, quum in aequationibus vnde π inueſtigari debet, eius coefficiens ſit admodum exiguus. Sic ex. gratia ſi ſupponatur durationem tranſitus inter binos contactus internos pro inſula Regis Georgii 10″ eſſe minuendam, pro Fortalitio autem Principis Walliae tantundem augendam, inde numerus abſolutus in aequatione ex qua π eruitur, $+0,50$ augebitur, ita vt habeatur

$$0 = 23,36 - 2,701.\pi + 0,001.x - 0,029.y,$$

ex quo fiet

$$\pi = 8,66 - 0,011.y.$$

28. Propter incertitudinem contactuum externorum in Inſula Regis Georgii obſeruatorum, ex iſtis obſeruationibus de vera quantitate diametrorum Solis et Veneris, nec non de correctione y, vix quicquam certi iudicare licebit, interim notaſſe iuvabit, ſi in aequationibus ipſorum $\mu + \nu$ et $\mu - \nu$ valores pro hoc loco exhibentibus, ſubſtituantur valores pro π et x inuenti prodire:

$$\mu + \nu = 2\lambda = -12,60 + 1,3065.y \text{ et}$$

$$\mu - \nu = -2,17 - 0,0404.y.$$

Combinemus vero potius valorem ipſius μ pro Sinu Hudſonis inuentum, cum valore ipſius ν pro Inſula Regis Georgii, ex quo emerget:

$$\mu + \nu = -20,89 + 1,5154.\pi - 0,1861.x + 1,2729.y$$

$$\mu - \nu = +21,69 - 2,6140.\pi + 0,0061.x - 0,0665.y$$

 quae

quae expreſſiones introductis pro π et x ipſorum valoribus in ſequentes transformantur:

$$\mu + \nu = - 11, 11 + 1, 2951 . y$$

$$\mu - \nu = - 0, 68 - 0, 0518 . y$$

ex priori fit

$$y = 8, 58 + 1, 55 . \lambda$$

ex poſteriori autem

$$\mu - \nu = - 1, 12 - \tfrac{1}{13} \lambda .$$

Quum autem ex obſeruationibus ad Sinum Hudſonis et Californiae inuentum ſit eſſe:

$$y = 9, 00 + 1, 56 . \lambda ; \quad \mu - \nu = - 0, 68 - \tfrac{1}{13} \lambda$$

$$y = 8, 71 + 1, 55 . \lambda ; \quad \mu - \nu = - 0, 94 - \tfrac{1}{13} \lambda$$

medio inter has tres determinationes ſumto, ſtatui poterit

$$y = 8, 76 + 1, 55 . \lambda \text{ et } \mu - \nu = - 0, 91 - \tfrac{1}{13} \lambda .$$

29. Hinc quidem adhuc de vera latitudine Veneris Geocentrica nec non diametro Veneris, nihil concludi poſſe videtur, niſi valor litterae λ, ſeu correctionis, qua ſemidiameter Solis indiget, fuerit determinatus. Quum autem inter menſuras exactiſſimas diametri Solis in apogeo a Celeb. Viris *de la Lande*, et *Short* inſtitutas, nonniſi $2\frac{1}{2}''$ diſcrepantia ſit, medio inter vtriusque menſuras capto, diametrum Solis $1\frac{1}{4}''$ diminuere licebit, ex quo habebitur $\lambda = - 0, 62$. Hoc autem valore pro λ in aequationibus ſupra allatis ſubſtituto, prodit $y = 7'', 8$ et

$\frac{\mu - \nu}{2} = - 0'', 43$, tum vero fiet $\mu = - 1, 05$ et $\nu = - 0, 19$. Quum igitur ſemidiameter Veneris ſit $= 29'', 0 + \frac{\mu - \nu}{2}$ verus valor huius ſemidiametri erit $= 28'', 57$ ideoque totius diametri $= 57'', 14$ quod omnino concordare deprehenditur, cum menſuris huius diametri Micrometro obiectiuo a variis obſeruatoribus inſtitutis.

30. Quod autem correctionem attinet, quam pro latitudine Veneris inuenimus, non reticendum eſt, eam multo magis dubiam videri, quum variae obſeruationes ad diſtantiam minimam centrorum Solis et Veneris determinandam inſtitutae, probare videantur, correctionem latitudinis aliquanto minorem ſtatuendam eſſe. Ad Sinum ſcilicet Hudſonis haec diſtantia inuenta eſt $9', 54''$, vnde prodit vera diſtantia minima $10'. 5'', 7$, ideoque correctio latitudinis $+ 1'', 4$. Noritoni in Penſyluania eadem diſtantia inuenta fuit $10'. 3'', 1$, vnde vera diſtantia minima $10'. 10'', 4$ et correctio latitudinis $+ 6'', 1$. Nouae Angliae a Celeb. *Winthorp* obſeruata fuit diſtantia minima $9'. 59'', 7$; vnde colligitur vera diſtantia minima $10'. 7'', 8$ et correctio Latitudinis $+ 3'', 5$. Denique ſuper Inſula Regis Georgii diſtantia minima inuenta eſt $10'. 25'', 4$, quae effectu Parallaxis correcta praebet veram diſtantiam minimam $10'. 11'', 6$ ideoque correctionem Latitudinis $+ 7'', 3$. Caeterum inſignis diſcrepantia harum determinationum, ad earum certitudinem infringendam non parum valet, praeprimis quum aliae obſeruationes ad diſtantias centro-

 rum

rum Solis et Veneris explorandas inſtitutae, indicare videantur diſtantiam minimam centrorum proxime ſtatui poſſe $10'.\ 11''$, ideoque correctionem Latitudinis fere $7''$, quae tantum vnico ſecundo differt ab ea, quam obſeruationes contactuum praebent. Hoc ſaltem audacter affirmare non dubitamus, nequaquam fieri poſſe, vt correctio Latitudinis infra $5''$ deprimatur.

31. Si iam in formula pro parallaxi inuenta $\pi = 8,60 - 0,00.6.y$ loco y eius valor $+ 7,8$ introducatur, prodibit verus valor *Parallaxeos Solis horizontalis* tempore Tranſitus Veneris per Solem $= 8'', 55$, correctio autem Longitudinis geocentricae hinc deducetur $= 16'', 15$, ex quo ſequitur tempus coniunctionis Solis et Veneris $4'.\ 5''$ tardius incidere, quam in calculis noſtris ſuppoſitum fuit.

Elementa igitur Aſtronomica correcta iam ita ſe habebunt:

Coniunctio vera Solis et Veneris contigit
1769. d. 3. Iunii $10^h.\ 11'.\ 44''$ Temp. Pariſ. medio
ſeu 10. 13. 57 Temp. vero

pro quo momento erat:

I.	Longitudo Solis et Veneris	$2^s.\ 13^\circ.\ 27'.\ 20''$
II.	Latitudo Veneris Borealis	$10'.\ 18'', 8$
III.	Parallaxis Solis horizontalis	$8'', 55$

pro diſtantia igitur Solis media habetur parallaxis eius horizontalis $= 8'', 68$, vnde diſtantia Solis media

dia 23753 ſemidiametris aequatoris terreſtris, proxime aequalis haberi poteſt. Notandum denique eſt, ſi correctio Latitudinis ſtatuatur tantum $5''$ parallaxin Solis inueniri $8'', 57$, id eſt $\frac{1}{50}$ ſec. diuerſam ab ea, quam adoptauimus, vnde tanto magis credere fas eſt, noſtram determinationem pro parallaxi vix viceſima parte vnius minuti ſecundi a veritate alienam eſſe.

32. Vnicum elementum, cuius verificationem adhuc ſuſcipere licet, eſt ipſa longitudo geographica loci ſuper inſula Regis Georgii, vbi obſeruatio peracta eſt, ſi enim ea qualis a nobis aſſumta fuit, multum a vera aberraret, ipſa quoque determinatio parallaxis ipſi ſuperſtructa aliquantum dubia redderetur. Vt autem veram longitudinem eruamus, valores ipſius ν pro hoc loco inuentos a ſe inuicem ſubtrahamus, quo facto prodibit haec aequatio:

$$0 = -20,95 - 0,2502.\pi + 1,4553.x + 0,2268.y + 0,0991.\theta.$$

In hac aequatione iam quidem ſtatim pro π, x et y valores abſolutos in §. praecedenti ſtabilitos introducere liceret, conſultius tamen duximus pro π et x valores ipſorum quantitate y adhuc adfectos ſubſtituere, vt appareat incertitudinem veri valoris pro y hoc negotium minime turbare. Hoc autem facto prodibit

$$0 = 2,32 - 0,0162.y + 0,0991.\theta$$

quum vero iam ſine vllo errandi periculo pro y

 ſub-

ſubſtituere liceat $+7''$, 8, fiet: $0 = 2,19 + 0,0991\,\theta$, vnde habetur $\theta = -22''$, ideoque vera Longitudo loci ſuper inſula Regis Georgii in quo obſeruatio facta, ſtatuenda eſt a meridiano Pariſino $10^h.\ 7'\ 22''$ ſeu in Gradibus $151°.\ 50'\ 30''$ Occid. Si valores ipſorum μ ſimili ratione a ſe inuicem ſubtrahantur, ſequens orietur aequatio:

$$0 = -21,34 - 0,2470.\pi + 1,5236\,x + 0,2351.y + 0,1037\,\theta$$

vnde pro π et x ſubſtituendo valores §. 22, fiet

$$0 = 3,15 - 0,0193.y + 0,1037.y,$$

atque poſito iam $y = +7''$, 8; $0 = 3,00 + 0,1037.\theta$, vnde $\theta = -29''$. Medio igitur inter vtramque determinationem aſſumto ſtatuere liceret $\theta = -25''$, quum vero obſeruationes contactuum externorum, iis internorum multo incertiores ſint, priori concluſioni merito acquieſcimus cuius facti rationem, infra pluribus argumentis confirmare licebit.

Examen vlterius et verificatio concluſionum ſupra inuentarum.

33. Quum inter momenta contactuum internorum ſuper inſula Regis Georgii a tribus obſervatoribus aſſignata, inſignis ſe prodat differentia, haud abs re erit diſquirere, quomodo parallaxis fuiſſet immutanda, ſi alia momenta contactuum internorum, quam quae in calculo adhibuimus; adoptare voluiſſemus. Quoniam vero momentum contactus

tactus interni a nobis in vſum vocatum ſit illud a Cel. *Solander* aſſignatum, quod medium quaſi tenet locum inter bina reliqua, dum momentum a Cel. *Green* notantum iſtud 7'' praecedere, momentum vero Cl. *Cook* 13'' ſequi inuenitur, liquet numerum abſolutum in aequatione pro ν, hinc eas ſubire mutationes, vt dum obſeruationi D. *Green* ſatisfaciendum ſit, is numerus − 31, 31 ſtatui debeat, pro obſervatione autem D. *Cook.* − 32, 29. Pro contactu interno circa egreſſum obſeruatio Cel. *Green* ab ea Cl. *Cook* 10'' differt, vt igitur poſteriori ſatisfiat, numerus abſolutus in aequatione pro ν ſtatui debet − 10, 20. Conſtituamus iam duas hypotheſes, quarum prima erit, ſi obſeruatio contactus interni D. *Green* pro ingreſſu combinetur, cum obſeruatione ſimilis contactus D. *Cook* pro egreſſu, altera vero ſi vice mutata obſeruatio D. *Cook* pro ingreſſu, cum obſeruatione D. *Green* pro egreſſu comparetur. Ex priori igitur fiet.

$$\nu = -20,87+2,0647.\,\pi-0,0961.\,x+0,6697.\,y$$

ex poſteriori autem

$$\nu = -21,62+2,0647.\,\pi-0,0961.\,x+0,6697.\,y$$

leues enim variationes, quae hinc in coefficientem ipſius y redundant omnino negligere licet. Si iam modo conſueto, hinc quaerantur valores ipſius x, facile patet pro priori hypotheſi omnes valores x I. Claſſis numero −0,56, claſſis audem II^{dae} numero +0,55 diminuendos eſſe, contra vero pro poſteriori hypotheſi valores x I. Claſſis numero − 0, 41 et

II^{dae}

II^{dae} Claſſis numero $+ 0, 43$ augendos eſſe, vnde hae reſultabunt aequationes finales:

$$0 = 95, 67 - 11, 289. \pi - 0, 090. y$$

$$0 = 97, 65 - 11, 289. \pi - 0, 090. y$$

ex quibus deducuntur

$$\pi = 8, 48 - 0, 0050. y \text{ et } \pi = 8, 65 - 0, 0080. y$$

quarum determinationum media

$$\pi = 8, 57 - 0, 0080$$

bene conuenit cum ea, quae ex obſeruationibus a nobis in vſum vocatis ſequitur. Hinc iam tuto inferri poſſe videtur, noſtrum valorem pro parallaxi inuentum eo magis pro certo habendum eſſe, quo certius liquet, quod diſſenſus obſeruationum ad inſulam Regis Georgii vix incertitudinem $\frac{1}{5}$ min. ſec. pro parallaxi producere valeat.

24. Proximum iam eſt, vt in certitudinem momentorum pro contactibus externis aſſignatorum inquiramus, de quibus iam ſupra monuimus, quod erroribus haud contemnendis videantur obnoxia. Enimvero generatim quidem patet, ſi moram inter binos contactus internum et externum, tam pro ingreſſu quam egreſſu ſuper inſula Regis Georgii obſeruatam conſideremus eam, iuſto minorem eſſe, quoniam non ſolum calculus oſtendat, ſed omnes quoque melioris notae obſeruationes comprobent, durationem inter binos contactus pro ipſo centro telluris 18′. 40″ minorem ſtatui non debere. Quum igitur pro inſula modo dicta effectus parallaxeos fuerit negatiuus, ideoque totus

totus tranſitus propius ad coniunctionem ibi ſit obſeruatus quam ad centrum telluris, manifeſtum redditur pro hoc loco moram Veneris inter duos contactus internum et externum, ſaltem 18′, 40″ fuiſſe debere aequalem, quum tamen pro egreſſu non niſi ad 18′. 11″ aſſurgat. Ex hoc tamen ratiocinio nondum inferre licet, vtrum principalis error in obſeruationibus contactuum externorum, an forſan potius internorum lateat? Quum vero obſeruationes contactuum internorum, egregie conueniant cum illis ad ſinum Hudſonis inſtitutis, ſuſpicandi omnino rationem habemus, in contactibus externis errorum fontem potiſſimum quaeri debere.

35. Vt id ipſum nunc magis directe oſtendamus, comparationem inſtituamus, binorum valorum pro ν ex contactibus internis inuentorum, cum iis, quos pro binis aliis locis ex obſeruatione ingreſſus et egreſſus elicuimus, et inde quaeramus valorem ipſius θ, quodſi enim iſte valor ex ſingulis his comparationibus proxime idem prodierit, id manifeſto haberi debet indicio, momentis contactuum internorum, graues errores ineſſe non poſſe. Ex obſeruatione contactus interni Grenouici a Cel. *Maskelyne* facta, hanc elicuimus aequationem:

$$\nu = 5,06 - 2,5008.\pi + 0,6477.x + 0,7619.y$$

cum qua ſi valores ipſius ν pro inſula Regis Georgii inuenti combinentur, hae duae prodibunt aequationes:

$$0 = +36,71 - 4,4417.\pi + 0,0242.x - 0,0259.y - 0,0490.\theta$$

 0 = +

$$0 = +15,76 - 4,6919.\pi + 1,4795.x + 0,2069.y + 0,0501\ \theta.$$

In vtraque pro π et x introducantur valores §. 22. aſſignati, vnde in has transformabuntur:

$$0 = -1,07 - 0,0034\ y - 0,0490.\theta$$

$$0 = +1,35 - 0,0136.y + 0,0501.\theta$$

tum vero poſito $y = +8''$, erit

$$0 = -1,10 - 0,049\theta \text{ et } 0 = +1,24 + 0,050\theta$$

ex priori fit $\theta = -22''$, ex poſteriori autem $\theta = -25''$, adeo vt vix maior conſenſus exſpectari potuerit. Obſeruatio contactus interni pro egreſſu a Cel. Prof. *Lowitz* in Gurief facta hanc praebet aequationem:

$$\nu = 29,29 - 2,2752.\pi - 0,8595.x + 0,5110.y$$

vbi notandum eſt, numerum abſolutum huius aequationis p. 442. P. II. Tom. XIV. Nov. Comment. allatum, in praecedentem eſſe immutatum, quum probabile ſit Longitudinem oppidi Gurief a Pariſiis eſſe paulo minorem ea, quae ibi aſſumta fuit. conf. Tom. XV. Nov. Comment. p. 638. Combinatis nunc valoribus ν pro inſula Regis Georgii cum Guriefuenſi, hae prodibunt aequationes:

$$0 = 60,94 - 4,2161.\pi - 1,4830.x - 0,2768.y - 0,0490.\theta$$

$$0 = 39,99 - 4,4663.\pi - 0,0277.x - 0,0440.y + 0,0501.\theta$$

ex quibus dum pro π et x valores ſubſtituuntur, prodit:

0 = −

$0 = -1,23 - 0,0008.y - 0,049.\theta$ ſeu

$0,049\,\theta = -1,24$ et

$0 = +1,10 - 0,0126.y + 0,050.\theta$ ideoque

$0,050\,\theta = -1,00$

ex priori deducitur $\theta = -25''$ ex poſteriori vero $\theta = -20''$, quae concluſiones optime quoque inter ſe conſentiunt. Hoc autem ratiocinio, non ſolum certitudo obſeruationum in inſula Regis Georgii factarum comprobatur, ſed valor quoque parallaxis a nobis aſſumtus haud mediocriter ſtabilitur, vt taceam correctionem Longitudinis Geographicae pro hoc loco inuentam eodem argumento quaſi extra omne dubium poni.

36. Ad ſimile examen obſeruationes contactuum externorum iam quoque reuocaturi ſumus, quum autem ex iisdem ſi veritati ſupponantur congruae aliquanto maior ſequatur parallaxis ea, quam pro vera aſſumſimus; ne proinde nobis obiici queat vim ratiocinii noſtri plane corruere, ſi alia ſupponatur parallaxis, inter valores ipſius x ex contactibus externis §. 7 et 14. deductos, deſtinato conſilio binos elegimus, qui inter ſe combinati maximum praeberent valorem parallaxis. Tum vero inuenimus pro parallaxi

$\pi = 9,04 - 0,0073.y$ indeque

$x = 17,77 - 0,168.y.$

His igitur valoribus tantisper pro veris aſſumtis, quaeramus qualis ſtatui debeat correctio Longitudinis

Geographicae pro inſula Regis Georgii, quum vero ex contactibus externis ſupra §. 32. inuenerimus

$$0 = -21,34 - 0,2470.\pi + 1.5236.x + 0,2351.y + 0,1037.\theta$$

ſi heic pro π et x valores ſupra traditi ſubſtituantur, prodibit:

$$0 = +3,50 - 0,0191.y + 0,1037.\theta,$$

ideoque pro y ponendo $+8;3,35 = -0,1037.\theta$, vnde habetur $\theta = -32''$.

Facta iam combinatione valorum μ pro inſula ſaepius dicta inuentorum cum eo, quem ex obſeruatione Grenouicenſi deduximus, vtroque modo obtinebimus $\theta = -32''$, quod autem eam imprimis ob cauſſam fieri debet, quia valor x prioris claſſis, vnde quantitatem parallaxeos determinauimus ex ipſa obſeruatione Grenouicenſi erat deductus. Combinemus igitur valores μ pro inſula Regis Georgii cum valore huius litterae deducto ex contactu externo Wardhuſii obſeruato, quoniam longitudo Geographica pro Wardhus ſatis exacte videtur eſſe determinata. Quum igitur obſeruatio R. Pat. Hell praebuerit:

$$\mu = 22,52 - 1,567.\pi - 0,883.x + 0,469.y$$

inde hae binae eliciuntur aequationes:

$$0 = 57,25 - 3,578.\pi - 1,548.x - 0,278.y - 0,0514\,\theta \text{ et}$$

$$0 = 35,91 - 3,824.\pi - 0,024\,x - 0,043.y + 0,0523\,\theta$$

ex priori fit

$$0 = -2,60 + 0,009 . y - 0,0514 . \theta$$, ſeu

$$0 = -2,53 - 0,0514 . \theta$$

ex poſteriori autem

$$0 = +0,91 - 0,011 . y + 0,0523 \theta$$ ſiue

$$0 = +0,82 + 0,0523 \theta$$

prior igitur dabit $\theta = -49''$, poſterior vero $\theta = -16''$, quorum valorum diſſenſus omnino tantus eſt, vt eius rationem nullo modo reddere valeamus, niſi ſupponere velimus in momentis contactuum ad inſulam Regis Georgii obſeruatis, inſignes latere errores.

27. Nunc itaque quum elementa a nobis §. 31 ſtabilita, ſatis extra dubium collocata eſſe videantur, ſi eorum fiat ſubſtitutio in valoribus pro μ et ν inuentis, ſingularum obſeruationum aberrationes, ſaltem quam maxime probabiles aſſignare poterimus. Si enim verum tempus vniuscuiusque contactus ponatur aequale momento obſeruato $- \tau''$, valor ipſius τ facile determinari poteſt, quippe quum litteris θ et τ idem conueniat coefficiens. Quadruplicis autem generis obſeruationes, numeris maioribus I. II. III. IV. inter ſe diſtinguentes, quemadmodum in P. II. Tom. XIV. Nov. Comment: p. 483 factum eſt, ſequentes adepti ſumus valores ipſorum τ.

I. Pro Inſula Regis Georgii longitudine ſuppoſita $10^h. 7'. 22''$ verſus Occid. a Pariſiis.

	Moment. obſeru.	Moment. ver.
I. $\tau = +21$	$21^h. 25'. 40''$	$21^h. 25'. 19''$
II $\tau = -5$	44. $2\frac{1}{2}$	44. 7
III. $\tau = +4$	$3^h.$ 14. 3	$3^h.$ 13. 59
IV. $\tau = -34$	32. 14	32. 48

II. Pro arce Principis Walliae ad Sinum Hudſonis longitudine ſuppoſita $6^h. 26'. 20''$

	Moment. obſeru	Moment. ver.
I. $\tau = +1$	$0^h. 57'. 3''$	$0^h. 57'. 12''$
II. $\tau = +7$	1. 15. 24	1. 15. 17
III. $\tau = -2$	7. 0. 47	7. 0. 49
IV. $\tau = -1$	19. 21	19. 22

III. Pro caſtello Sti Ioſephi in California ſuppoſita Longitudine $7^h. 28'. 8''$.

	Moment. obſeru.	Moment. ver.
I. $\tau = +1$	$0^h. 17'. 27''$	$0^h. 17'. 26''$
II. $\tau = -4$	5. 54. 50	5. 54. 54

38. Vt de exactitudine et praeciſione valoris, quem pro parallaxi Solis adoptauimus, eo accuratius ferri queat iudicium, inquirendum erit quales errores in variis obſeruationibus ſupponi deberent, vt parallaxis data aliqua quantitate fieret maior. Si enim

enim hi errores euadant praegrandes, inde certo inferre licebit, parallaxin ad eum valorem increſcere non poſſe. Quum igitur aequatio ex qua pro inſula Regis Georgii contactibus internis adhibitis, valorem ipſius π deriuauimus ita ſe haberet:

$$0 = 96,78 - 11,289.\pi - 0,090.y$$

liquet pro parallaxi $9''$, numero abſoluto huius aequationis augmentum circiter 4, 86 tribuendum eſſe, vnde ſi haec correctio per valores x vtriusque claſſis aequaliter diſtribuatur, patet numeris abſolutis prioris claſſis addi debere $-2,43$ poſterioris vero $+2,43$. Quodſi nunc rationem errorum ſolum in obſeruationibus inſulae Regis Georgii quaerere vallemus, numerus abſolutus in aequatione valorem littarae ν pro hoc loco exhibente, augeri deberet in ratione $\frac{3}{4}$ numeri $-2,43$, id eſt incrementum caperet $= -1,82$, quam ob rem ſi denuo hic error aequaliter per vtrumque contactum internum diſtribuatur, habebimus pro contactu interno in ingreſſu $-1,82 = 0,049.\tau$ ſeu $\tau = -37''$, pro contactu vero interno in egreſſu $+1,82 = +0,050.\tau$ ſeu $\tau = +36''$, qui errores omni deſtituuntur veriſimilitudine. Sin vero parallaxis adeo ſupponeretur eſſe $10''$, vnde correctio numeri abſoluti prodiret $= 16,11$, ſi ea correctio tantum ex erroribus obſeruationum ſuper inſula Regis Georgii deriuanda eſſet, ad valorem litterae ν addi deberet $-6,04$, ex quo haberentur pro erroribus obſeruationum hi valores II. $\tau = -2'.5''$ et III. $\tau = +2'$, quod

non

non ſolum non probabile, ſed ne poſſibile quidem eſſe quiuis facile agnoſcet. Si vero ſub hypotheſi parallaxis $9''$, errorum diſtributio aequaliter fieri deberet, per omnes obſeruationes, tum pro obſeruationibus quidem in Europa factis, hos ſtatuere neceſſum eſt errores II. $\tau = + 18''$ et III. $\tau = - 18''$ pro obſeruationibus autem inſulae Regis Georgii II. $\tau = - 18''$ et III. $\tau = + 18''$. Senſus autem huius noſtri aſſerti non is eſt, quaſi inde ſequeretur, ſingulis obſeruationibus Europeicis tales errores tribuendos eſſe, quum ex ipſa rei natura perſpicuum ſit, alias plus alias vero minus a veritate deflectere poſſe, ſed ita interpretandus eſt, quod ſumma omnium errorum, quibus hae obſeruationes afficiuntur, tanta ſit, vt ſi omnes aeque aberraſſent, ſingula momenta contactuum internorum pro ingreſſu $18''$ accelerari debuiſſent, momenta autem contactuum internorum pro egreſſu tantundem retardari. Quum autem obſeruationum Europeicarum inſignem ſatis numerum conſuluerimus, in omnes probabilitatis regulas impingeret, qui credere vellet tantam aberrationem harum obſeruationum poſſibilem eſſe. Maxima vero abſurda quae ex hypotheſi parallaxis $10''$ ſequerentur, inutile eſt vt commemorem.

39. Id quod iam generatim quidem oſtendi, exemplis quoque ſpecialibus confirmare haud pigebit. Supra vidimus ex combinatione valorum ν pro Grenouico et inſula Regis Georgii, hanc deduci aequationem:

$0 = 36,$

$$0 = 36,71 - 4,4417 . \pi + 0,0242 . x - 0,0259 . y - 0,049 (\tau + \theta)$$

vbi ſi pro θ ſubſtituatur valor inuentus $-22''$, aequationi inde reſultanti

$$0 = 37,79 - 4,4417 . \pi + 0,0242 . x - 0,0259 . y - 0,049 . \tau$$

proxime ſatisfiet adhibitis pro π, x et y valoribus a nobis ſtabilitis, ita vt ſit τ quam proxime $= 0$. Si nunc ſupponamus parallaxin ſtatuendam eſſe $9''$, inuenietur correctionem numeri abſoluti poni debere $= 2,00$, ita vt prodeat $-0,049 . \tau = 2,00$, ideoque $\tau = -41''$, deſignat autem τ ſummam correctionum pro binis momentis obſeruatis. Pro parallaxi vero $10''$ numerus abſolutus aequationi noſtrae addendus, eſſet $= 6,44$ vnde $\tau = -132'' = -2'. 12''$. Similis combinatio ſi inſtituatur cum valore ν deducto ex obſeruatione Cel. *Meſſier* Pariſiis facta, haec orietur aequatio:

$$0 = 37,49 - 4,446 . \pi + 0,024 . x - 0,020 . y - 0,049 . \tau$$

pro qua valores noſtros litterarum π, x et y in vſum vocando inueniemus $\tau = -6''$. Poſita nunc parallaxi $9''$, euidens eſt numero abſoluto adhuc addi debere $2,00$ ideoque ex hoc capite prodire $\tau = -41''$, vnde totus valor ipſius τ ad $-47''$ aſſurget, pro parallaxi autem $10''$, ſumma errorum vsque ad $-2'. 18''$ increſceret. Conſideremus nunc etiam obſeruationem quandam contactus interni pro egreſſu et Gurjeſuenſi in vſum vocata habebimus vt ſupra §. 35.

 0 =

$$0 = 39{,}99 - 4{,}4663 . \pi - 0{,}0277 . x - 0{,}0440 . y + 0{,}0501 (\theta + \tau)$$

vel poſito $\theta = -22''$

$$0 = 38{,}89 - 4{,}4663 . \pi - 0{,}0277 . x - 0{,}0440 . y + 0{,}0501 . \tau$$

cui aequationi valores noſtri pro π, x et y certe ſatisfacient, ſuppoſito tantum $\tau = -3$; at ſi parallaxis eſſet $9''$, ad numerum abſolutum denuo 2, 01 eſſent addenda, ex quo iam fieret $\tau = +40''$, ideoque iunctim $\tau = +37''$. Sed quid opus eſt plura huiusmodi exempla cumulare, quum haec abunde ſufficere queant, ad euincendum, quod quantitas parallaxis Solaris nullo modo vsque ad $9''$ augeri poſſit.

40. Quum vti ſupra notauimus Aſtronomi Angli ſuper inſula Regis Georgii, diſtantiam quoque minimam centrorum Solis et Veneris obſeruauerint, occaſio hinc nobis datur examinandi, quo in pretio huiusmodi obſeruationes haberi debeant ad parallaxin Solis determinandam. Primum igitur videamus qualem obſeruatio modo memorata praebeat parallaxin, ſi cum diſtantiis minimis, ad Sinum Hudſonis, Noritoni et nouae Angliae captis conferatur. Expreſſiones autem verae diſtantiae minimae pro his locis ita erunt comparatae:

Diſtantia minima	pro
$9'\ 54'' + 1{,}361 . \pi$	Hudſons Bay
$10'.\ 3''1 + 0{,}857 . \pi$	Noriton
$9.\ 59{,}7 + 0{,}946 . \pi$	Neu-England
$10.\ 25{,}4 - 1{,}627 . \pi$	King Georg Eyland.

Ex

Ex comparatione autem vltimae cum reliquis deducitur $\pi = 10, 51$ vel $\pi = 8, 98$ vel $\pi = 9, 97$. Inſignis diſſenſus, qui inter has determinationes ſe prodit, eas iam admodum quidem dubias reddit, ne autem nimis praecipitanter iudicium tuliſſe videamur, conſiderare tantum placet, quid error vnius minuti ſecundi, ad has concluſiones immutandas valeat. Supponamus igitur pro vltimo loco diſtantiam minimam obſeruatam vno minuto ſecundo imminui debere, inueniemus autem tum pro π ſequentes valores $+ 10, 17$, $+ 8, 58$ et $+ 9, 57$. Quid autem ſi haec diſtantia duobus vel tribus ſecundis diminuenda ſit vel potius quod probabilius videtur eae pro Hudſons-Bay et noua Anglia tantundem augendae? Huiusmodi autem errores dum de menſuris diſtantiarum quaeſtio eſt, vix euitari poſſe contendo, quamuis lubenter concedam micrometris obiectiuis, omnem quae deſiderari poteſt tribuendam eſſe exactitudinem. Hoc enim in negotio, quum difficillimum omnino eſſet, inſtrumento eam conciliare poſitionem, in qua recta per centra Veneris et Solis tranſiens etiam per contactum imaginum tranſiret, fieri omnino potuit vt diſtantia limbi Veneris a limbo Solis iuſto maior ſit inuenta. Hoc ſaltem ex pluribus obſeruationibus ſuper diſtantiis marginum Solis et Veneris factis edoctus ſum, in iisdem capiendis, errores 3, 4 quin et adeo 5″ committi poſſe, cur autem huiusmodi operatio pro diſtantia minima marginum menſuranda ab omni errandi periculo eſſe deberet immunis nullam per-

Mmmm 2 ſpice-

ſpicere valeo rationem. De his autem alia occaſione fuſius agere forſan licebit, poſtquam plures diſtantiarum menſuras calculo ſubiecerimus. Interim ſi fuerint, qui ex obſeruationibus diſtantiarum minimarum, parallaxin 9″ maiorem deriuare ſategerint, ab illis merito poſtulare licebit, vt ſufficientem ſequentis quaeſtionis ſolutionem reddant: *cur probabilius ſit in obſeruationibus contactuum internorum a quinquaginta vel pluribus obſeruatoribus inſtitutis, errores ad 20″ vel adeo ad 30″ aſſurgentes ſtatuendos eſſe, quam in binis obſeruationibus diſtantiarum minimarum micrometro captis errores 3 vel 4 ſecundorum ineſſe poſſe?*

41. Quoniam compertum habemus plurimos in ea eſſe ſententia, atmoſphaeram Veneris, aliquid efficere valuiſſe, ad durationem tranſitus imminuendam, neceſſum quoque duximus, quid ea de re cogitemus breuiter exponere. Primum vero obſeruamus de hoc effectu nihil tuto iudicari poſſe, niſi tam correctio latitudinis pro Venere quam Semidiametri Solis exacte fuerit determinata. Vt autem hypotheſin eligamus effectui atmoſphaerae fauentem, ponamus correctionem latitudinis eſſe tantum 5″, adeo vt ſit valor litterae $y = 5$, quum igitur inventum ſit eſſe

$$y = 8,76 + 1,55.\lambda \text{ et } \mu - \nu = -0,91 - \tfrac{1}{11}\lambda,$$

hinc

hinc deducitur

$$\lambda = \frac{\mu + \nu}{2} = -2, 43 \text{ et } \frac{\mu - \nu}{2} = -0, 37,$$

vnde

$$\mu = -2, 80 \quad \text{et } \nu = -2, 06.$$

Ponamus iam ſemidiametrum Solis eſſe $= 947''$ vt ex menſuris Cel. *de la Lande* ſequitur, ſemidiametrum autem Veneris $= 28'', 6$ et pro contactu externo habebimus diſtantiam centrorum $975'', 6$, pro contactu autem interno $= 918'', 4$, quum autem ex calculis noſtris pro contactu externo ſit $= 976'' + \mu = 973'', 20$, et pro interno $918'' + \nu = 915'', 94$; euidens hinc fit effectum refractionis ſub hac hypotheſi pro contactu externo eſſe $- 2, 4$ et pro interno $- 2, 5$ circiter. Hinc autem deduceretur, ob effectum refractionis, contactum externum $46''$, internum vero $50''$ ad tempus coniunctionis appropinquari. Si vero magis placuerit cum Aſtronomis Anglis diametrum Solis ſtatuere tantum $= 945'', 5$ effectus refractionis pro contactu externo erit $= - 0, 90$ et pro contactu interno $= - 0, 96$, ideoque contactus externus hinc $17''$, internus vero $19''$ verſus tempus coniunctionis promouebitur. Ex his igitur liquet adhuc dum nihil certi de effectu atmoſphaerae Veneris pronuntiari poſſe, imprimis quum nondum ſufficientes praeſto ſint rationes, ex quibus concludere poſſemus valorem litterae y multum infra $7'', 8$ deprimi debere. Per ſe autem patet valores a nobis aſſumtos litterarum y, μ et ν ita eſſe

comparatos, vt effectui ex atmoſphaera Veneris orituro nullus relinquatur locus, niſi forſan valor ſemidiametri Solis aliquantum immutandus eſſet. Negare quidem non volumus Venerem atmoſphaera praeditam eſſe, vtrum vero haec atmoſphaera ſenſibilem exſerere valeat effectum, ad ipſam durationem tranſitus imminuendam, quaeſtio eſt, de qua nimis praeceps fertur iudicium, antequam certiſſimis rationibus euictum ſit, quinam valores latitudini Veneris Geocentricae atque diametris Solis et Veneris reapſe competerunt.

42. Quisquis argumenta noſtra, quibus inducti parallaxin Solis horizontalem pro tempore tranſitus A. 1769, 8'', 55 eſſe collegimus, rite examinare et ponderare voluerit, facile nobis concedet hanc determinationem a veritate multum deflectere non poſſe. Quamuis igitur diffiteri nolim, hunc valorem correctionem vnius vel alterius partis centeſimae ſecundi admittere poſſe, pro certo tamen perſuaſum mihi habeo, veram quantitatem parallaxeos Solis horizontalis pro tempore tranſitus, intra limites 8'', 4 et 8'', 6 contineri, adeo vt vtcunque res ceciderit, noſtra determinatio vltra partem decimam minuti ſecundi a veritate aberrare nequeat. Quicquid vero de hac incertitudine ſit, euidenter ſatis patet, eam vllis defectibus Methodi a nobis in vſum vocatae adſcribi non poſſe, quum in excellentiſſima hac Methodo, ad omnes correctiones latitudinis et longitudinis Veneris Geocentricae, nec non diame-

diametrorum vtriusque aſtri, ſcrupuloſe attentio facta ſit, ſecus omnino ac fieri ſolet in Methodis ab Aſtronomis communiter receptis, dum ex duarum eiusdem nominis obſeruationum comparatione parallaxin Solis eruere conantur, correctionibus modo dictis plane neglectis. Ne autem haec gratis aſſeruiſſe videamur, combinemus inter ſe valores pro ν deductos ex contactu interno pro ingreſſu Stockholmiae et ſuper inſula Regis Georgii obſeruato.

Pro priori loco habetur

$$\nu = 4,25 - 2,4700.\pi + 0,6514.x + 0,7587.y$$

pro poſteriori autem

$$\nu = -32,73 + 1,9409.\pi + 0,6235.x + 0,7818.y$$

ſubtracto igitur hoc ab illo oritur

$$0 = 36,98 - 4,4109.\pi + 0,0279.x - 0,0231.y.$$

Si nunc methodo apud Aſtronomos conſueta, valores correctionibus x et y affectos plane negligamus, habebitur $\pi = 8'', 38$, quum tamen valoribus ipſorum x et y in vſum vocatis prodire deberet $= 8'', 45$. Multo autem maiores diſſenſus metuendi ſunt, cum coefficiens ipſius π non adeo fuerit inſignis ac in exemplo allato. Sic facta comparatione valorum ν ex contactu interno circa egreſſum ad ſinum Hudſonis et ſuper dicta inſula Regis Georgii obſeruato, haec inuenietur aequatio:

$$0 = 17,13 - 1,9496.\pi - 0,0267.x - 0,0423.y$$

vnde

vnde neglectis x et y oritur $\pi = 8'', 79$, iis vero in computum ductis $\pi = 8'', 40$. Quamuis vero neuter horum valorum veritati exacte congruat, inde minime tamen inferre licebit, ſine vllo errore quantitates correctionibus x et y affectos negligi poſſe, quum errores obſeruationum in cauſſa ſint, cur genuina etiam Methodo adhibita valor inueniatur parallaxeos, a veritate nonnihil diſcrepans.

ELEMEN-

ELEMENTA ASTRONOMICA THEORIAE VENERIS DEDVCTA EX OBSERVATIONE TRANSITVS VENERIS SVB SOLE AD SINVM HVDSONIS, CALIFORNIAE ET IN INSVLA REGIS GEORGII INSTITVTA.

Auctore

W. L. KRAFFT.

§. 1.

Obſeruationes coniunctionum eclipticarum Veneris cum Sole, praeter principalem ſuum in definienda parallaxi Solis horizontali vſum, etiam cognitionem motuum huius planetae inſigniter perficiunt. Summi enim in Veneris theoria momenti elementa aſtronomica, tempus verum coniunctionis, longitudo et latitudo Veneris geocentrica, diſtantia centrorum minima, locus nodi lineaeque nodorum motus annuus, ex iis ſumma cum praeciſione deriuantur, diametri quoque Veneris adparentis vera quantitas per ingreſſus in diſcum ſolarem vel ex eodem egreſſus moram tanta cum exactitudine poteſt definiri, quantam ex dimenſionibus micrometro vulgari captis obtinere vix licet. Inprimis autem his diſquiſitionibus idoneae ſunt obſeruationes illorum locorum, vbi totam tranſitus durationem conſpicere licuit,

ex quibus quippe ſubtenſae a Venere in Solis diſco percurſae tota longitudo immediate innoteſcit. Cum itaque Veneris anno 1769 in Sole viſae tres iſtiusmodi completae obſeruationes ad Academiam ſint tranſmiſſae; eas pro ſtabiliendis iſtis elementis hic ad examen reuocare placuit.

§ 2. Ante omnia haec inueſtigatio ſummam in aſſignandis motibus Veneris horariis praeciſionem poſtulat, quandoquidem ex iis orbitae apparentis inclinatio definitur. Cum itaque ad tempus coniunctionis ſit Veneris anomalia media 10ˢ. 4°. 42′. 15″; excentrica 10ˢ 5° 1′. 54″; vera 10ˢ. 5°. 21′. 30″; motus Veneris horarius medius ex eius reuolutionibus cognitus 4′. 0″. 32; motus denique horarius Solis 2′. 23″. 50; iſti motus ſecundum methodum a Cel. *La Lande* in Comment. Acad. Pariſinae anni 1761. expoſitam computati ita deprehenduntur expreſſi:

Motus Veneris horarius heliocentricus.

in orbita . . .	3′. 58″. 40.	Inclinatio orbitae Veneris
in ecliptica . .	3′ 57″. 98	relatiuae 8° 28′. 54″ Mo-
in latitud.	14″ 09.	tus ♀ horar. in orbita ap-
a Sole	94″. 48.	parente 95″. 52.

Ex his motibus in ratione diſtantiarum Veneris a terra et ſole auctis colliguntur

Motus horarii geocentrici.

in ecliptica	3′. 57″. 54
in orbita relatiua . . .	4′. 0″. 16
in latitudinem	35″. 42.

§. 3.

§. 3. Conſtitutis his, pro ſingulis obſervationum momentis effectus parallaxis ſolis in accelerando vel retardando contactu viſo ab eo, qui pro ſpectatore in centro telluris conſtituto locum haberet, ſunt indagandi; quos in hypotheſi parallaxis ſolis horizontalis $= 8''. 55$ vna cum temporibus veris ſingularum obſeruationum ſubiuncta tabula repraeſentat.

I. Ad Sinum Hudſonis.

	Temp. ver.	Effectus parall.	ergo pro centro terrae
Cont. I.	$0^h. 57'. 1''$	$3'. 46''. 8$ Accel.	mora ingreſſus $18'. 50''$
. . . . II.	$1^h. 15'. 25''$	$4'. 12''. 9$ ——	—— egreſſus $18'. 43''$
. . . III	$7^h. 0'. 49''$	$0'. 39''. 4$ ——	duratio totius tranſitus
. . . IV.	$7^h. 19'. 21''$	$0'. 50''. 9$ ——	inter contactus internos
			$5^h. 41'\ 50''$.

II Pro California.

Cont. II.	$0^h. 17'. 27''$	$0'. 17''\ 2$ Accel.	duratio tranſitus
. . . III.	$5^h. 54'. 50''$	$4'\ 49''. 9$ ——	$5^h. 41'. 55'', 7$

III. Pro Inſula Regis Georgii.

Cont. I.	$21^h. 25'. 40''$	$5'. 33''\ 4$ Retard.	mora ingreſſus $18'\ 19''$
. . . II.	$21^h. 44'. 2''$	$5'. 36''. 4$ ——	—— egreſſus $18'. 5''$
. . . III.	$3^h. 14'. 3''$	$6'. 17''. 5.$ Accel	duratio tranſitus
. . . IV.	$3^h. 32'. 14''$	$6'. 11''. 7.$ ——	$5^h. 41'. 58''$

§. 4. Principio igitur vt ex his obſeruationibus ſemidiameter Veneris adparens, in ſequentibus vſui futura, innoteſcat; ſtatuatur centrorum Veneris

et Solis diſtantia minima = 607″, qualis ex tabulis Hallejanis reperitur. Hac aſſumta, et poſita Veneris ſemidiametro = 32″, quae eſt maxima eius quantitas, quam aliquot Cel. Abbatis de *Chappe* obſeruationes anno 1761 Tobolski inſtitutae dederunt, mora ingreſſus vel egreſſus geocentrica deprehenditur 20′. 51″; quae ſi cum mora ex ſingulis obſeruationibus deducta comparetur, prodit

ex obſeruatione		ſemidiam Veneris
Ad ſinum Hudſonis	per ingreſſum ...	28″.90
	per egreſſum	28″.73
In inſula Reg. Georgii	per ingreſſum ...	28″.11
	per egreſſum ...	27″.75
	Medium	28″.39.

Verumtamen cum in vltima hac obſeruatione mora egreſſus 18′. 5″ nimis parua ſit; ea errorem in alterutro contactu obſeruato arguere videtur; et cum inſuper etiam de contactu externo in ingreſſu non leuis ſit dubitandi ratio, aliunde ſeſe manifeſtans; ſumto ex duabus prioribus determinationibus medio, ſemidiameter Veneris tutius ſtatuitur 28″ 8; quae inſuper, quando diſtantia centrorum minima adcuratius innotuerit, etiam maiori cum praeciſione poterit definiri.

§. 5. Cum igitur ſolis ſit ſemidiameter = 15′ 47″ 0 erit ſemidiametrorum differentia 918″. 2. Dimidia autem duratio tranſitus geocentrici inter contactus internos in prima obſeruatione 2ʰ. 50′. 55″

ope

ope motus horarii Veneris in orbita relatiua in partes circuli conuerſa praebet ſemichordae a Venere in diſco Solis deſcriptae longitudinem ſemidiametro Veneris minutam 11′. 24″. 1, vnde colligitur longitudo perpendiculi ex centro ☉ in iſtam ſubtenſam ducti ſeu diſtantia centrorum minima

Ex obſeru I. per contact. internos . . . 10′. 12″.4

et ſimili calculo

Ex obſeru. I. per contact. externos . . . 10′. 13″.0
Ex obſeru. II. . . . . intern. . . . . 10′. 12″.3
Ex obſeru. III. . . . . intern. . . . 10′. 12″.2
- - - - III. . . . . extern. . . . 10′. 15″.9

quae vltima determinatio cum a ceteris 3″ diſcrepet, in contactu alterutro externo obſeruato errorem arguit; vnde ſtatuere licet diſtantiam centrorum minimam = 10′. 12″. 5. Hac igitur poſita, reperitur, ſi ſemidiameter Veneris foret 32″, mora ingreſſus vel egreſſus geocentrica = 20′. 58″; vnde ex his obſeruationibus colligitur, ſumto medio, Veneris ſemidiameter apparens = 28″. 6. hincque diameter eius in diſtantia aequali diſtantiae mediae Solis a terra = 16″. 5. Poſita ergo parallaxi Solis horizontali pro tempore harum obſeruationum = 8″. 55 adeoque pro diſtantia Solis media = 8″. 68; qualis quippe ex calculis tam in praecedenti, quam in hoc Tomo Commentariorum ſumma cum praeciſione eſt definita; colligitur ratio voluminum Veneris et terrae 8586 : 10000; de qua quantum inter ſe diſſenſerint Aſtronomi, videre li-

cet in Comment. Acad. Pariſinae anni 1762. pag. 261 et 491.

§ 6. Per hanc diſtantiam centrorum minimam et angulum inclinationis orbitae apparentis = 8°. 28′. 54″ ſtatim reperitur pro ipſo coniunctionis momento Latitudo Veneris geocentrica 10′. 19″. 4; et diſtantia inter punctum coniunctionis et medii tranſitus 1′. 31″. 3 ſiue in tempore 22′. 49″ 5; quibus a tempore vero medii tranſitus geocentrici ſubtractis colligitur

Tempus verum coniunctionis ſub meridiano obſeruatorii.

Ad ſinum Hudſonis	3^h. 47′. 44″
In California	2^h. 45′. 51″
In Inſula Regis Georgii . .	0^h. 6′. 35″.

Obſeruatorii Cel. *Abbatis de Chaſſe* in California Longitudo a Lutetiis Pariſiorum in nouellis publicis aſſignata eſt 7^h. 28′. 17″ verſus occidentem; Non quidem conſtat, ex qualibus obſeruationibus ea ſit deducta; ſuppoſito tamen, eam, ne circulus committatur, non eſſe ex ipſa Veneris obſeruatione computatum eamque tantisper pro vera aſſumendo, colligitur coniunctionis ♀ cum ☉ 1769. Iun. 3.

Tempus verum Pariſinum	10^h. 14′. 8″
Temp. med.	10^h. 11′. 55″

atque hinc differentia meridianorum a Pariſiis

Arcis

Arcis Principis Walliae . . . . . $6^h. 26'. 24''$
Obſeruatorii in inſ. Georgii . . . $10^h. 7'. 33''$.

§. 7. Reperitur iam, his conſtitutis, ex tabulis Cel. *de la Caille* pro ipſo coniunctionis momento longitudo Veneris geocentrica $= 2^s. 13^\circ. 27'. 21''$. Latitudo vero geocentrica ſupra inuenta $= 10' \; 19''.4$ Latitudinem praebet heliocentricam $= 4'. 6''$ hinc ob inclinationem orbitae ad eclipticam $= 3^\circ. 23'. 20''$ concluditur arcus heliocentricus inter punctum Nodi et coniunctionis $= 1^\circ. 9'. 20''$; ex quo pro tempore coniunctionis prodit Longitudo heliocentrica Nodi deſcendentis $8^s. 14^\circ. 36'. 41''$, per quem Venus tranſiit Iun. $4^d. 3^h. 40'. 55''$ temp. Pariſino medio.

§ 8. Ex Latitudine Veneris geocentrica $9'. 37''$, in tranſitu eius per Solem anno 1761. obſeruata inueni eius a Nodo diſtantiam $1^\circ. 3'. 46''$; hinc cum ſecundum calculos Cel. *de la Lande* (Mem. de Paris 1761. pag. 336.) momento coniunctionis fuerit Veneris Longitudo heliocentrica $8^s. 15^\circ. 36'. 11''$, concluditur Longitudo Nodi deſcendentis $8^s. 14^\circ. 32'. 25''$. Hoc ergo temporis interuallo, quod eſt $7^{an.\ comm.} + 362^d. 16^h. 22'$, motus lineae Nodorum Veneris deprehenditur $4'. 16''$; vnde prodit motus annuus reſpectu aequinoctiorum $32''. 03$; ſiue $- 18''. 30$ reſpectu fixarum, poſita nempe aequinoctiorum praeceſſione annua $= 50''. 33$. Haec determinatio $- 18''. 3$ ab ea, quam Cel. *la Lande* ex theoria attractionis vniuerſalis deduxit, differt quantitate $2''. 1$.

§. 9.

§. 9. Si elementa hactenus inueſtigata cum iis, quae in praecedenti Tomo Commentariorum pag. 556. ſunt expoſita, conferantur; non niſi in tempore coniunctionis diſcrimen 16″ deprehendetur, quod vero potiſſimum a praeciſione pendet, qua Longitudo Caſtelli St. Ioſephi in California eſt determinata.

Interim igitur iſta elementa heic in conſpectu ita exhiberi conuenit:

Temp. Pariſino medio 1769. Iun. $3^d. 10^h. 11'. 55''$		Differentia a tabulis Halleianis	Caſſinianis
Longit. ♀ helioc.	$8^s. 13°. 27'. 21''$	$+ 1'. 3''$	$+ 0'. 4''$
Lat. helioc.	$4'. 6''$		
Diſt. centr. min.	$10' 12''.6$	$+ 6''$	$- 7''$
Long. Nodi aſcend.	$2^s. 14°. 36' 41''$	$+ 2'. 56''$	$- 1'. 54''$
Mot. Nodi ſecul.	$53'. 23''$	$+ 1'. 43''$	$- 3'. 17''$
Diameter ♀ in diſt ⊙ media	$16''.5$		
Ratio voluminum Veneris et terrae	8586 : 10000.		

Venus per Nodum deſcendentem tranſiit temp. Pariſino medio 1769. Iun. $4^d. 3^h. 40'. 55''$.

§. 9. Ad ſemidiametrum Veneris quod attinet; menſurae aliquot micrometris obiectiuis captae cum determinatione §. 5. tradita optime conſentiunt. Eſt enim ea ex obſeruationibus *Noritoni* in Penſyl-

Penſyluania factis; ſumto medio 28″. 5; Petropoli 28″. 5; Ponoi 28″. 6.

Diſtantia vero centrorum minima, quam ſupra §. 5. inueni 10′. 12″. 5, per micrometra obiectiua non maior, quam 10′. 10″ vel ad ſummam 10′. 11″ eſt deprehenſa, poſita ſemidiametro Solis 15′. 47″. Cel. *La Lande* vt conſenſum inter concluſiones ex duratione deductas et immediatas menſuras obtineat, diametrum Solis aliquot minutis ſecundis minuendam cenſet: vnde prodiret diſtantia centrorum minima 10′. 7″ vel 10′. 8″. Fortaſſis vero ratio diſſenſus inter geminas iſtas determinationes potius in atmoſphaera Veneris quaerenda videtur.

TENTAMEN ORBITAE VENERIS EXCENTRICITATEM ET APHELIVM, HVIVSQVE MOTVM ANNVVM DEFINIENDI.

Auctore

W. L. KRAFFT.

§. 1.

Orbitarum, in quibus feruntur planetae, excentricitatibus, locis apheliorum, horumque annuis motibus definiendis eae prae ceteris accommodatae ſunt obſeruationes, quae in principalibus orbitarum punctis, apſidibus et diſtantiis mediis, ſunt inſtitutae. Ex tribus huiuscemodi obſeruationibus inter ſe combinandis excentricitatem et aphelii poſitionem determinandi, ea inter reliquas eminet methodus, quam in Comment. Acad. Pariſinae theoriae Solis et Martis a Celeb. Aſtronomis *La Caillio* et *La Landio* legimus adplicatam; quae vero praeter motum planetae medium annuam quoque apheliorum praeceſſionem tanquam calculi elementa ſumma cum praeciſione ſupponit cognita. Motuum quidem mediorum ſatis exactam cognitionem Aſtronomorum debemus vigiliis, qui contra in aſſignandis

dis apheliorum motibus notabiliter a ſe inuicem diſcrepant. Id intuens operae pretium duxi periculum facere, annon modo laudata methodus eo vsque poſſit perfici, vt motus quoque apheliorum annui quantitatem patefaciat, quod tentamen Veneris theoriae adplicatum leuiter hic adumbrare conſtitui.

§. 2. Obſeruationes, quibus in hac disquiſitione vſus ſum, ſequenti tabula complector:

	1715. Ian.	1716. Aug.
Temp Pariſ. med.	$26^{d}. 8^{h}. 34'. 0''$	$28^{d}. 16^{h}\ 36'\ 42''$
Loc. ♀ helioc. in eclipt.	$4^{s}. 6^{\circ}. 22'. 58''$	$11^{s}.\ 5^{\circ}. 49'.\ 2''$
Reduct. ad orbit.	$+\ 2'. 55''$	$+\ 0'\ 51''$
Loc. ♀ in orbit.	$4^{s}. 6^{\circ}. 25'. 53''$	$11^{s}.\ 5^{\circ}\ 49'. 53''$
	♀ prope perih.	♀ prope aphel.

	1718. April	1769. Iun.
Temp. Pariſ. med.	$8^{l}. 10^{h}. 15'. 11''$	$3^{d}. 10^{h}. 11'. 39''$
Loc. ♀ helioc. in eclipt.	$6^{s}. 18^{\circ}. 42'. 13''$	$8^{s}. 13^{\circ}. 27'. 20''$
Reduct. ad orbit.	$-\ 2'. 49''$	$+\ 0'.\ 7''$
Loc. ♀ in orbit.	$6^{s}. 18^{\circ}. 39'\ 24''$	$5^{s}. 13^{\circ}. 27'. 27''$
	♀ prope diſt. med.	♀ prope diſt. med.

§ 3. Statuto iam motu Veneris annuo medio $7^{s}. 14^{\circ}. 47'. 29''$; pro ſingulis harum obſeruationum interuallis motus Longitudinis mediae poſſunt computari, qui vna cum motibus Longitudinis verae ex obſeruationibus deductis ita ſe habere deprehenduntur:

	Pro Interuallo I^mo 1715-1716.	II^do 1715-1718.	III^tio 1715-1769
Motus long. med.	$6^s.29^\circ.47'.41'',8$	$2^s.11^\circ.26'.42'',5$	$4^s.6^\circ.20'.50'',6$
- - - long. verae	$6^s.29^\circ.24'.0''$	$2^s.12^\circ.13'.31''$	$4^s.7^\circ.1'.34''$.

§ 4. Pro tempore primae noſtrae obſeruationis colligitur:

	ex tabul. Halleianis	reuera vero
Longit. aphelii	$= L = 10^s.6^\circ.45'.39''.5$	$= L + dL$
Mot. aphel. annuus	$= \mu = 56''.53$	$= \mu + d\mu$
Excentricitas	$= \varepsilon = 0,00698$	$= \varepsilon + d\varepsilon$
poſita diſtantia med. $= 1$.		

vbi iam negotium in eo verſatur, vt valores harum correctionum dL, $d\mu$ et $d\varepsilon$ ex obſeruationibus definiantur.

§. 5. Hunc in finem pro ſingulis interuallis quatuor fingantur hypotheſes, in quarum prima elementa Halleiana modo allata aſſumuntur, in ſecunda vero tertia et quarta vel longitudini aphelii vel excentricitati vel motui aphelii annuo arbitraria augmenta tribuuntur; quo fit, vt ex errorum variationibus inde oriundis aequationes analyticae incognitas illas dL, $d\varepsilon$ et $d\mu$ inuoluentes formari queant, quibus ſatisfieri debet, vt errores illi penitus deſtruantur. Non immoror hic demonſtrationi duorum theorematum, quibus calculi ſequentes ſuperſtruuntur; nempe poſitis anomaliis vera $= v$, excen-

centrica $= e$; media $= m$; diſtantia aphelii $= a$; perihelii $= p$; excentricitate $= \varepsilon$; fore

$$\sqrt{\tfrac{a}{p}}.\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}v = \text{tang.}\tfrac{1}{2}e;\ \text{et}\ m = e + \varepsilon\,\text{ſin.}e.$$

§. 6. Calculus ergo interualli primi ita ſe habet:

Hypotheſis I^{ma} Aſſumantur elementa Halleiana L; ε; μ; quibus poſitis huic interuallo competit motus aphelii $= 1'. 28''. 2$ adeoque ex §. 3. motus anomaliae verae $= 6^s. 29°. 22'. 31''. 8$ et motus anomaliae mediae $= 6^s. 29°. 46'. 13''. 6$. Erit porro ob L $= 10^s. 6°. 45'. 39''. 5$, in obſeruatione

	Anom. vera
I^{ma}	$5^s. 29°. 40'. 13''. 5$
adeoque in II^{da}	$0^s. 29°. 2'. 45''. 3.$

Quodſi iam per aequationes § praecedente allatas, pro quibus in hac hypotheſi habetur

Log. $\sqrt{\tfrac{a}{p}} = 0,0030314$; et Log. $\varepsilon = 3,1582805$,

computentur reſpondentes his anomaliis veris anomaliae excentricae et mediae; eae ita reperiuntur expreſſae

	Anom. excentr.	Anom. med.
I.	$5^s. 29°. 40'. 21''. 2$	$5^s. 29°. 40'. 29''. 4$
II.	$0^s. 29°. 14'. 26''. 2$	$0^s\ 29°. 26'. 9''. 4$
	Adeoque mot anom med. =	6 29. 45. 40. 0
	qui cum debebat eſſe =	6. 29. 46. 13. 6

prodit error huius hypotheſeos $= -0'. 33''. 6$.

Hypotheſis IIda. Statuantur nunc elementa $L + 1^\circ\ 0'.\ 0''$; ε; μ; quibus poſitis erit

	Anom. vera	reſpondens Anom. med.
I.	$5^s.\ 28^\circ.\ 40'.\ 13''.\ 5$	$5^s.\ 28^\circ.\ 41'.\ 19''.\ 6$
II.	$0^s.\ 28^\circ.\ 2'.\ 45''.\ 3$	$0^s.\ 28^\circ.\ 25'.\ 25''.\ 1$

ergo mot. anom. med. $= 6^s.\ 29^\circ.\ 44'.\ 5''.\ 5$
atque error ſecundae hypotheſeos $= -2'.\ 8''.\ 1.$

Hypotheſis IIItia. Augeatur nunc, retentis L et μ, excentricitas particulis 0,00017; vt ea ſit 0,00715, qualis in tabulis Caſſinianis ſtatuitur; eritque in hac hypotheſi

$\text{Log.}\sqrt{\frac{a}{p}} = 0,0031035$; et $\text{Log.}\,\varepsilon = 3,1687311$

et in obſeruatione

	Anom. vera	reſpond. Anom. med.
I.	$5^s.\ 29^\circ.\ 40'.\ 13''.\ 5$	$5^s.\ 29^\circ.\ 40'.\ 29''.\ 8$
II.	$0^s.\ 29^\circ.\ 2'.\ 45''.\ 3$	$0^s.\ 29^\circ.\ 26'.\ 43''.\ 5$

motus anom. med. $= 6^s.\ 29^\circ.\ 46'.\ 13''.\ 7$
adeoque error hypotheſeos $= +0'.\ 0''.\ 1.$

Hypotheſis IVta. Retentis L et ε; ad motum aphelii annuum $56''.\ 53$, addantur $29''.\ 47$ vt ſit $1'.\ 26''$, qualis a Cel. Caſſini ſtatuitur; quo poſito huic interuallo competit motus aphelii $= 2'.\ 16''.\ 3$ adeoque ex §. 3. motus anomaliae verae $= 6^s.\ 29^\circ.\ 21'.\ 43''.\ 7$ et mediae $= 6^s.\ 29^\circ.\ 45'.\ 25''.\ 5$. Eſt porro in obſeruatione

Imw

	Anom. vera	reſpondens Anom. med.
I^{ma}	$5^s. 29^\circ. 40'. 13''. 5$	$5^s. 29^\circ. 40'. 29''. 4$
II^{do}	$0^s. 29^\circ. 1'. 57''. 2$	$0^s. 29^\circ. 25'. 21''. 0$

ergo motus anom. med. $= 6^s. 29^\circ. 44'. 51''. 6$
atque error hypotheſeos $= - 0'. 33''. 9$.

§. 7. Cum igitur error primae hypotheſeos $= - 0'. 33''\ 6$, addito ad epocham aphelii vno gradu abierit in hunc $- 2'. 8''. 1$ adeoque auctus ſit quantitate $94''. 5$, idem error, ſi epocha aphelii augeatur quantitate dL variationem patietur $=$, $0,02625 . dL$. Simili modo colligitur

ob incrementum	variatio erroris
excentricitatis $= d\varepsilon$	$- 1,9823 . d\varepsilon$
motus aphelii $= d\mu$	$+ 0,0102 . d\mu$

quae variationes cum iunctim ſumtae totum iſtum errorem $- 0'. 33''. 6$ deſtruere debeant; primum interuallum hanc nobis ſuppeditat aequationem

$$-33''.6 = +0,02625 . dL - 1,9823 . d\varepsilon + 0,0102 . d\mu.$$

§. 8. Calculi pro interuallo II^{do} inter obſervationem primam et tertiam potiora elementa ſuccincte ita exhibeo.

Hypo-

Hypotheſis	I^{ma} L ; ε ; μ ;	II^{da} L + 1° ; ε ; μ
Mot. aph. intervallo competens	3′. 0″	3′. 0″
Mot. anom. med		
ex obſeru.	2^s. 11°. 23′. 42″. 5	2^s. 11°. 23′. 42″. 5
ex calc.	2^s. 11°. 24′. 43″. 8	2^s. 11°. 24′. 10″. 2
Error	+ 1′. 1″. 3	+ 0′. 27″. 7

Hypotheſis	III^{tia} L ; ε + 17 ; μ	IV^{ta} L , ε ; μ + 30″
Mot. aph. intervallo competens	3′. 0″	4′. 34″. 8
Mot. anom. med.		
ex obſeru.	2^s. 11°. 23′. 42″. 5	2^s. 11°. 22′. 7″. 7
ex calc.	2^s. 11°. 23′. 37″. 5	2^s. 11°. 23′ 9″ 6
Error	− 0′. 5″. 0	+ 1′. 1″. 9

quare ex ſecundo hoc interuallo hanc adipiſcimur aequationem:

$$+61''.3 = +0,00933.\,dL + 3,9000.\,d\varepsilon - 0,0204.\,d\mu.$$

§. 9. Eodem modo calculum pro tertio intervallo inter obſeruationem primam et quartam ita in compendio exhibeo:

Hypo-

Hypotheſis.	I^{ma} L ; ε ; μ	II^{da} L+1 ; ε ; μ
Mot. aphelii pro hoc interuallo	51′. 10″.0	51′. 10″.0
Mot. anom. med.		
ex obſeru.	4ˢ. 5°. 29′. 40″. 6	4ˢ. 5°. 29′. 40″. 6
ex calc.	4ˢ. 5°. 31′. 6″. 9	4ˢ. 5°. 29′. 47″. 9
Error	+ 1′. 26″. 3	+ 7″. 3

Hypotheſis.	III^{tia} L ; ε+17 ; μ	IV^{ta}. L ; ε ; μ+30″
Mot. aphelii pro hoc interuallo	51′. 10″.0	1°. 17′. 54″. 3
Mot. anom. med.		
ex obſeru.	4ˢ. 5°. 29′. 40″. 6	4ˢ. 5°. 2′. 56″. 3
ex calc.	4ˢ. 5°. 30′. 9″. 4	4ˢ. 5°. 4′. 9″. 7
Error	+ 0′. 28″. 8	+ 1′. 13″. 4

ex tertio itaque interuallo ſequens reſultat aequatio:

$$+86''.3 = +0,02194.\,dL + 3,3823.\,d\varepsilon + 0,4377.\,d\mu.$$

ex quarum trium aequationum reſolutione correctiones d L, $d\varepsilon$, $d\mu$ epochae aphelii excentricitati et motui aphelii Halleianis adplicandas determinabimus.

§. 10. Statim ergo colligitur ex aequatione

I^{ma}. $dL = -1280 + 75,518.\,d\varepsilon - 0,338.\,d\mu$

II^{da}. $dL = +6568 - 417,857.\,d\varepsilon + 2,181.\,d\mu$

III^{tia}. $dL = +3932 - 154,140.\,d\varepsilon - 19,947.\,d\mu$

 at-

atque hinc porro

$$0 = +7848 - 493,375 \cdot d\varepsilon + 2,519 \cdot d\mu \text{ et}$$
$$0 = +5212 - 229,658 \cdot d\varepsilon - 19,559 \cdot d\mu$$

quae vlterius reſolutae praebent

$$d\varepsilon = +15,907 + 0,0051 \cdot d\mu \text{ et}$$
$$d\varepsilon = +22,694 - 0,0852 \cdot d\mu$$

vnde perſpicitur, motum aphelii annuum Halleianum notabili correctione indigere; proditque

$$d\mu = +75''.16 ;\ d\varepsilon = +16 ;\ dL = -1'.15''$$

quibus correctionibus admiſſis habetur

1715. Ian. 26^d. Loc. aphelii $10^s.6^\circ.44'.24''$
Motus aph. annuus $2'.11''.69$
Excentricitas orbitae 0, 00714.
poſita diſtantia media = 1.

§. 11. Haec vero elementa quatuor noſtris obſeruationibus exacte ſatisfacere, ex ſequenti calculo patet: Poſito motu aphelii annuo $= 2'.11''.69$, colligitur per §. 3. pro interuallo

	Mot. aphelii	Mot. anom. verae	Mot. anom. med.
I^{mo}.	$3'.35''.4$	$6^s.29^\circ.20'.34''.6$	$6^s.29^\circ.44'.15''.3$
II^{do}.	$6'.59''.3$	$2^s.12^\circ.6'.31''.7$	$2^s.11^\circ.19'.43''.3$
III^{tio}.	$1^\circ.59'.11''.7$	$4^s.5^\circ.2'.22''.3$	$4^s.4^\circ.21'.38''.9$

Hinc ergo, cum tempore primae obſeruationis inventus ſit locus aphelii $10^s.6^\circ.44'.24''$ ſequentes formabuntur anomaliae verae, quibus reſpondentes ano-

anomalias medias ſecundum formulas §. 5. computatas adiungo:

	Anom. verae	Anom. med.	Mot. anom. med. ex calculo	Error
I.	$5^s.29^\circ.41'.29''$.	$5^s.29^\circ.41'.45''$	$6^s.29^\circ.44'.15''$	$-0''.4$
II.	$0^s.29^\circ.\ 2'.\ 3''.6$	$0^s.29^\circ.26'.\ 0''$	$2^s.11^\circ.19'.43''$	$-0''.3$
III.	$8^s.11^\circ.48'.\ 0''.7$	$8^s.11^\circ.\ 1'.28''$	$4^s.\ 4^\circ.21'.39''$	$-0''.0$
IV.	$10^s.\ 4^\circ.43'.51''.3$	$10^s.\ 4^\circ.\ 3'.24''$		

qui conſenſus praeciſionem horum elementorum, quatenus his quatuor obſeruationibus ſatisfaciunt, abvnde probat.

§ 12. Incrementa iſta anomaliae mediae minimo anomaliae verae vel excentricitatis augmento reſpondentia etiam generaliter ope differentiationis aequationum §. 5. traditarum exprimere licet. Poſitis enim augmentis anomaliae verae $= dv$; excentricitatis $= d\varepsilon$ et anomaliae mediae $= dm$, colligitur

$$dm = dv.\ \frac{(1-\varepsilon^2)\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}{(1-\varepsilon.\,co.\,v)^2} \text{ et}$$
$$dm = d\varepsilon.\ \sqrt{(1-\varepsilon^2)}.\ \frac{\text{ſin.}\,v\,(2-\varepsilon.\,\text{coſ.}\,v)}{(1-\varepsilon.\,\text{coſ.}\,v)^2}$$

Ita ſi ſtatuatur excentricitas Halleiana 0,00698, et augmentum epochae aphelii $= 3600''$; erit $dv = -3600''$; adeoque $dm = -\frac{3509''.7}{(1-\varepsilon.\,\text{coſ.}\,v)^2}$. Cum igitur verbi cauſſa in hypotheſi prima interualli primi fuerit $v = 5^s.29^\circ.40'.13''.5$ erit $1-\varepsilon.\,\text{coſ}\,v = 1,0069798$ et $dm = -3549''.9$, vti actu facto calculo fuit inuentum.

§. 13. Anomaliam veram, cui aequatio centri maxima reſpondet, ſequenti modo facillime determino.

mino. Aequationum §. 5. expoſitarum ſumtis differentialibus, habetur

$$dm = de(1 + \varepsilon \,\text{coſ.}\, e) \text{ et } dv = \frac{de(1 + \text{coſ.}\, v)}{f(1 + \text{coſ.}\, e)}$$

poſito

$$f = \sqrt{\frac{a}{p}} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

Cum vero ſit

$$\text{coſ.}\, e = \frac{\varepsilon - \text{coſ.}\, v}{\varepsilon.\,\text{coſ.}\, v - 1}, \text{ erit}$$

$$dv = \frac{1 - \varepsilon.\,\text{coſ.}\, v}{f(1-\varepsilon)}\, de \text{ et } dm = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon.\,\text{coſ.}\, v}\, de;$$

quibus, cum pro aequatione centri maxima ſit $dv = dm$, inter ſe aequatis, prodit

$$(1 - \varepsilon^2)\sqrt{(1 - \varepsilon)} = (1 - \varepsilon.\,\text{coſ.}\, v)^2$$

ſiue cum hic poteſtates altiores excentricitatis negligere liceat, $1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 = (1 - \varepsilon.\,\text{coſ.}\, v)^2$ ſeu $\text{coſ.}\, v = + \frac{5}{4}\varepsilon$. Subſtituta itaque excentricitate modo inuenta, prodit anomalia vera, cui reſpondet aequatio centri maxima $2^s.\ 29^\circ.\ 41'.\ 34''$; huic competit anomalia media $3^s.\ 0^\circ.\ 30'.\ 40''$; ita, vt quaeſita aequatio maxima ſit $49'.\ 6''$.

DE

DE
LATITVDINE VENERIS
GEOCENTRICA TEMPORE TRANSITVS A. 1769.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

In diſſertatione de Parallaxi Solis cum Illuſtr. Acad. Scientiarum nuper communicata, oſtenſum a me fuit, obſeruationes contactuum internorum pro tranſitu Veneris A. 1769. facto, praebere latitudinem Veneris geocentricam tempore coniunctionis 10′. 19″, quum tamen menſurae diſtantiarum minimarum inter centra Solis et Veneris, variis in locis captae, probare videantur hanc latitudinem aliquanto minorem fuiſſe. Licet vero diſſenſus qui inter valores latitudinis vtroque modo elicitos, vix duo aut tria minuta ſecunda ſuperet, adeoque determinationem Parallaxis nullo modo dubiam reddere queat; haud inutile tamen erit fuſius explicare, quaenam prodeat latitudo Geocentrica ex obſeruatis diſtantiis marginum Solis et Veneris, nec non aliis obſeruationibus ad eam inquirendam inſtitutis, quia ſic facile diiudicare licebit, cuinam concluſioni potior habenda ſit fides?

2. Quum plerisque Americae incolis iucundo ſpectaculo totius fere tranſitus frui licuerit, factum quoque eſt, vt in iſtis regionibus, plurimae et exactiſſimae obſeruationes, ad diſtantiam breuiſſimam centrorum Solis et Venoris explorandam inſtitutae ſint, inter quas autem praeprimis nominari merentur, quae Noritoni in Penſyluania, et numero plurimae et accuratione inſignes captae ſunt menſurae diſtantiarum proximarum inter limbos Solis et Veneris, quarum obſeruationum, vt et reliquorum phaenomenorum circa tranſitum Veneris ibi obſervatorum expoſitionem, Illuſtr. Societas Scientiarum Londinenſis ſubmittere dignata eſt. Quamuis autem a Cl. *Rittenhouſe* operatione graphica ſingulas has menſuras examinatas eſſe viderimus eumque inuenisſe tantum non omnibus ſatisfieri, ſi diſtantia vera minima centrorum Solis et Veneris ponatur 10′. 10″, ſemidiameter Solis 15′. 47″ atque ſemidiameter Veneris 28″, 56; vt tamen maiorem hac de re acquireremus certitudinem, ſingulas fere obſeruationes ſeorſim computare placuit, tumque ex earum debita inter ſe combinatione valores pro diſtantia minima exquirere.

3. Dum autem concluſiones ex his calculis deductas breuiter expoſituri erimus, primum quaedam monenda videntur de Methodo quam hoc in Tab. XX. Fig. 1. negotio nobis ſequendam elegimus. Repraeſentet igitur A B orbitam Veneris, ⊙ L eclipticam, ſit locus Solis in ⊙ qui tamquam inuariabilis ſpectatur, dum Venus

Venus motu relatiuo orbitam deſcribere concipitur, ſint A et B duo loca Veneris in orbita, quorum ille tempus medii tranſitus anteuertit, hic autem inſequitur, his autem locis reſpondeant loca apparentia ſeu obſeruata a, b pro quibus etiam diſtantiae ☉ a et ☉ b per obſeruationes dantur. Centro ☉ et radiis ☉ b, ☉ a deſcripti concipiantur arcus am, bn, rectis ☉ A et ☉ B in m et n occurrentes, eruntque partes reſectae A m et B n eae quantitates, quibus diſtantiae verae ☉ A et ☉ B ob effectum Parallaxis, ſiue imminui, ſiue augeri debeant, vt in apparentes ☉ a, ☉ b transformentur. Quum igitur pro datis obſeruationum temporibus hi effectus Parallaxis determinari poſſint, dabuntur etiam valores linearum ☉ A et ☉ B, porro quum ipſum tempus binas huiusmodi obſeruationes interiacens quoque detur, innoteſcet valor lineae A B per datum motum horarium Veneris in orbita facile determinandus. Inuentis igitur tribus trianguli ☉ A B lateribus, quaeſtio eo reuoluitur, vt inde eliciatur valor lineae perpendicularis ☉ M, nec non ſegmentorum A M et B M, quibus datis etiam tempus medii tranſitus cognoſcetur. Breuitatis gratia dicamus latus ☉ A $= a$, ☉ B $= b$ et A B $= c$ ſemiſummam autem laterum s, tumque ex Geometria conſtabit aream totius trianguli A ☉ B hac exprimi formula:

$$\triangle \text{A} \odot \text{B} = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

eadem autem area, quum aequalis quoque ſit ½ A B. ☉ M, inde ſequens deducitur valor diſtantiae minimae ☉ M

$$\odot M = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

quam formulam per Logarithmos facile computare licet. Inuenta autem $\odot M$, erit

$$AM = \sqrt{(\odot Aq - \odot Mq)} = \sqrt{(\odot A + \odot M)(\odot A - \odot M)}$$

ſimilique modo

$$BM = \sqrt{(\odot B + \odot M)(\odot B - \odot M)}.$$

Caeterum et alia via hoc negotium exſequi licet, quaerendo primum ſegmenta A M et B M, tumque inde ⊙ M, ſi enim differentia ſegmentorum A M et B M dicatur p, habebitur ob

$$\odot Aq - \odot Bq = AMq - BMq, \ (a+b)(a-b) = cp$$

ideoque

$$p = \frac{(a+b)(a-b)}{c},$$

tum vero erit

$$AM = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}p \text{ et } BM = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}p,$$

et denique fiet

$$\odot M = \sqrt{(\odot A + AM)(\odot A - AM)} = \sqrt{(\odot B + BM)(\odot B - BM)}.$$

Quamuis autem poſterior Methodus, priore aliquanto videatur facilior, hanc tamen praeferendam eſſe cenſuimus, quia verificationem quandam calculi ſecum ferre cenſenda eſt, dum vtraque obſeruatio pro tempore medii tranſitus eundem valorem exhibere debet, quod commodum poſteriori operatione obtineri nequit, niſi valor lineae ⊙ M duplici modo quaeratur, quo autem facto, prior operandi modus huic breuitate nihil cedere videtur. Caeterum facile intelli-

intelligitur prius allata aeque valere, ſi ambae obſeruationes ante vel poſt tempus medii tranſitus cadant, quae tamen ad valorem latitudinis ſtabiliendum, non aeque haberi poſſunt aptae, ac iſtae, quarum vna tempus medii tranſitus praecedit, altera vero inſequitur, praeſertim ſi temporis interuallum ſatis adhibeatur notabile, quo enim maior eſt baſis trianguli A ☉ B, eo minus errandi periculum pro determinatione lineae ☉ M orietur ex errore commiſſo in valore lineae A B aeſtimando.

4. Valores diſtantiarum apparentium inter centra Solis et Veneris ex obſeruationibus Noritoni factis deducti, ſequenti repraeſentantur Tabella, adiectis ſimul valoribus diſtantiarum verarum inter eadem centra

	Temp. vero	Diſt. cent. appar.	Diſt. cent. vera.
I.	3ʰ. 7′. 19″	813″,0	825″,83
II.	11. 39	800, 8	813, 70
III.	17. 42	784, 9	797, 86
IV.	32. 3	745, 7	758, 71
V.	40. 4	729, 8	742, 77
VI.	4. 35. 5	631, 7	642, 80
VII.	57. 9	607, 7	617, 27
VIII.	5. 7. 49	603, 9	612, 55
IX.	21. 40	603, 1	610, 43
X.	31. 46	605, 2	611, 54
XI.	42. 38	609, 5	614, 72
XII.	51. 10	613, 7	617, 93

Temp. vero		Diſt. cent. appar.	Diſt. cent. vera.
XIII.	$6^h.22'.14''$	$648'',7$	$649'',90$
XIV.	31. 5	659, 8	660, 26
XV.	41. 24	681, 0	680, 49
XVI.	48. 12	693, 7	692, 66
XVII.	53. 30	705, 9	704, 55
XVIII.	56. 22	709, 6	707, 93

vbi notaſſe iuuabit nos pro ſemidiametro Solis eum retinuiſſe valorem, quem auctores ex ſuis obſeruationibus concluſerunt, nimirum $15'.47''$, nam ſi haec ſemidiameter aliquanto minor ſtatui deberet, facile erit diiudicatu, quantam diſtantia minima inde patiatur diminutionem.

5. Ne nimis prolixum et inutilem ſuſciperemus laborem, circa combinationem harum obſeruationum, eam nobis praeſcripſimus regulam, vt ſex priorum obſeruationum cum ſex vltimis inſtitueremus comparationem, pro reliquis autem ſex obſervationibus intermediis proxime circa ipſum tempus medii tranſitus factis, inquireremus qualem ſingulae diſtantiae obſeruatae praebeant valorem pro diſtantia minima, ſi ad epocham medii tranſitus, reducantur, quod ob datos motus horarios facile perficere licuit. Sequens autem tabella, non ſolum valores trium laterum ⊙A, ⊙B et AB trianguli A⊙B ſed etiam diſtantiae minimae ⊙M inde eliciendae et temporis pro medio tranſitu, exhibet, vltimum vero momentum ideo potiſſimum adiiciendum eſſe exiſti-

exiſtimauimus, vt inde diiudicari poſſit quaenam obſeruationes reliquis ſuſpectiores haberi debeant:

Comparat. inter		⊙ A	⊙ B	A B	⊙ M	Tempus medii tranſitus
I. et	XVIII.	825″,83	707″,93	916″,20	10′. 9″,91	5ʰ. 26′. 31″
	XVII.	- - - -	704, 45	904, 73	11, 50	25. 44
	XVI.	- - - -	692, 66	883, 53	10, 44	26, 20
	XV.	- - - -	680, 49	856, 33	10, 60	26. 19
	XIV.	- - - -	660, 26	815, 07	8, 36	26. 56
	XIII.	- - - -	649, 90	779, 67	10, 31	26. 24
II. et	XVIII.	813, 70	707, 93	898, 87	9, 61	26. 23
	XVII.	- - - -	vt ſupra	887, 40	11, 20	25. 56
	XVI.	- - - -	- - - -	866, 20	10, 16	26. 14
	XV.	- - - -	- - - -	839, 00	10, 34	26. 9
	XIV.	- - - -	- - - -	797, 73	8, 13	26. 48
	XIII.	- - - -	- - - -	762, 33	10, 09	26. 15
III. et	XVIII.	797, 86	- - - -	874, 67	9, 60	26. 23
	XVII.	- - - -	- - - -	863, 20	11, 16	25. 56
	XVI.	- - - -	- - - -	842, 00	10, 14	26. 14
	XV.	- - - -	- - - -	814, 80	10, 35	26. 10
	XIV.	- - - -	- - - -	773, 53	8, 14	26. 49
	XIII.	- - - -	- - - -	738, 13	10, 08	26. 15
IV. et	XVIII.	758, 71	- - - -	817, 27	7, 74	25. 36
	XVII.	- - - -	- - - -	805, 80	9, 25	25. 5
	XVI.	- - - -	- - - -	784, 60	8, 33	25. 24
	XV.	- - - -	- - - -	757, 40	8, 62	25. 18
	XIV.	- - - -	- - - -	716, 13	6, 69	25. 57
	XIII.	- - - -	- - - -	680, 73	8, 67	25. 17
V. et	XVIII.	742, 77	- - - -	785, 20	9, 32	26. 16
	XVII.	- - - -	- - - -	773, 73	10, 75	25. 44
	XVI.	- - - -	- - - -	752, 53	9, 82	26. 5
	XV.	- - - -	- - - -	725, 33	10, 01	26. 1
	XIV.	- - - -	- - - -	684, 07	8, 01	26. 44
	XIII.	- - - -	- - - -	648, 67	9, 84	26. 5

 Com-

	Comparatio inter	⊙ A	⊙ A	A B	⊙ M	Tempus medii tranſitus
VI. et	XVIII.	642, 80	[illegible]07, 93	565, 12	10′ 9,″ 31	$5^{h.}$ 26. 21
	XVII.	- - -	704, 45	553, 67	10, 9	25. 32
	XVI.	- - -	692, 66	532, 47	9, 66	26. 1
	XV.	- - -	680, 49	505, 27	9, 84	25. 53
	XIV.	- - -	660, 26	464, 00	8, 40	26. 57
	XIII.	- - -	649, 90	428, 60	9, 71	25. 59.

Numerum harum comparationum facile augere potuiſſemus, quandoquidem obſeruationes quinque priores cum IX, X, XI et XII commode combinari poſſe videntur, ſimilique ratione quinque vltimae cum VII et VIII; verum hunc laborem ſuſcipere ſuperfluum duximus, ſiquidem valores pro diſtantia minima iam inuenti, tam arctis circumſcribantur limitibus, vt nullum ſit dubium, quin medio ipſorum ſumto, valor huius diſtantiae vero proximus obtineatur. Maxima ſcilicet diſcrepantia horum valorum non niſi ad 5″ aſſurgit, quae ſi combinatio obſeruationis IV cum XIV excludatur, ad 3,″ deprimitur, ſin vero adeo omnes combinationes cum IV et XIV excludantur, eadem 2″ vix ſuperabit, ex inuentis autem valoribus pro tempore medii tranſitus euidenter patet, obſeruationes IVtam et XIVtam, reliquis incertiores eſſe habendas. Deinde pro ſex obſeruationibus intermediis notaſſe ſatis erit valores, qui ex earum reductione ad epocham medii tranſitus pro diſtantia minima oriuntur, hi autem ita ſe habent:

VII.

	Diſtant. cent. act.	Diſt. minim.
VII.	10'. 17''. 27	10'. 6'', 87
VIII.	12, 55	8, 53
IX.	10, 43	10, 28
X.	11, 54	11, 10
XI.	14, 72	10, 97
XII.	17, 93	8, 53

vbi iterum liquet obſeruationem ſeptimam excludi poſſe, quippe quae a reliquis plus iuſto diſcrepat.

6. In ſuperioribus calculis, eam correctionem quam diſtantiae centrorum Solis et Veneris ſubeunt, propter diuerſam iſtorum centrorum refractionem, neglteximus plane, quia certo nobis habebamus compertum, diſtantias iſtas hac de cauſſa ne ſemiſſe quidem ſecundi immutari. Id autem ſequenti ratiocinio planius fiet. Sit ☉ A linea horizontalis per centrum Solis ducta, ☉ ♀ M recta per centra Solis et Veneris tranſiens et limbo Solis in M occurrens, demittantur ex ♀ et M in ☉ A perpendiculares ♀ C et M B tumque capta M *m* aequali differentiae refractionum inter centrum Solis et punctum limbi M, ſi iungantur ☉ *m* recta ipſi ♀ C in V occurrente, erit locus centri Veneris apparens in puncto V, quum enim differentiae refractionum ſint differentiis altitudinum quam proxime proportionales, erit ♀ V : M *m* : : ♀ C : M B, ideoque puncta ☉, V et *m* quam proxime in directum iacebunt. Quum igitur ex obſeruationibus deduxerimus diſtantiam centrorum veram = ☉ M − V *m*, quae tamen aequalis eſſe deberet

 beret

beret ipſi ⊙ M − ♀ M, correctio huic diſtantiae adiicienda erit = V *m* − ♀ M, hinc ſi centro ⊙ radiis ⊙ V, ⊙ *m* deſcribantur arcus circuli V *v* et *mp* rectae ⊙ M in *v* et *p* occurrentes, habebitur iſta correctio = ♀ *v* − M *p* = −(M *m* − ♀ V) coſ. ⊙ M B, quae quantitas pro ſingulis noſtris aequationibus minimum adipiſcitur valorem. Pro obſeruatione ex. gr. VI^ta^ habemus ⊙ ♀ = 632″; ♀ C = 390″; ♀ V = 0′, 4 et M *m* = 0″, 6 vnde deducitur correctio = − 0, 2 coſ. ⊙ M B = − 0, 2 $\frac{♀ C}{⊙ ♀}$, ideoque vix − 0″, 1 maior.

7. Si nunc ex omnibus 36 valoribus, quos combinationes ſupra allatae ſuppeditant, medium ſumatur, prodibit valor diſtantiae minimae 10′. 9″, 4, ſi vero comparationes cum obſeruatione IV excludantur, medio ſumto inuenietur = 10′. 9″, 8 et denique comparationibus cum obſeruatione XIV^ta^ etiam excluſis, valor huius diſtantiae prodibit = 10′. 10″. Ex ſex obſeruationibus intermediis, medium ſumendo colligitur diſtantia minima 10′. 9″, 4 et ſeptima excluſa 10′. 9″, 9. Hinc itaque medio ſumto inter omnes concluſiones accuratiores, quae non niſi 2″ inter ſe diſcrepant, exacte omnino inuenietur diſtantia centrorum Solis et Veneris minima 10′. 10″, aſſumto ſcilicet pro ſemidiametro Solis valore 15′ et 47″, inde autem liquet, ſi haec ſemidiameter ſtatuatur 15′. 45″, 5, diſtantiam iſtam minimam prodire debere 10′. 9″. Quod tempus medii tranſitus attinet, ex concluſionibus optime inter ſe conſentien-

tientibus, quae remanent IVtam et XIVtam obſervationem excludendo, medio capto idem inuenitur $5^h. 26'. 7''$, quum igitur idem tempus pro Pariſiis incidat in $10^h. 36'. 40''$ circiter, differentia meridianorum inter Lutetias Pariſiorum et Noritonum habebitur $5^h. 10'. 33''$ optime conueniens cum iſta, quam ex obſeruationibus circa eclipſes Satellitum Iouis Noritoni factis deducere licuit.

8. Quamuis valor diſtantiae minimae iam inventus, ex concluſionibus egregie inter ſe conſentientibus elicitus ſit, adeo vt hoc ex capite pro exactiſſimo haberi deberet, diffiteri tamen nolumus nobis multum probabile videri, eundem vno ſaltem ſecundo augendum eſſe. Indolem enim obſeruationum pro diſtantiis marginum Solis et Veneris micrometro obiectiuo capiendis, inſtitutarum qui rite perpenderit, facile concedet multo maiorem eſſe probabilitatem, vt harum diſtantiarum menſurae iuſto prodeant maiores, quam vt in defectu peccarent. Ad inueniendam ſcilicet diſtantiam marginum minimam ea inſtrumento tribui debet poſitio, qua recta per centra Solis et Veneris tranſiens cum ipſa ſectione lentium in Micrometro exacte congruit, in alio vero quocunque inſtrumenti ſitu, diſtantia marginum vera maior inueniri debet. Quum igitur pro vnaquaque obſeruatione non niſi vnica poſitione inſtrumenti diſtantia marginum vera inueniri queat, liquet omnino maxime probabile eſſe, vt harum diſtantiarum menſurae veris aliquanto inueniantur maiores,

maiores, vnde viciſſim probabile quoque redditur diſtantias centrorum veris aliquanto minores inuentas eſſe. Neque tamen hunc valorem diſtantiae minimae plus quam vno minuto ſecundo augere auſim, quoniam alias ſtatuendum eſſet, omnes menſuras circa diſtantias marginum captas in exceſſu peccare, quod tamen in tanto praeſertim obſeruationum numero haud credibile videtur. Quodſi igitur ex ratione ſupra allata, ſingulis diſtantiis centrorum obſeruatis vnius ſecundi tribuatur augmentum, inde colligetur diſtantiam minimam centrorum fuiſſe 10′. 11″, ſuppoſita ſemidiametro Solis 15′. 47″, quae autem diſtantia inuenietur 10′. 10″ dum ſemidiameter Solis ſtatuitur 15′. 45″, 5. Caeterum ſi cui viſum fuerit hoc augmentum nulla vrgente neceſſitate, diſtantiae minimae fuiſſe tributum, tantum abeſt vt ſententiae a nobis propoſitae moroſe inhaerere velimus, vt potius vnicuique liberum relinquamus, valores pro diſtantia minima ex obſeruationibus immediate concluſos vid. §. 7. adoptare, ſi ita placuerit.

9. Vt concluſiones ex obſeruationibus Noritoni factis deductae tanto magis confirmentur, haud abs re erit nonnullas heic adiicere obſeruationes circa diſtantias marginum Solis et Veneris Philadelphiae inſtitutas, quae ita ſe habent:

Temp.

Temp. vero	Diſtantia appar.	Diſt. vera
I. $2^{h}. 55'. 59''$	$848''$, 19	$859''$, 85
II. 3. 16. 33	786, 25	799, 22
III. 3. 46. 46	717, 89	730, 80
IV. 4. 12. 24	662, 80	674, 94
V. 6. 28. 27	660, 84	660, 98
VI. 6. 55. 31	708, 01	705, 92.

Nunc modo ſupra expoſito binarum vltimarum fiat combinatio cum quatuor primis, ex quo pro ⊙ M ſequentes conſequemur valores:

Compar. inter		⊙ A	⊙ B	A B	⊙ M
VI et	I.	$859''$, 85	$705''$, 92	$958''$; 13	$10'. 11''$, 13
	II.	799, 22	- - -	875, 87	8, 55
	III.	730, 82	- - -	755, 00	13, 29
	IV.	674, 64	- - -	652, 47	9, 88
V. et	I.	859, 85	660, 98	849, 87	13, 09
	II.	vt ſup.	- - -	767, 60	10, 93
	III.	- - -	- - -	646, 74	12, 60
	IV.	- - -	- - -	544, 20	9, 83

medium vero ex his octo valoribus praebet diſtantiam minimam centrorum $10'. 11''$ circiter.

10. Inter alias Methodos, quibus Aſtronomi vſi ſunt, ad determinandam Longitudinem et Latitudinem Veneris geocentricam tempore tranſitus per Solem, quum inſigni loco haberi conſueuerit ea, qua momenta appulſus limborum Solis et Veneris

ad fila horizontalia et verticalia Quadrantis notantur; e re eſſe duximus quasdam huius generis obſeruationes calculo ſubiicere, eum in finem vt ſaltem diiudicare liceret, quo in pretio tales obſeruationes habendae ſunt, ad verum valorem Latitudinis geocentricae definiendum. Momenta igitur appulſuum Orenburgi a Celeb. *Kraffio* obſeruata pro hoc inſtituto ſeligere conſtitui, quoniam eadem ſatis exacta et bene inter ſe concordantia mihi viſa ſunt. Antequam vero concluſiones ex his obſeruationibus pro Latitudine deductas heic adferre licet, neceſſe eſt nonnulla breuiter praefari de methodo, quam hoc in negotio mihi ſequendam propoſui. Primum igitur ita mihi perſuaſum habui, concluſiones eo certiores inueniri, quo pauciora momenta obſeruata conſulere neceſſe fuit, quamuis enim interdum fieri ſoleat, vt errores obſeruationum ſe mutuo corrigant, tamen nullum eſt dubium, quin dum errores in eundem ſenſum cadant, tanto maior aberratio ſit metuenda. Dum igitur heic quaeſtio tantum eſt de inueſtiganda Latitudine Veneris, pro ſcopo ſufficere iudicaui, ſi ad bina momenta appulſuum limbi Solis et centri Veneris ad filum horizontale attentio fieret; Longitudo enim Veneris per obſeruationes contactuum adeo exacte determinata habetur, vt ea in ipſa Latitudinis inueſtigatione omnino pro cognita ſpectari queat.

11. Ex modo memorata differentia appulſuum et data altitudine vera centri Solis pro momento, quo

quo limbus ad filum horizontale appellit, facile colligitur altitudo vera centri Veneris iſti momento reſpondens, quo hoc centrum per filum horizontale Quadrantis tranſiiſſe obſeruatum eſt. Si enim diſtantia vera centri Solis a Zenith dicatur D, ſemidiameter Solis Δ et parallaxis altitudinis pro Sole π, tum vero pro Venere ſtatuatur diſtantia eius vera a Zenith tempore appulſus $= d$ et parallaxis $= \alpha\,\pi$, refractio autem altitudini apparenti obſeruatae reſpondens ponatur $= r$, omnino liquet diſtantiam apparentem limbi Solis a Zenith eſſe pro tempore ſui appulſus $= D - \Delta - r + \pi$, ſimilique ratione diſtantiam apparentem centri Veneris a Zenith tempore tranſitus per filum horizontale $= d - r + \alpha\,\pi$, quum igitur hae diſtantiae plane congruant, conſequimur $d = D - \Delta - (\alpha - 1)\,\pi$, ſicque ex data altitudine vera centri Solis, eiusdem diametro et differentia inter parallaxes altitudinum Veneris et Solis cognita, facile inuenitur altitudo vera centri Veneris, pro tempore quo per filum horizontale tranſiiſſe obſeruatum eſt. Iam igitur totum negotium eo redit, vt ex data longitudine et altitudine Veneris pro dato tempore Orenburgenſi, inveſtigetur eius Latitudo. Ad huius Problematis reſolutionem ſufficiet modo conſueto, pro dato hoc tempore quaerere longitudinem et altitudinem Nonageſimi; ſi enim N ♈ M fuerit ecliptica, N punctum Nonageſimi, Π Z N circulus Latitudinis per Zenith Z et Nonageſimum tranſiens, itemque Π ♀ M ſimilis circulus per locum Veneris ♀ tranſiens et eclipti- Tab. XX. Fig. 3.

eclipticae in M occurrens, ductus autem concipiatur circulus verticalis Z ♀; patet in triangulo ΠZ♀ data eſſe bina latera Π Z et Z ♀, tum vero etiam angulum Π, qui ſcilicet ex datis longitudinibus Nonageſimi et Veneris facile inuenitur, his autem datis, iam latus trianguli tertium Π♀ quaeri poteſt, cuius complementum ad 90° eſt ♀ M aequalis latitudini Veneris ipſo tempore obſeruationis. Idem vero et hoc modo facilius perfici poſſe videtur: pro tempore quo Venus per filum horizontale tranſiit computetur altitudo vera centri Solis, vt habeatur differentia altitudinum vera, deinde inueſtigetur angulus, quem ecliptica tunc temporis facit cum linea horizontali per centrum Solis ducta, tunc enim ex datis differentiis altitudinum et Longitudinum pro centris Solis et Veneris, ipſae quoque latitudines Veneris determinari poſſunt. Si enim fuerit ☉ H linea horizontalis per centrum Solis ducta, ☉ L ecliptica et ♀ locus Veneris, ex quo demittantur in ☉ H et ☉ L perpendiculares ♀ M et ♀ N quarum haec producta ſi opus ſit occurrat horizontali in puncto P, erit ♀ P = ♀ M. coſ. L ☉ H et N P = ☉ N Tang. L ☉ H, ideoque dabitur ♀ N = ♀ P — N P. Hanc autem procedendi viam alteri praeferendam eſſe iudicauimus, quia in hoc computo incertitudo quae circa Eleuationem Poli adeſſe poterit, negotium minime turbare valet.

Tab. XX. Fig. 4.

12. Vt autem rem in compendium redigamus, ſequenti Tabula concluſiones a nobis inuentas exponere licebit, de qua monendum eſt, quod I et II. colu-

columna complectatur momenta appulſuum obſeruata limbi Solis ſuperioris et centri Veneris ad filum horizontale, III^tia^ et IV^ta^ differentias altitudinum et longitudinum inter centra Solis et Veneris pro momentis tranſitus Veneris per filum horizontale, V^ta^ Latitudines Veneris iisdem temporibus reſpondentes et denique VI^ta^ valores pro latitudine tempore coniunctionis inde deductos:

16^h^. 10'. 10½''	16^h^. 10'. 42''	728''	576''	8'. 47''	10'. 13''
15. 26	15. 56	738	597	46	15
19. 16	19. 44	751	612	51	22
20. 22	20. 49	757	616	54	26
22. 11	22. 37	763, 5	624	56	29
23. 14	23. 41	757	628	46	20
25. 25	25. 51	763, 5	637	48	23
27. 29	27. 54	770	645	50	26.

Medium ex concluſionibus inuentis dabit latitudinem geocentricam tempore coniunctionis 10'. 22'' circiter quae ſine dubio veram aliquanto excedit.

12. Quum in huiusmodi obſeruationibus vtcunque accurate inſtitutae fuerint, vix euitari queat, quin in notandis momentis appulſuum vnius ſecundi error committatur, intelligitur inter concluſiones ex illis deductas fruſtra talem deſiderari conſenſum, qui ſe prodit inter obſeruationes diſtantiarum pro limbis Solis et Veneris Micrometro inſtitutas. Neque igitur obſeruationes hae appulſuum vtiles cenſeri debent, ad valorem Latitudinis exacte definiendum, quum

 vnius

vnius ſecundi error in appulſu, altitudinem Veneris 7″ immutet pro noſtro caſu, adeoque in latitudine variationem fere 8″ producat, quae autem multo ſenſibilior euaderet, ſi angulus L ☉ H maior eſſet. Quodſi igitur in vtroque appulſu tam limbi Solis quam centri Veneris error tantum vnius ſecundi commiſſus ſit, atque hi duo errores conſpirare concipiantur ad differentiam altitudinum vel augendam, vel minuendam, inde in latitudinem error vltra 16″ aſſurgens redundabit. Quod demum attinet modum procedendi a nobis adhibitum, exiſtimamus eum ſine dubio illi praeferendum eſſe, quo ex differentiis altitudinum et azimuthorum per ipſa appulſuum momenta exquiſitorum, differentiae longitudinum et latitudinum inueſtigantur. De longitudine enim Veneris quum ex aliis obſeruationibus tam certi ſimus, vt vix error vnius ſecundi metuendus ſit, eam hoc in calculo vt cognitam ſpectare licuit, ne obligati eſſemus momenta quoque appulſuum ad fila verticalia conſiderare, ſiquidem errores in his appulſibus commiſſi, concluſiones pro latitudine nimium turbaturi eſſent. Differentias autem altitudinum potius calculi ope, quam ex obſeruationibus eruendas eſſe cenſuimus, ne incertitudo refractionum negotium turbaret, quae imprimis pro exiguis Solis altitudinibus ſenſibilem habere poteſt influxum, et pro noſtro quidem caſu quo altitudo Solis vera 3 vel 4 gradus vix ſuperauit, dubitari nequit, quin refractio actualis ab ea quam in Tabulis aſſignatam eſſe inuenimus, quam maxime eſſe potuerit diuerſa.

13.

13. Quamuis obſeruationes Cel. *Kraffti* ſupra allatae, tam bene inter ſe conſentiant, ac de huiusmodi obſeruationibus ſperari poſſit, tamen haud iniucundum eſſe exiſtimauimus, ſi inquireremus quomodo ad perfectum fere conſenſum redigi queant. Quicquid autem hac de re monebimus, tantum vt coniecturam proponemus. Differentias igitur temporum inter momenta appulſuum ad filum horizontale conſiderantes inuenimus eas non aequabili lege procedere, ſimul autem vidimus leui correctione adhibita, huic incommodo medelam adferri poſſe. Differentiam ſcilicet inter momenta appulſuum tam pro prima, quam vltima obſeruatione ſemiſſe ſecundi auximus, ita tamen vt pro priori altitudo Veneris inde augeatur, pro vltima autem imminuatur, prior igitur differentia hinc inuenietur 32″, poſterior vero 25″½. Subtracta hac ab illa reſiduum eſt 6″½, quod per reliquas ſex obſeruationes proportionaliter diſtribuimus, eoque facto differentias appulſuum vt et valores pro latitudine inde deductos tales inuenimus quales ſequens Tabula refert:

	Different. obſeruat.	Diff. corr.	Latit. Geoc.
I.	31″,5	32″,0	10′.16″
II.	30	30,0	15
III.	28	28,5	19
IV.	27	28	19
V.	26	27,5	18
VI.	27	27	20
VII.	26	26,3	21
VIII.	25	25,5	22

ex

ex quibus medio ſumto prodiret latitudo 10′. 18″,7, ſed haec vti iam ſupra monui coniecturae loco tantum propono.

14. Quum momenta contactuum Veneris internorum variis in locis obſeruata, vnanimi conſenſu pro diſtantia centrorum minima praebeant 10′. 13″, ſuppoſita nimirum ſemidiametro Solis 15′. 47″, merito iam diſquirendum eſt, quomodo hae obſeruationes, quae nulli ſuſpicioni videntur obnoxiae conciliari queant, cum menſuris diſtantiarum inter centra Solis et Veneris, quas ex aduerſa parte in eo conſentire vidimus, quod haec diſtantia ſtatui debeat 10′. 11″. Ex tribus vero cauſſis fieri poteſt, vt diſtantia minima ex momentis contactuum elicita aliquantum imminui debeat, quarum duae etiam pro concluſionibus ex menſuris Micrometricis deductis aliquam inuoluunt diminutionem, tertia autem prioris generis obſervationes ſolas afficere videtur. *Primo* ſcilicet ſi motus horarius Veneris in orbita quam aſſumſimus, aliquantilla ſui parte augeri debeat, neceſſum quoque eſt, vt diſtantia minima ex contactibus concluſa imminuenda ſit; *deinde* ſi ſemidiameter Solis imminutionem patiatur, hoc quoque valebit ad diſtantiam centrorum minimam minuendam, et *demum* ſi vel propter refractionem radiorum Solis in atmoſphaera Veneris factam, vel aliam quamcunque rationem phyſicam, momenta contactuum propius ad epocham medii tranſitus contigerint, quam caeteroquin fieri debuiſſet, inde quoque contingere poteſt, vt ex momentis con-

contactuum maior colligatur valor pro diſtantia minima, quam vt cum reliquis obſeruationibus conſentiens deprehendatur.

16 Quod igitur motum horarium Veneris in orbita attinet, quum hoc in negotio maximi momenti ſit, eum accurate exprimi, haud incongruum iudicauimus hoc loco formulam tradere concinnam, cuius ope motus horarii Planetarum heliocentrici in ipſorum orbitis, cum ſumma exactitudine computari poſſunt. Sit igitur $C c$ ſpatium a Planeta in orbita circa Solem $\odot$ interuallo vnius horae deſcriptum, ductis itaque $C \odot$, $c \odot$ exprimet angulus $C \odot c$ motum horarium Planetae heliocentricum in orbita, tum autem ducatur arcus $c D$ perpendicularis ad $\odot C$. Porro ſi linea $E S$ capiatur media proportionalis inter ſemiaxem maiorem et minorem orbitae, eaque pro radio aſſumta deſcribatur centro S arcus $E e$ ita vt ſector $E S e =$ ſectori $C \odot c$, dabit angulus $E S e$ motum horarium Planctae heliocentricum medium. Quum itaque ſit Sect. $C \odot c =$ Sect. $E S e$, erit $D c . \odot C = E e . S E$, ideoque ob ang. $C \odot c$: ang. $E S e :: \frac{D c}{\odot C} : \frac{E e}{S E}$, erit ang. $C \odot c$: ang. $E S e :: S E^2 : \odot C^2$. Dicatur iam anomalia Planetae vera ab aphelio computata Φ, anomalia media t, diſtantia media a et excentricitas e, eritque $d \Phi : d t :: S E^2 : \odot C^2$, per proprietatem autem Ellipſis eſt $S E^2 = a a \surd (1 - e e)$ et $\odot C^2 = \frac{a a (1 - e e)^2}{(1 - e \cos. \Phi)^2}$, proinde his valoribus ſubſtitutis fiet $d \Phi : d t :: \surd (1 - e e) : \frac{(1 - e e)^2}{(1 - e \cos. \Phi)^2}$, ſeu

Tab. XX. Fig. 5.

$d\Phi = dt \frac{(1 - e \cos.\Phi)^2}{(1 - ee)^{3:2}}$. Facta applicatione huius formulae ad caſum praeſentem, inuenimus motum horarium heliocentricum Veneris in orbita 238″, 38, in longitudinem vero 237″, 96 et in latitudinem 14″, 088. Quum autem motus horarius terrae heliocentricus pro eo tempore fuerit 143″, 50, habebitur motus relatiuus Veneris a terra in Sole viſus = 94″; 46 ſecundum longitudinem, ideoque motus relatiuus in orbita 95″, 50, ex quo deducitur motus relatiuus Veneris in orbita e terra viſus 240″, 12 fere vt Celeb. de la *Lande* inuenit, tum vero quoque habebitur motus Veneris geocentricus in longitudinem 237″, 49 et in latitudinem 35″, 52. Quum itaque hinc pateat motus horarios a nobis aſſumtos rite ſe habere, nullum quidem eſt dubium, quin ex momentis contactuum deduci debeat diſtantia minima 10′. 13″.

17. Examinemus autem nunc, quantus cenſeri debeat effectus, per quem momenta contactus pro ingreſſu fuerunt retardata, pro egreſſu autem accelerata, ſiue hic effectus refractioni radiorum Solis in atmoſphaera Veneris, ſiue alii cuidam cauſſae phyſicae ſit adſcribendus. Quum igitur in Diſſertatione de Parallaxi huic Tomo Comment. inſerta ad has peruentum ſit aequationes:

$y = 8,76 + 1,55.\lambda$ et $\mu - \nu = -0,91 - \frac{1}{15}\lambda$,

duas heic ſtatuamus hypotheſes, priorem qua ſemidiameter Solis 947″ et diſtantia minima centrorum Solis

Solis et Veneris 10'. 11'', poſteriorem qua ſemidiameter Solis 945'', 5 et diſtantia minima 10'. 10''. Pro priori habemus $y = 6, 44$, ideoque

$$\lambda = \frac{\mu + \nu}{2} = -1, 52 \text{ et } \frac{\mu - \nu}{2} = -0, 40,$$

vnde $\mu = -1, 92$ et $\nu = -1, 12$, porro erit ſumma ſemidiametrorum $= 975, 6$ et differentia earum 918'', 4. Diminutio igitur diſtantiae centrorum, tam pro contactibus externis, quam internis erit $= 1, 52$, ex quo hi contactus fere 30'' verſus tempus coniunctionis promouebuntur. Pro poſteriori hypotheſi eſt $y = 5, 4$;

$$\lambda = \frac{\mu + \nu}{2} = -2, 17 \text{ et } \frac{\mu - \nu}{2} = -0, 38,$$

hinc $\mu = -2, 55$ et $\nu = -1, 79$, tum autem ob ſummam ſemidiametrorum 974'', 1 et differentiam $= 916'', 9$ erit diminutio diſtantiae centrorum pro contactibus externis 0'',65, pro internis vero 0'',69, vnde priores contactus 13'' poſteriores autem 14'', verſus tempus coniunctionis appropinquantur. Quicquid autem hac de re iam demonſtrauimus, id tantum hypothetice aſſertum eſſe quiuis facile videt, ea nimirum ſub conditione, quod valores pro diſtantia minima, tam ex obſeruationibus Micrometricis quam obſeruatis contactibus deducti rite ſe habeant, de quo quidem nulla ſuſpicandi ratio nobis oborta eſt, quum conſenſus obſeruationum vtriusque claſſis tantus ſit, vt eum temere exſtitiſſe credere non liceat. Sin autem huiusmodi quaedam adfuerit cauſſa, quae ad moram Veneris in Sole minuendam aliquid efficere

 valuit,

valuit, pro certo tamen pronuntiare non audeo, eam in refractione quadam radiorum Solis per atmoſphaeram Veneris facta, quaeri debere, totam hanc quaeſtionem aliis dirimendam libenter permittens. Quicquid igitur hac de re ſit, quum poſteriori adhibita hypotheſi concluſiones non multum inter ſe diſcrepantes inueniantur, tuto aſſumere licebit ſemidiametrum Solis pro tempore tranſitus A. 1769 fuiſſe 15'. 45'', 5 et diſtantiam minimam centrorum Solis et Veneris 10'. 10'', ex quo colligitur Latitudinem Veneris geocentricam fuiſſe 10'. 17''. Deinde correctio longitudinis pro Venere inuenietur 16'', 56, adeo vt tempus coniunctionis cum Sole inciderit Pariſiis in 3 Iunii 10^h. 14'. 3'', ideoque tempus medii tranſitus in 10^h. 36'. 38'' tempore vero. De parallaxi autem iam monuimus eam, ex tantilla diminutione latitudinis non niſi $\frac{1}{53}$ parte ſecundi augeri.

EPITO-

EPITOME
OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM, QVAS ANNO MDCCLXXI. SECVNDVM CALENDARIVM IVLIANVM PETROPOLI INSTITVIT

Auctor

IOANNES ALBERTVS EVLER.

Enarrabo hic more conſueto altitudines praecipuas tam Barometri quam Thermometri vna cum phaenomenis potioribus atmoſphaerae, a me primis quinque menſibus vsque ad diem 23^{am} Maii huius 1771. anni annotatas; qua ſcilicet die ſeries harum obſeruationum, domicilio meo incendio conflagrato, abrupta fuit. Ne autem hoc modo lacuna inſit noſtris commentariis, explebo eam exſcribendo pro menſibus ſequentibus earum obſeruationum meteorologicarum momenta primaria, quae ſedulus ac exactiſſimus huius vrbis obſeruator, D. *Schröter*, mecum communicare voluit.

En ergo ſtatim ſummarium mearum obſeruationum, de quibus ante omnia monendum eſt, me eadem inſtrumenta et eandem methodum adhibuiſſe, quibus annis praeteritis vſus ſum, de qua re fuſius in Tomi XIV. parte poſteriori horum Commentariorum locutus ſum.

Menſe Ianuarii.

Barometri altitudo maxima 28. 67. d. 27. h. IX. p m.
altitudo minima 26. 96. d. 13. h. V. a. m.

variatio 1. 71
medium 27 81
Altitudo media inter omnes 27. 83.

Hic et in ſequentibus binae cyphrae poſteriores partes centeſimas pollicis, priores vero pollices integros denotant, quorum duodecim pedem Pariſinum regium conſtituunt.

Thermometri altitudo minima 192. d. 19. h IX. p m.
altitudo maxima 151 d 12. h. IX. p. m.

differentia 41 grad. Deslisl.

Mercurius in Thermometro deſcendebat infra

gradum	diebus	die ſcilicet huius menſis
190	2	18. 19.
180	8	1 15. 16. 17. 21. 24. 25. 27.
170	9	2. 4. 7. 14. 20. 23. 26. 28. 29.
160	8	3. 5. 8. 9. 13 22. 30. 31.
150	4	6. 10. 11. 12.

Mercurius vero aſcendebat ſupra

gradum	diebus	die ſcilicet
160	11	2. 3. 5. 6. 8 9. 10. 11. 12. 13 31.
170	7	4. 7. 14 15. 22 29. 30.
180	10	1. 16. 17. 20. 21. 23. 25. 26. 27. 28
190	3	18. 19 24.

Ventus

Ventus vehementer ſpirabat diebus 17; die ſcilicet 2. 3. 7. 8 10. 11. 13. 14. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 28. 29. 31.

Dies procelloſi fuerunt 5; ſcilicet dies 4. 6. 12. 25. 26.

Flabat ventus

E regione	die	ſumma dierum
Nord	4. 7. 11 16. 18. 19. 29	7
N – O	1. 9. 17. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28	10
Oſt	5. 10. 15	3
S – O	nullo	0
Süd	2. 6. 12 21	4
S – W	nullo	0
Weſt	8. 31	2
N – W	3 13. 14. 20. 30.	5

Coelum ſerenum fuit diebus 9; et quidem d. 1. 7. 15. 16. 18. 19. 21. 24. 27.

Nebulae 5, die ſcilicet 15. 17. 18. 21. 29.

Nix parca cecidit diebus 10, nempe d. 2. 3. 5. 6. 11. 13. 22. 25. 26. 29.

Nix copioſa vero die 12mo.

Parhelion nitidum obſeruatum fuit die 21mo, et duo alia debiliora die 24 et 25ta.

Aurorae boreales debiles fuerunt tres, d. 15. 27. et 28.

Menſe

Menſe Februarii.

Barometri altitudo maxima 28. 77. d. 7. h. VII. a. m.
altitudo minima 27. 50. d. 1. h. VII. a. m.

variatio 1. 27.
medium 28. 14.
altitudo media inter omnes 28. 21.

Thermometri altitudo minima 198. d. 21. h. VII. a. m.
altitudo maxima 153. d. 28. h. II. p. m.

differentia 45. grad. Deslisl.

Mercurius in Thermometro deſcendebat infra

gradum	diebus	die ſcilicet
190	4	12. 19. 20. 21.
180	6	6. 7. 14. 18. 22. 23.
170	10	2. 3. 4. 5. 8. 9. 11. 13. 15. 24.
160	7	1. 10. 16. 17. 25. 26. 27.
150	1	28.

Aſcendebat vero Mercurius ſupra

gradum	diebus	die ſcilicet
160	9	1. 10. 15. 16. 24. 25. 26 27 28.
170	10	2. 4. 5. 8. 9. 13. 14. 17. 22. 23.
180	9	3. 6. 7. 11. 12. 18. 19. 20. 21.

Malacia fuit die 21 et 23.

Dies ventoſi 11 et quidem dies 1. 3. 6. 7. 8. 9. 19. 24. 25. 26. 28.

Dies procelloſi 4. dies ſcilicet 2. 4. 5. 27.

Venus

Ventus ſpirabat

ex plaga	die	ſumma dierum
Nord	1. 7. 13. 17. 19. 20.	6.
N – O	2. 3. 10. 11. 16. 18. 21. 25. 26.	9.
Oſt	12. 14. 15. 23. 24. 27. 28.	7.
S – O	8.	1.
Süd	4. 9.	2.
S – W	22.	1.
Weſt	nullo	0.
N – W	5. 6.	2.

Coelum fuit ſerenum per 14. dies, ſcilicet d. 3. 5. 6. 7. 11. 12. 13. 14. 18. 19. 20. 21. 22. 24.

Nebulae 12. die ſcilicet 9. 10. 12. 15. 16. 17. 20. 21. 22. 23. 24.

Nix parca d. 1. 2. 8. 10. 17. 28, diebus 6.

Nix copioſa d. 9. 27: diebus 2.

Grando d. 27.

Aurorae boreales obſeruatae fuerunt duae, die 8 et 19.

Menſe Martii.

Barometri altitudo maxima 28. 53. { d. 4. h. XI. p. m. / d. 5. h. III. p. m. et / d. 6. h. I. p. m. }

altitudo minima 27. 62. d. 1. h. VI. a. m.

Variatio 0. 91.
Medium 28. 07.

altitudo media 28. 10.

 Ther-

Thermometri altitudo minima 195. d. 14. h. V. a m.
altitudo maxima 144. d. 31. h. II. p. m.

differentia 51. Gr. Deslisl.

Mercurius in Thermometro deſcendebat infra

gradum	diebus	die ſcilicet
190	1	14.
180	4	3. 13. 27. 28.
170	11	4. 5. 6. 7. 12. 15. 19. 20. 21. 22. 26.
160	10	1. 2. 11. 16. 17. 18. 23. 24. 25. 29.
150	5	8. 9. 10. 30. 31.

Aſcendebat autem ſupra

gradum	diebus	die
150	5	7. 8. 25. 30. 31.
160	17	1. 2. 5. 6. 9. 10. 11. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 23. 24. 29.
170	8	3. 4. 12. 14. 22. 26. 27. 28.
180	1	13.

Malacia 5 diebus fuit; d. 3. 5. 6. 28. 29.

Dies ventoſi 8. dies ſcilicet 7. 8. 9. 15. 16 18. 21. 22.

Dies procelloſus vnus fuit 23.

Ventus ſpirabat ex

plaga

plaga	die	ſumma dierum
Nord	2. 3. 4. 10. 11. 20. 26.	7
N—O	12. 13. 14. 17. 18. 22. 27.	7
Oſt	15. 16. 24. 28.	4
S—O	5. 6. 31.	3
Süd	23.	1
S—W	nullo	0
Weſt	1. 8. 9. 19.	4
N—W	7. 21. 25. 30.	4
ventus variabil.	29.	1

Dies ſereni fuerunt 12; dies ſcilicet 3. 4. 5. 6. 11. 12. 13. 14. 22. 26. 27. 28.

Nebulae 8. d. 3. 4. 5. 6. 7. 14. 19. 28.

Nix parca diebus 10, die ſcilicet 1. 2. 8. 9. 10. 17. 18. 25. 30. 31.

Nix copioſa diebus 4. d. 16. 19. 23. 29.

Aurorae boreales numerabantur ſeptem. die 2. 3 et 12ma tres praelucidae et die 4, 5, 6 et 22^{a}, quatuor debiliores; praeſertim poſtrema, quae admodum exilis et incompleta fuit.

Menſe Aprilis.

Barometri altitudo maxima 28.61. d. 8. h. II. p. m.
altitudo minima 27.80. d. 3 et 14. h. VII. a. m.

variatio 0 81.
medium 28.21.

altitudo media 28. 15.

Thermometri altitudo minima 161. d. 1. h. XI p. m.
altitudo maxima 129. d. 27 h. II. p. m.

differentia 32. grad. Deslisl.

Mercurius in Thermometro deſcendebat infra

gradum	diebus	die ſcilicet
160	1	1.
150	22	2. 3. 4. 6. 7. 8. 9. 12. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22 23. 24. 25. 26. 27. 30.
140	7	5. 10. 11. 13. 14. 28. 29.

Aſcendebat vero ſupra

gradum	diebus	die ſcilicet
130	1	27.
140	13	5. 9. 10. 11. 12. 15. 19. 21. 22. 23. 24. 28. 29.
150	15	2. 3. 4. 6. 7. 8. 13. 14. 16. 17. 18. 20. 25. 26. 30.
160	1	1.

Malacia per dies 10 obſeruata fuit, die ſcilicet 4. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 17. 18. 21.

Dies ventoſi fuerunt 9; d. 3. 5. 16. 19. 20. 24. 25. 28. 30.

Dies procelloſi 2; d. 1 et 22.

Flabat ventus

e regio-

e regione	die	ſumma dierum
Nord	8. 11. 12. 18. 22. 28. 29.	7.
N — O	16. 17. 20. 21. 25. 30.	6.
Oſt	9. 10. 26.	3.
S — O	5.	1.
Süd	7. 14.	2.
S — W	2. 4.	2.
Weſt	3. 13.	2.
N — W	1. 6. 23. 24.	4.
ventus variabilis	15. 19. 27.	3.

Dies ſereni fuerunt 16; ſcilicet d. 1. 3. 5. 7. 8. 9. 15. 17. 18. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26.

Nebulae 4; d. 4. 5. 8. 12.

Nix parca die 2 et 30; copioſa die 6.

Pluit quinquies; die 10. 11. 27. 28. 30.

Hoc menſe flumen Neva liberabatur a glacie et quidem die 19, poſtquam per dies 159 glacie obductum fuit.

Menſe Maii vsque ad diem 23^{am}.

Barometri altitudo maxima	28. 52.	d. 2. h. VII. a. m.
altitudo minima	27. 90.	d. 13. h. II. p. m.
variatio	62.	
medium	28. 21.	
altitudo media inter omnes	28. 13.	

Thermometri altitudo minima 161. d. 1. h. VI. a. m.
altitudo maxima 113. d. 21. h. II. p. m.

differentia 48. grad. Deslil.

Mercurius in Thermometro deſcendebat infra

gradum	diebus	die ſcilicet
160	1	1.
150	3	2. 3. 9.
140	10	4. 5. 6. 7. 8. 10. 11. 12. 13. 14.
130	7	15. 16. 18. 19. 20. 22. 23.
120	2	17. 21.

Aſcendebat autem ſupra

gradum	diebus	die ſcilicet
120	6	17. 18. 20. 21. 22. 23.
130	7	6. 10. 11. 12. 15. 16. 19.
140	8	3. 4. 5. 7. 8. 9. 13. 14.
150	1	2.
160	1	1.

Malacia die 4. 5. 11. 16. 17. 18 (mane) 20. 21.

Ventus vehemens die 2. 6. 7. 8. 12. 14. 18 (veſperi) 22. 23.

Procella die 1. 13.

Flabat ventus

e regio-

e regione	die	ſumma dierum
Nord	5. 7. 11. 15. 16. 17. 19.	7.
N–O	1. 2. 6. 8. 9. 10. 20. 21. 22. 23.	10.
Oſt	3. 4.	2.
Weſt	13. 14.	2.
N–W	18.	1.
variabilis	12.	1.

Dies ſereni d. 1. 2. 8. 10. 11. 16. 17. 19. 20. 21. 23. Summa 11 dies.

Nebulae 5, die ſcilicet 10. 11. 16. 17. 20.

Pluuia parca d. 3. 4. 12. 13. 18.

Pluuia copioſa cecidit d. 14.

Aurorae boreales d. 1 et 2.

Progrediar nunc ad obſeruationes D. *Schröter* et quo melius eae cum noſtris comparari poſſint, exordiar ab ipſa prima die huius menſis Maii. Obſeruauit autem

Barometri altitudinem maximam 28. 52 d. 2.
altitudinem minimam 27. 85 d. 13.

vnde et ex obſeruationibus eius, praecedentibus menſibus inſtitutis, concludere licet, altitudines Barometri quo D. *Schröter* vſus eſt, non multum differre ab eis, quas nos annotauimus.

Thermometri altitudo minima 160 d. 1.
altitudo maxima 112 die 28 et 29.
in radiis Solis 66 d. 8.

Dies

Dies ſereni XVIII. die ſcilicet 2. 5. 6 10. 11. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29.

Pluit d. 3 4 12. 14. 30. 31.

Tonuit d. 30.

Aurorae boreales d. 1 et 2.

Venti vehementiores d. 1 ex Nord. d. 2 et 3 ex N—O: d. 8 ex Oſt d 12. ex Weſt. d. 22 ex N—O; d. 24 ex Nord et d. 30 ex Weſt.

Procellae d. 18 ex Weſt et d. 23 ex N—O.

Menſe Iunii.

Barometri altitudo maxima 28. 37 die 12.
altitudo minima 27. 71 die 9.

Variatio 0. 66 ; medium 28. 04.

Thermometri altitudo minima 138 die 1.
altitudo maxima 111 die 11 et 12
in radiis Solis 65 die 11 et 12

Dies ſereni VI. dies ſcilicet 3. 11. 12. 15. 16. 17.

Nebula d. 8.

Pluit d. 1. 4. 6. 8. 9 13. 18. 19. 20. 21. 23. 24. 25. 26. 30. per dies ergo XV.

Venti vehementiores ſpirabant ex Nord d. 1. 3. 4. 22 et 26 ; ex N — O d. 5 et 14 ; ex Oſt. d. 2. 8 ; ex Sud. d. 9 ; ex S — W d. 17 et ex Weſt. d. 27. 29. 30.

Tonuit quater, die ſcilicet 9. 19. 25 et 26.

Menſe

Menſe Iulii.

Barometri altitudo maxima 28. 75 d. 6 et 7
altitudo minima 27. 52 d. 1.

Vatiatio 1. 23 et medium 28. 13.

Thermometri altitudo minima 132 d. 1.
altitudo maxima 109 d. 8 et 9.
et in radiis Solis 69 d. 7.

Dies ſereni numerabantur XI. ſcilicet d. 4. 5. 7. 8. 9. 10. 21. 24. 25. 27. 30.

Pluit diebus XVII; die ſcilicet 2. 3. 6. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 19. 20. 23. 28.

Grando cecidit die 29 et 31.

Tonuit octies et quidem die 10. 11 et 29 valde vehementer; die vero 13. 23. 24. 26. 30. minus forte.

Aurora borealis obſeruata fuit die 21.

Ventus vehementer flabat ex Sud d. 16 ex S – W d. 2. 4 et 6 ex Weſt die 18 et 21.

Menſe Auguſti.

Barometri altitudo maxima 28. 33 die 23 et 24
altitudo minima 27. 08 die 8.

Variatio 1. 25 et medium 27. 70.

Thermometri altitudo minima 141 d. 11 et 12
altitudo maxima 120 d. 2 et 31
et in radiis Solis 76 d. 13 et 27.

Dies ſereni fuerunt ſex ſcilicet d. 22. 23. 27. 28. 29 et 31.

Pluit diebus XVIII. et quidem die 1. 2. 3 5. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 15. 16. 17. 18. 20. 21. 27. 29.

Nebula fuit d. 31.

Aurorae borealcs III. d. 1. 26 et 31.

Venti vehementes flabant ex N–O d. 15; ex Oſt d. 10; ex S–W d. 3. ex Weſt. d. 19. 23 et 24; ex N–W denique d. 7. 11. 12. 24.

Procellae ex Oſt d. 2 et 16; ex S–W d. 4; ex Weſt d. 8. 20. 21 et 26.

Menſe Septembris.

Barometri altitudo maxima 28. 54 d. 12 et 13
altitudo minima 27. 37 d. 30.

Variatio 1. 17 medium 27. 95

Thermometri altitudo minima 152 d. 27 et 28
altitudo maxima 114 d. 1.

et eodem die Thermometrum radiis Solis expoſitum aſcendebat ad gradum 68.

Dies ſereni numerabantur ſex et fuerunt 1. 3. 4. 13 14. 15.

Nebulae IV, die ſcilicet 2. 3. 8. 16.

Pluit per dies XV et quidem die 1. 4. 5. 6. 10. 11. 17. 18. 19. 20. 21. 23. 26. 29. 30.

Nix

Nix cecidit die 26. 27 et 28 et grandinauit die 26 et 28.

Venti vehementes Nord d. 27, Oſt d. 6. Weſt d. 17 et N – W d. 19.

Procellae Weſt d. 25 et 26.

Aurorae boreales numerabantur IV. ſcilicet d. 9. 18. 25 et 27.

Menſe Octobris.

Barometri altitudo maxima 28. 40 d. 11
altitudo minima 27. 25 d. 19

Variatio 1. 15, medium 27. 83

Thermometri altitudo minima 156 d. 29
altitudo maxima 131 d. 4
et die 15 in radiis Solis 104.

Dies sereni tantum quatuor fuerunt d. ſcilicet 11. 16. 20. 26: nebula die 9.

Pluuia decidit diebus XVI et quidem d. 2. 3. 5. 6. 7. 8. 10. 17. 18. 19. 21. 23. 24. 25. 30. 31.

Nix vero diebus VII ſcilicet d. 1. 20. 21. 22. 27. 28. 30.

Venti vehementes Sud d. 3. 15 et 27; S – W d. 4. 7. 8 et 31; Weſt d. 9 et 18; N – W d. 29.

Procellae Nord d. 19; S – W d. 24. 25 et 30; Weſt d. 17.

Menſe Nouembris.

Barometri altitudo maxima 28. 33 d. 17
altitudo minima 27. 33 d. 8 et 9

Variatio 1. 00, medium 27. 83.

Thermometri altitudo minima 178 d. 22
altitudo maxima 144 d. 1 et 2

Dies ſereni VII fuerunt, ſcilicet d. 1. 2. 13. 14. 15. 22. 25.

Nebula die 26.

Pluit duobus diebus et quidem d. 19 et 29.

Nix decidit XI diebus, ſcilicet d. 5. 6. 7. 8. 9. 16. 18. 21. 26. 27. 29.

Venti vehementiores Nord d. 17, S—W d. 2. 3. 18 et 27, Weſt d. 10 et 24; N—W d. 9.

Procellae Sud d. 1 et 8; S—W d. 5 et 6.

Aurorae boreales obſeruabantur IV. die ſcilicet 1. 17. 20. 22 et 24.

Halo Solis cum tribus parheliis d. 1. et duae paraſelenae d. 7 et 12.

Flumen Neva denique hoc menſe obductum fuit glacie die 13; conſequenter hoc anno per dies 208 nauigabile fuit.

Menſe Decembris.

Barometri altitudo maxima 28. 28 d. 15.
altitudo minima 27. 08 d. 2.

Variatio

Variatio 1. 20, medium 27. 68.

Thermometri altitudo minima 191 d. 27.
altitudo maxima 145 d. 1 et 2

Dies ſereni numerabantur VII, et quidem d. 21. 23. 25. 26. 27. 28. 29.

Nebula d. 26.

Pluit die 2 et 11 et nix decidit diebus XV, ſcilicet d. 3. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 18. 19. 20. 24. 29. 30.

Venti vehementes Nord d. 24, N–O d. 5, Oſt d. 8, S–O d. 9. 17 et 29, Sud d. 2, S–W d. 1, Weſt d. 19; N–W d. 22.

Procellae Nord d. 26, N–O d. 25, Oſt d. 27 et 28, S–O d. 30, Sud d. 14, Weſt d. 20, N–W d. 21.

Aurorae boreales apparebant tres, die 20. 26 et 27.

Die 26 denique tres parhelii obſeruati fuerunt.

Vnde patet hoc 1771 anno fuiſſe

Barometri altitudinem maximam 28. 77
menſe Februarii die 7.
altitudinem minimam 26. 96
menſe Ianuarii die 13.

Variatio igitur maxima fuit 1. 81 vel $1\frac{87}{133}$ dig.

Medium 27. 86, et altitudo media pro primis quinque menſibus 28. 08.

Frigus

Frigus maximum 198 menſe Februarii die 21.
Calor maximus 109 menſe Iulii die 8 et 9

differentia maxima 89 grad. Deslil.

Status frigoris.

Mercurius in Thermometro deſcendebat infra punctum congelationis naturalis vel infra gradum 150 ſecundum D. *Deslisle*, menſe Ianuarii per dies 31, Februarii per dies 28, Martii per dies 31 Aprilis per dies 23, Maii per dies 4, Septembris per dies 6, Octobris per dies 4, Nouembris per dies 27 et Decembris per dies 29; in toto anno ergo per dies 183.

Deinde dies ſereni numerabantur 116; nebulae 43; ventoſi 115, et procelloſi 40.

Pluit diebus 96 et nix decidit diebus 72.

Porro aurorae boreales fuerunt 29, tonitrua 13, parhelii 5, et paraſelenae 2.

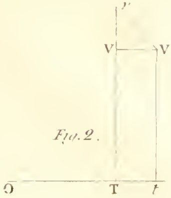


Fig. 2.

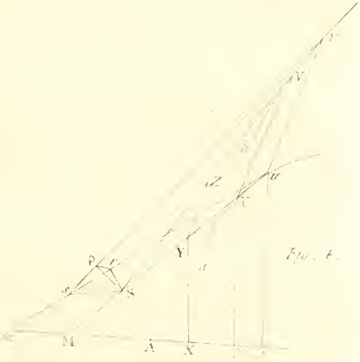
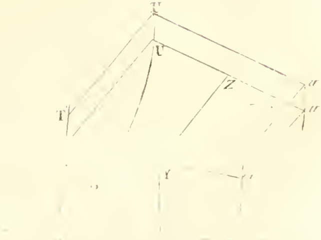


Fig. 1.



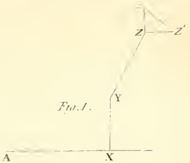


Fig. 1.

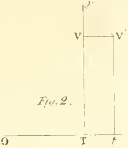


Fig. 2.

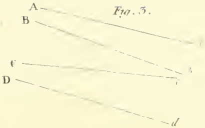


Fig. 3.



Fig. 4.

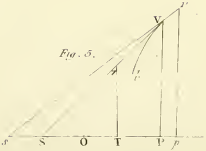


Fig. 5.



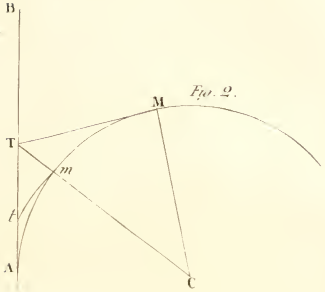


Fig. 2.

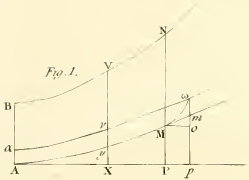


Fig. 1.

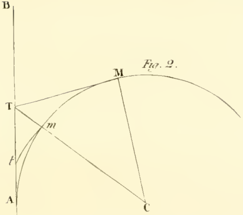


Fig. 2.



Fig. 3.

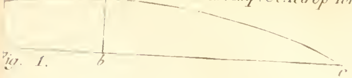


Fig. 1.

Fig. 2.

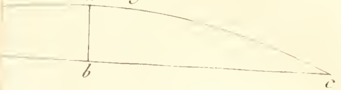


Fig. 3.



Fig. 4.

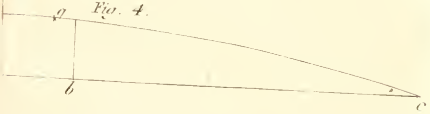


Fig. 5.

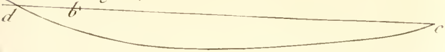
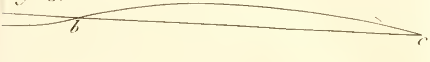


Fig. 8.



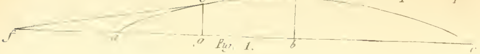


Fig. 1.

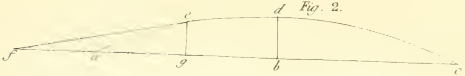


Fig. 2.

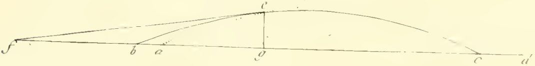


Fig. 3.

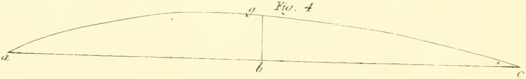


Fig. 4

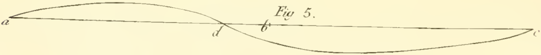


Fig 5.

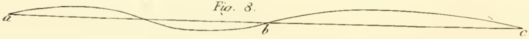


Fig. 8.

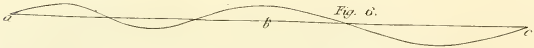


Fig. 6.

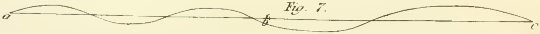


Fig. 7.

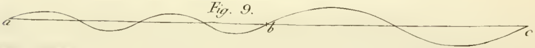


Fig. 9.

Nov. Com. Acad. Imp. Sc. Petrop. Tom. XVI. Tab IV.

Fig 70.

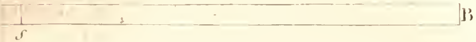


Fig. 71.

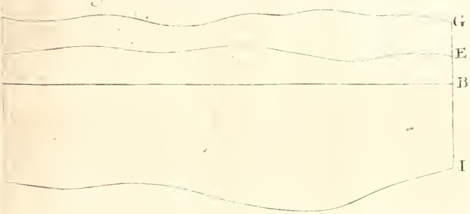


Fig. 72.

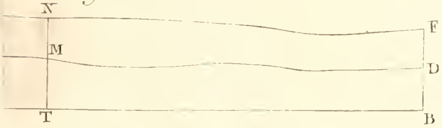


Fig. 73.

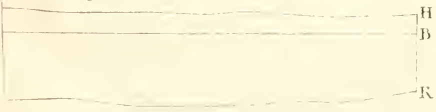


Fig. 70.

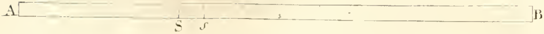


Fig. 71.

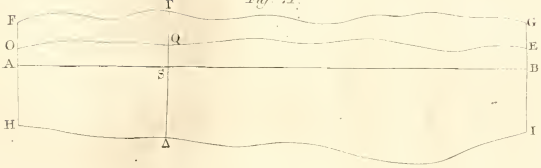


Fig. 72.

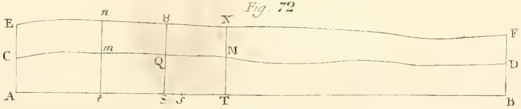


Fig. 73.

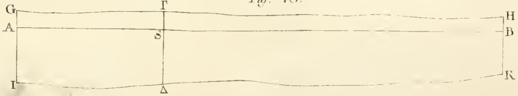


Fig. 74.

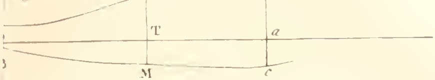


Fig. 75.

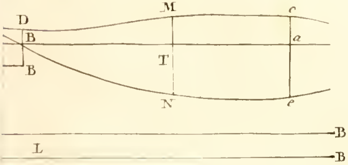


Fig. 76.

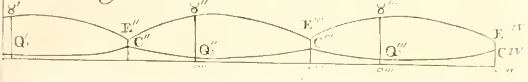


Fig. 74.

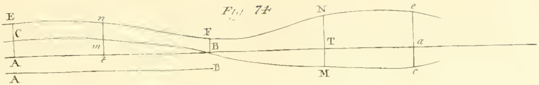
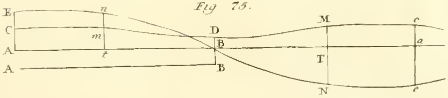


Fig. 75.



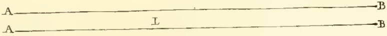


Fig. 80.

Fig. 76.

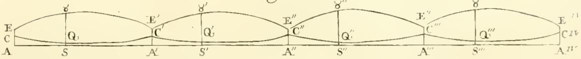


Fig. 77.

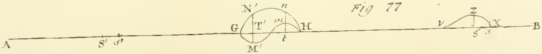


Fig. 78.



Fig. 79.

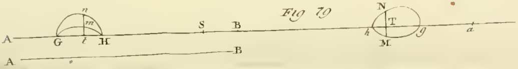




Fig. 81

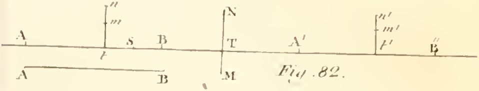


Fig. 82.

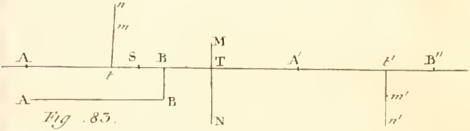


Fig. 83.



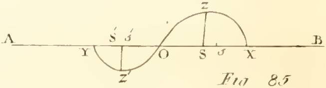
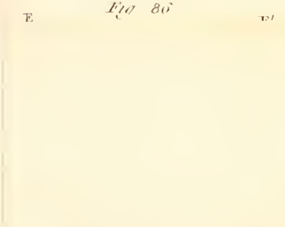


Fig. 85

Fig. 86



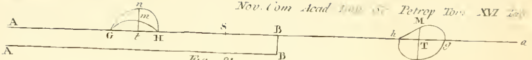


Fig 81

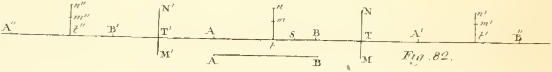


Fig. 82.

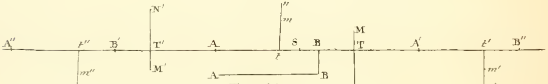


Fig. 83.

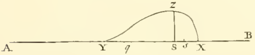


Fig 84

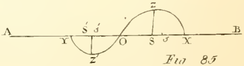
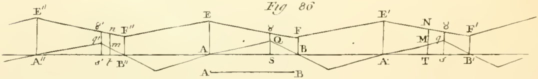


Fig 85

Fig 86



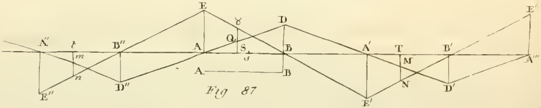


Fig 87

Fig. 88.

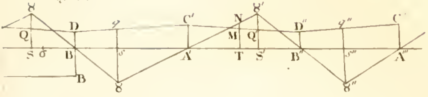


Fig. 90.

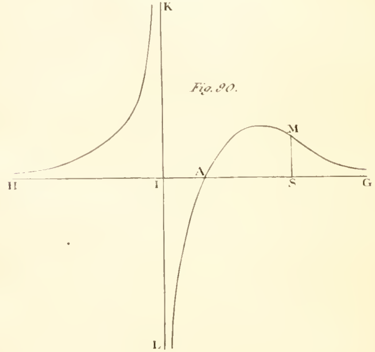
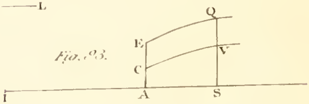
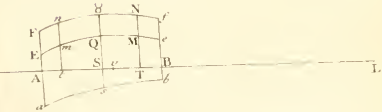




Fig. 93.





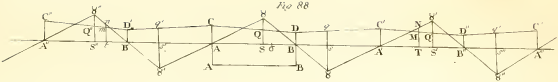


Fig. 88

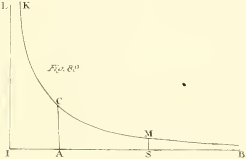


Fig. 89

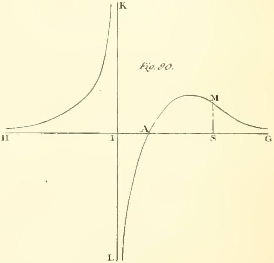


Fig. 90.

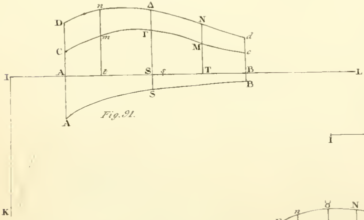


Fig. 91.

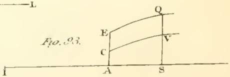


Fig. 93.

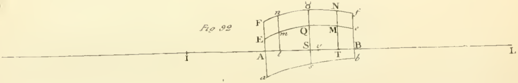


Fig. 92

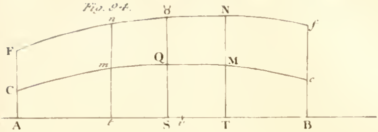


Fig. 94.



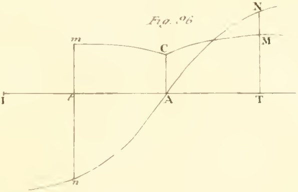
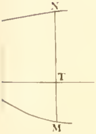


Fig. 96



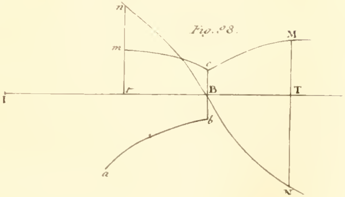


Fig. 98.

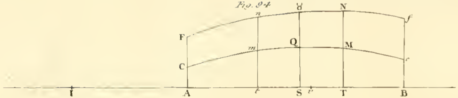


Fig. 94

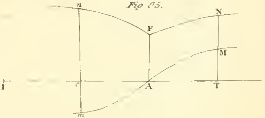


Fig. 95

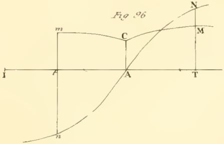


Fig. 96

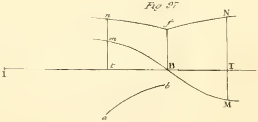


Fig. 97

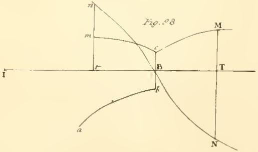


Fig. 98

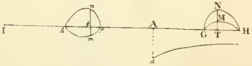


Fig. 99.

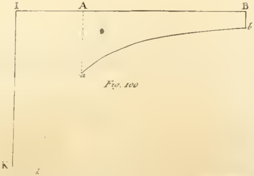


Fig. 100



Fig 101

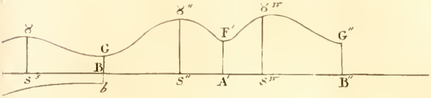
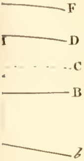


Fig. 102.



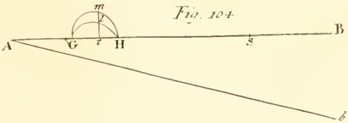
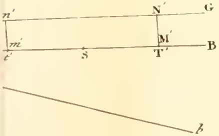
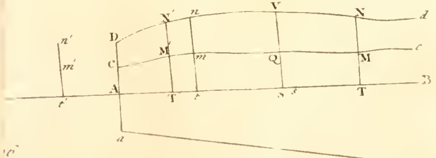


Fig. 104





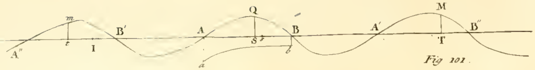


Fig 101.

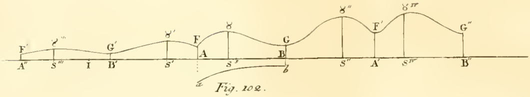


Fig. 102.

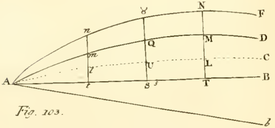


Fig. 103.

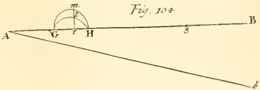


Fig. 104.

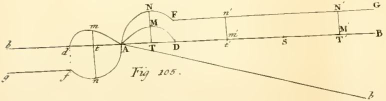


Fig 105.

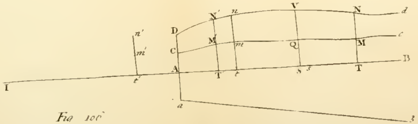
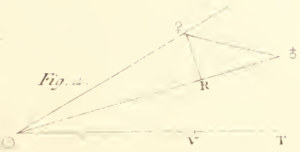
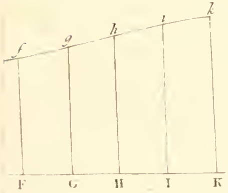


Fig 106.

Fig. 2.





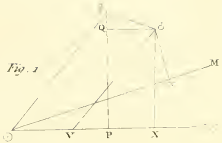


Fig. 1

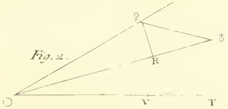


Fig. 2.

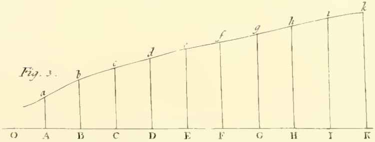


Fig. 3.



Fig. 1.

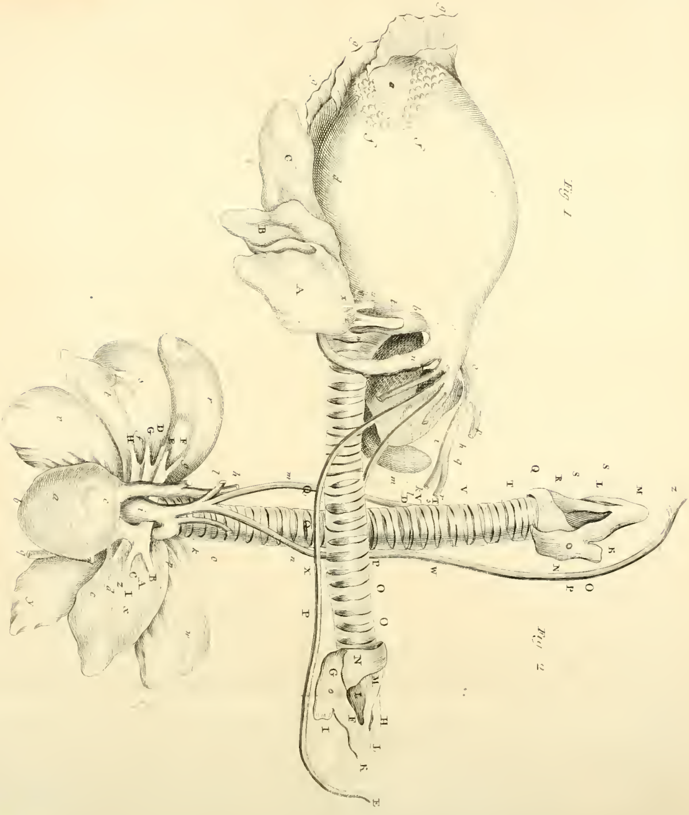

Fig 1
Fig 2



Fig. 3.

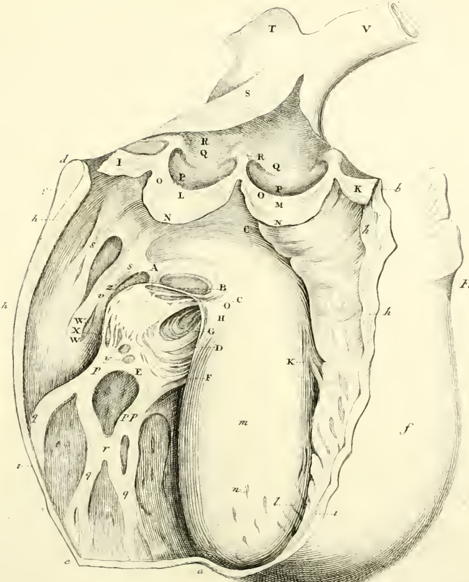
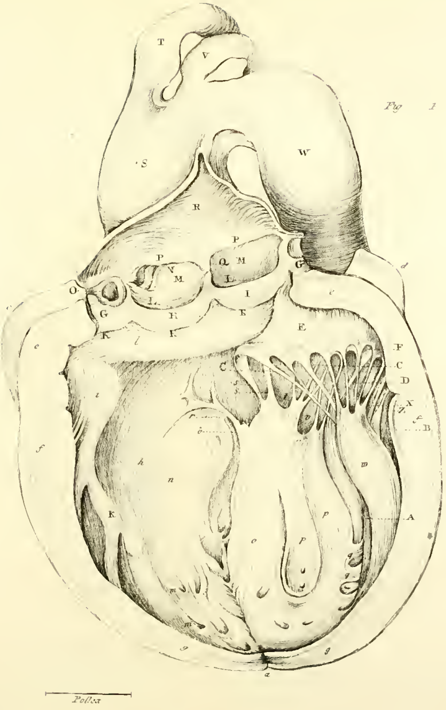


Fig. 3



Fig. 1

Fig. 1



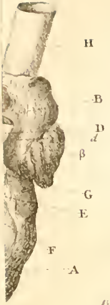




Fig. 2.

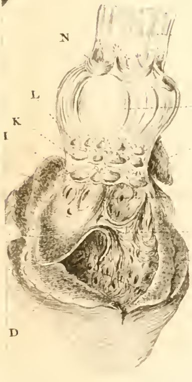


Fig. 5.

B



Fig. 4.

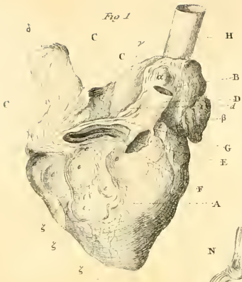


Fig. 1

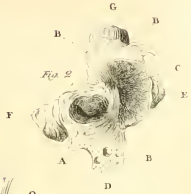


Fig. 2

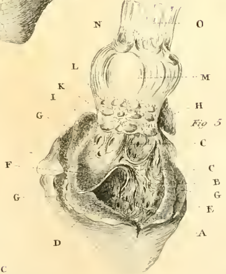


Fig. 5



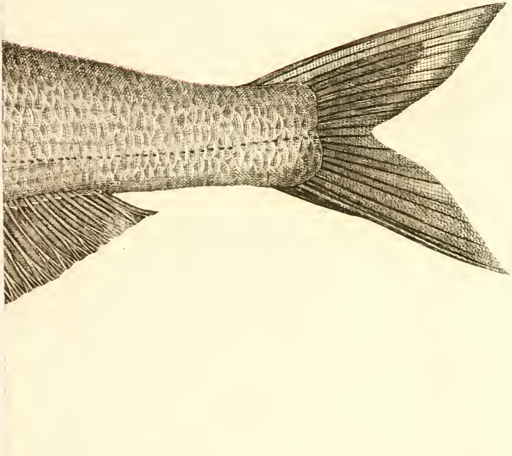
Fig. 3

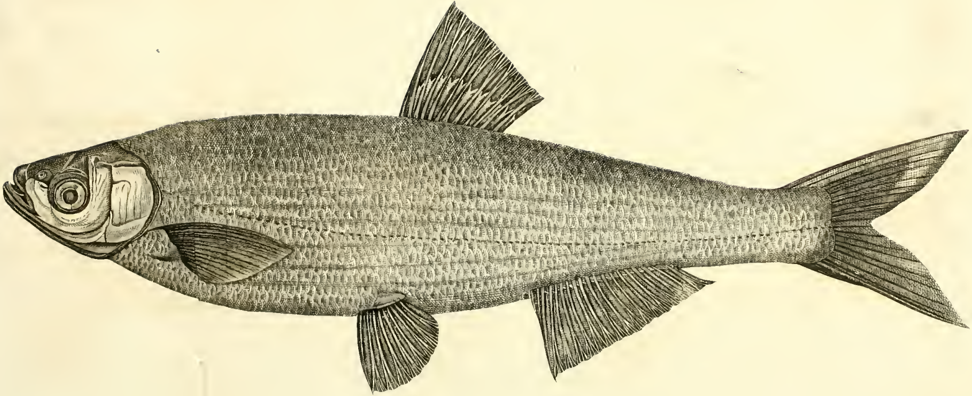


Fig. 4




A
d






1.
2
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.


1.
2
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
Fig. 13.




Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig 6
Fig 7
Fig 1

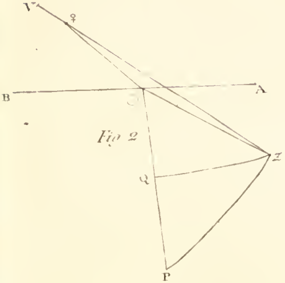
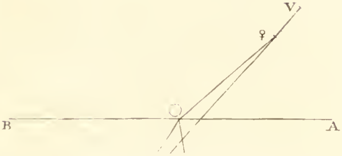


Fig. 2



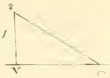


Fig. 1

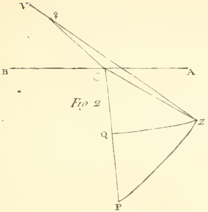


Fig. 2

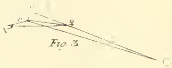


Fig. 3

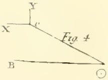


Fig. 4

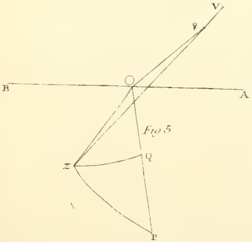


Fig. 5

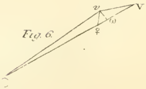


Fig. 6

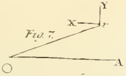


Fig. 7

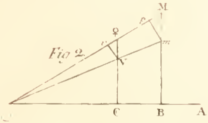
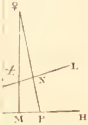


Fig. 2.



4.

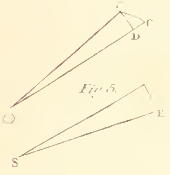
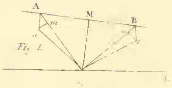
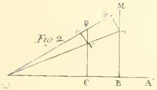
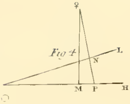
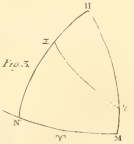


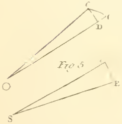
Fig. 5.


A
M
B
m
Fig. 1.


M
♀
Fig. 2.
C
B
A


♀
Fig. 4.
L
N
M
P
H


H
Z
Fig. 3.
N
♈
M


D
Fig. 5.
E
S

AMNH LIBRARY
100125055